

基于模型降维的参数优化加速迭代学习控制算法^{*}

邵振^{1,2†} 薛松屹² 王荣浩³ 段朝霞²

(1. 南京铁道职业技术学院 城轨与市域交通学院, 南京 210031)

(2. 河海大学 人工智能与自动化学院, 南京 211100)

(3. 陆军工程大学 国防工程学院, 南京 210001)

摘要 本文针对离散线性时变系统在有限时间区间内的重复跟踪控制问题, 提出了一种参数优化加速迭代学习控制算法. 首先, 在每次迭代中, 基于上一次迭代的学习效果, 采用不同的提取矩阵去除已经符合精度要求的数据, 以此来降低模型的维度和缩减运行时间区间, 达到加快学习控制的收敛速度和减少系统运行所需的计算量和存储空间的目的. 然后, 结合参数优化方法得到了控制增益的设计方案, 并分析了跟踪误差的收敛性. 最后, 通过与固定增益迭代学习控制算法的仿真对比验证了所提出算法的有效性.

关键词 加速迭代学习控制, 参数优化, 收敛速度, 模型降维, 跟踪控制

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Parameter-Optimal Accelerated Iterative Learning Control Algorithm Based on Model Dimensionality Reduction^{*}

Shao Zhen^{1,2†} Xue Songyi² Wang Ronghao³ Duan Zhaoxia²

(1. School of Urban Rail and Metropolitan Transportation, Nanjing Vocational Institute of Railway Technology, Nanjing 210031, China)

(2. College of Artificial Intelligence and Automation, Hohai University, Nanjing 211100, China)

(3. College of Defense Engineering, Army Engineering University of PLA, Nanjing 210001, China)

Abstract In this paper, a parameter-optimal accelerated iterative learning control (AILC) algorithm is proposed to address the repetitive tracking control for discrete linear time-varying systems within a finite-time interval. In each iteration, based on the learning outcomes from the previous iteration, different extraction matrices are employed to discard data meeting the accuracy criteria, thereby reducing the model's dimensionality and the operational running time, which accelerates the learning control convergence speed and decreases the computational and storage resources required for system operation. The analysis of tracking error convergence leads to the derivation of the control gain design scheme through a parameter optimization method. Finally, simulation comparative experiments between the proposed parameter-optimal AILC algorithm and the traditional iterative learning control (ILC) algorithm verify its effectiveness.

Key words accelerated iterative learning control, parameter-optimal, convergence speed, model dimensionality reduction, tracking control

2025-12-02 收到第 1 稿, 2026-01-20 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(62103133, 521036011, 62173341), 江苏省自然科学基金资助项目(BK20251776, BK20231487); National Natural Science Foundation of China(62103133, 521036011, 62173341), Natural Science Foundation of Jiangsu Province(BK20251776, BK20231487).

[†] 通信作者 E-mail: diu0402@163.com

引言

迭代学习控制(ILC)是一种基于迭代反馈的控制方法^[1].对于ILC算法而言,其通常追求的目标是在批次方向上实现对期望轨迹的完全跟踪^[2].由于ILC自适应性强、容错能力高以及适应时变系统的特性^[3,4],其在机器人控制^[5,6]、工业控制^[7,8]等领域得到了广泛的应用.

ILC的收敛速度是一个备受关注的重要问题.吴东南等人提出了高阶ILC算法^[9],该方法通过利用更多先前批次的信息来改进算法的收敛性能.然而,这种方法对各阶误差的权重设置及调试提出了较高的要求,增加了实际应用中的复杂性.为了解决这一挑战,后续研究中涌现出了一系列改进算法.例如,将遗忘因子的概念引入ILC算法中,使得较早批次的跟踪误差在控制律更新过程中所占的比重逐渐减小,从而提高了算法的稳定性和适应性^[10,11].此外,徐建明等人利用信息数据库中的历史数据,结合径向基函数网络、线性加权策略以及曲线拟合技术,构造新的初始控制输入,有效减少了迭代次数并显著提升了ILC的收敛速度^[12].这些改进不仅增强了ILC算法的灵活性和鲁棒性,也为解决复杂工业过程中的重复任务提供了更为有效的解决方案.

一些学者则采用参数优化的方法来设计控制增益,以加速ILC的收敛速度.Amann等人基于最优控制理论,提出了范数优化的ILC算法,通过寻找最优控制增益来提升性能^[13].Owens等人则引入了二次性能指标进行参数优化,不仅建立了新的ILC算法,还在此基础上进一步提出了参数优化下的高阶学习律,显著提升了算法的适应性和效率^[14,15].逢勃等人的研究则将PID控制器与参数优化的ILC算法相结合,构建了基于范数优化的性能指标函数,这一方法不仅加快了算法的控制效率和收敛速度,还增强了系统的鲁棒性^[16].此外,许建新等人引入了Q因子作为评估学习速度的一个重要指标,并结合鲁棒最优方法,对高阶和低阶ILC算法的收敛速度进行了深入分析和比较,为选择合适的算法提供了理论依据^[17].这些研究成果表明,通过参数优化设计控制增益,可以有效提升ILC算法的性能,满足复杂工业过程对快速、精准控制的需求.这种方法不仅提高了算法的收敛速

度,还增强了系统的稳定性和适应性,为解决重复跟踪控制问题提供了强有力的支持.

现有的加速迭代学习控制(AILC)算法大多致力于在固定的时间区间内通过减少收敛所需的迭代次数来实现加速,很少有研究关注通过动态调整学习时间区间来进一步提升收敛速度的方法.变区间长度ILC作为该方向的重要分支,现有研究存在明显局限,需进一步厘清算法逻辑差异.沈栋等人提出的变区间长度ILC算法^[18,19],虽突破了固定区间的约束,但其区间长度变动依赖于迭代过程中的随机特性或经验判断,缺乏基于跟踪误差精度的明确调整规则,导致区间变化无规律可循,难以实现收敛过程的预测与优化,且未结合模型维度优化实现协同加速.相比之下,兰天一等人借鉴人脑记忆机制,设计了具有指数变增益和动态可调节区间的AILC方案^[20,21],其区间调整以跟踪误差的动态变化为依据,通过区间伸缩适配误差分布,但该方案存在核心缺陷:为保证区间调整的实时性,需采用高频采样与控制策略,这不仅对传感器和执行器的硬件性能提出极高要求,还会导致算法计算负荷呈指数级增长,限制了其工业应用场景.

提升模型是ILC中最常用的离散模型之一,然而其不足之处在于输入输出矩阵的维数不仅与批次过程中的变量有关,还会随着批次长度的增加而急剧增长,导致长时间区间内的执行和计算非常耗时,且需要更多的存储资源^[22].

基于上述情况,本文针对离散线性时变系统提出了一种基于模型降维的AILC算法:以跟踪误差精度为核心约束,构建随迭代动态更新的提取矩阵,通过过滤已达标数据点实现区间的有序缩减;区间调整与模型降维深度耦合,每轮迭代后通过提取矩阵去除冗余数据,同步降低输入输出矩阵维度,在缩短运行区间的同时减少计算量与存储需求,解决了算法计算负荷过高的问题.

1 问题描述与分析

本文考虑的离散线性系统如下

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1, k) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t, k) + \mathbf{B}(t)u(t, k) \\ \mathbf{y}(t, k) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t, k) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $t=0, 1, 2, \dots, N-1$,为离散时间, $N \in \mathbf{Z}^+$ 为有限时间区间长度; $k=1, 2, 3, \dots$,为迭代次数;

$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^q$ 、 $\mathbf{u} \in \mathbf{R}$ 和 $\mathbf{y} \in \mathbf{R}$ 分别代表系统状态,输入和输出; $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 和 $\mathbf{C}(t)$ 为适当维度的状态矩阵.

注 1: 本文研究的是对给定轨迹的重复跟踪控制,每次迭代都运行相同的被控系统,因此状态转移矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 和 $\mathbf{C}(t)$ 只与时间 t 相关,与迭代次数 k 无关.

定义跟踪误差为

$$e(t, k) = y_d(t) - y(t, k) \quad (2)$$

式中: $y_d(t)$ 为给定的有界期望输出.当跟踪误差 $e(t, k)$ 满足迭代截止条件

$$|e(k, t)| \leq \epsilon \quad (3)$$

时,表示 t 时刻在第 k 次迭代时达到跟踪目标, ϵ 为设置的跟踪误差精度.

假设 1: 每次迭代时系统的初态相同,即 $\mathbf{x}(0, k) = \mathbf{x}_0$, \mathbf{x}_0 为给定初态.不失一般性地令 $\mathbf{x}_0 = 0$.

假设 2: 对任意 $t \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, $\mathbf{C}(t)\mathbf{B}(t-1) \neq 0$.

假设 3: 期望输出 $y_d(t)$ 在有限时间区间内

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(1)\mathbf{B}(0) & 0 & \cdots \\ \mathbf{C}(2)\mathbf{A}(1)\mathbf{B}(0) & \mathbf{C}(2)\mathbf{B}(1) & \ddots \\ \mathbf{C}(3)\mathbf{A}(2)\mathbf{A}(1)\mathbf{B}(0) & \mathbf{C}(2)\mathbf{A}(1)\mathbf{B}(0) & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ \mathbf{C}(N) \prod_{l=1}^{N-1} \mathbf{A}(N-l)\mathbf{B}(0) & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

在每一次迭代后,若轨迹的某一段跟踪误差达到条件(3),则在后续迭代中不再考虑这段已经达标的轨迹,而仅对未达标的部分进行迭代.这一策略能够有效加快迭代速度,因为随着每次迭代的进行,参与计算的向量和矩阵维度会逐渐减少.

考虑到输入耦合会影响未达标轨迹段后的所有轨迹,我们提出一种修正方法:一旦发现第一个不达标点,移除其之前的轨迹段,而其之后的所有轨迹段则重新进入新的迭代过程进行修正.这种方法不仅有助于减轻输入耦合的影响,还能提高 ILC 的准确性和收敛性.根据实际需求,还可以灵活设定精度要求,从而在效率与性能之间找到最佳平衡点.

2 参数优化 AILC 算法

定义 σ_k 为第 k 次迭代的起始点; $t_k = \sigma_k, \sigma_k + 1, \sigma_k + 2, \dots, N-1$,为第 k 次迭代的离散时间; $Z_k = N - \sigma_k$,为第 k 次迭代的时间区间长度;初值分别为 $\sigma_0 = 0, t_0 = 0, 1, 2, \dots, N-1, Z_0 = N$.第 k 次迭

的每个时刻均可测.

本文的控制目标是针对符合假设 1~3 的系统(1),设计一种 AILC 算法,以确保跟踪误差 $e(t, k)$ 不仅收敛,而且满足迭代截止条件(3).与传统的 ILC 方法相比,该方案旨在显著提升性能:加速收敛过程、减少计算负担以及降低存储需求.为了实现这一目标,首先定义输入、输出、期望输出和系统跟踪误差向量分别为:

$$\bar{\mathbf{U}}(k) = [u(0, k) \quad u(1, k) \quad \cdots \quad u(N-1, k)]^T$$

$$\bar{\mathbf{Y}}(k) = [y(1, k) \quad y(2, k) \quad \cdots \quad y(N, k)]^T$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_d = [y_d(1) \quad y_d(2) \quad y_d(3) \quad \cdots \quad y_d(N)]^T$$

$$\bar{\mathbf{E}}(k) = [e(1, k) \quad e(2, k) \quad \cdots \quad e(N, k)]^T$$

基于此,由系统(1)和假设 1 可以得到以下提升模型:

$$\bar{\mathbf{Y}}(k) = \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{U}}(k) \quad (4)$$

式中: $\bar{\mathbf{G}} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 为输入输出关系矩阵,表示为

$$\bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}(N-1)\mathbf{B}(N-2) & 0 \\ \mathbf{C}(N)\mathbf{A}(N-1)\mathbf{B}(N-2) & \mathbf{C}(N)\mathbf{B}(N-1) \end{bmatrix} \quad (5)$$

代的输入、输出、期望输出和系统跟踪误差向量分别表示为:

$$\mathbf{U}(k) = [u(\sigma_k, k) \quad u(\sigma_k + 1, k) \quad \cdots \quad u(N-1, k)]^T$$

$$\mathbf{Y}(k) = [y(\sigma_k + 1, k) \quad y(\sigma_k + 2, k) \quad \cdots \quad y(N, k)]^T$$

$$\mathbf{Y}_d(k) = [y_d(\sigma_k + 1) \quad y_d(\sigma_k + 2) \quad \cdots \quad y_d(N)]^T$$

$$\mathbf{E}(k) = [e(\sigma_k + 1, k) \quad e(\sigma_k + 2, k) \quad \cdots \quad e(N, k)]^T$$

其初值为 $\mathbf{U}(0) = \bar{\mathbf{U}}(0), \mathbf{Y}(0) = \bar{\mathbf{Y}}(0), \mathbf{Y}_d(0) = \bar{\mathbf{Y}}_d(0), \mathbf{E}(0) = \bar{\mathbf{E}}(0)$.

由迭代截止条件(3)可得,第 $k+1$ 次迭代的起始点为

$$\sigma_{k+1} = \min(t_k \mid |e(t_k, k)| > \epsilon), \sigma_k \leq t_k \leq N-1 \quad (6)$$

则第 $k+1$ 次迭代的时间区间长度为 $Z_{k+1} = N - \sigma_{k+1}$.定义提取矩阵 $\Upsilon_{k+1} \in \mathbf{R}^{(N-Z_{k+1}) \times N}$ 和 $\Phi_{k+1} \in \mathbf{R}^{Z_{k+1} \times Z_k}$, $(\cdot)_{m, n}$ 表示提取矩阵中第 m 行 n 列的元素,其表达式为

$$\begin{aligned} (\Upsilon_{k+1})_{m,n} &= \begin{cases} 1, & \text{if } n = m \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ (\Phi_{k+1})_{m,n} &= \begin{cases} 1, & \text{if } n = m + (Z_k - Z_{k+1}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

注2: 本文中定义的提取矩阵与文献[23-25]中的定义存在显著差异. 先前文献中的提取矩阵主要用于识别点对点 ILC 的关键要素, 并且该矩阵在整个过程中仅应用一次. 相比之下, 本文提出的提取矩阵则是在每次迭代过程中动态更新的. 通过每一次迭代后过滤掉冗余信息, 该矩阵不仅实现了模型维度的有效降低, 还确保了随着迭代次数的增加, 模型能够持续精炼和优化.

定义 $\mathbf{O}_{m \times n}$ 为 $m \times n$ 的零矩阵, 由式(5)可知, \mathbf{G} 是下三角矩阵, 因此对任意 k 可将 \mathbf{G} 分割为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11,k} & \mathbf{O}_{(N-Z_k) \times Z_k} \\ \mathbf{G}_{21,k} & \mathbf{G}_{22,k} \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中: $\mathbf{G}_{11,k} \in \mathbf{R}^{(N-Z_k) \times (N-Z_k)}$, $\mathbf{G}_{21,k} \in \mathbf{R}^{Z_k \times (N-Z_k)}$, $\mathbf{G}_{22,k} \in \mathbf{R}^{Z_k \times Z_k}$. 定义第 k 次迭代的输入输出关系矩阵

$$\mathbf{G}_k = [\mathbf{G}_{21,k} \quad \mathbf{G}_{22,k}] \in \mathbf{R}^{Z_k \times N} \quad (8)$$

初值为 $\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}$. 则第 $k+1$ 次迭代的输入输出关系矩阵为

$$\mathbf{G}_{k+1} = \Phi_{k+1} \mathbf{G}_k = [\mathbf{G}_{21,k+1} \quad \mathbf{G}_{22,k+1}] \in \mathbf{R}^{Z_{k+1} \times N} \quad (9)$$

由式(9)可以看出提取矩阵只能对输入输出关系矩阵的行数进行减少, 列数不受影响, 但是 $\mathbf{U}(k+1) \in \mathbf{R}^{Z_{k+1}}$ 的行数却随着迭代不断减少, 因此 \mathbf{G}_{k+1} 和 $\mathbf{U}(k+1)$ 不可以直接相乘. 为了解决这个问题, 将 $\bar{\mathbf{U}}(k+1)$ 向量分为两个部分: 上面长度为 $N - Z_{k+1}$ 的部分, 取前一次迭代 $u(t, k)$; 下面长度为 Z_{k+1} 的部分, 取更新的 $u(t, k+1)$, 即

$$\bar{\mathbf{U}}(k+1) = \begin{bmatrix} \Upsilon_{k+1} \bar{\mathbf{U}}(k) \\ \mathbf{U}(k+1) \end{bmatrix} \quad (10)$$

则由式(4)和(10)可得 $\mathbf{Y}(k+1)$ 与 $\bar{\mathbf{U}}(k+1)$ 的关系为

$$\mathbf{Y}(k+1) = \mathbf{G}_{k+1} \bar{\mathbf{U}}(k+1) \quad (11)$$

综上, 本文设计的 AILC 算法如下:

$$u(t, k+1)$$

$$= \begin{cases} u(t, k), & t < \sigma_{k+1} \\ u(t, k) + \beta_{k+1} e(t+1, k), & \sigma_{k+1} \leq t \leq N-1 \end{cases} \quad (12)$$

式中: β_{k+1} 是待设计的参数. 式(12)对应的向量关系为

$$\mathbf{U}(k+1) = \Phi_{k+1} \mathbf{U}(k) + \beta_{k+1} \Phi_{k+1} \mathbf{E}(k) \quad (13)$$

将式(13)代入式(10)中, 结合式(2)和(11)可得 $\mathbf{E}(k+1)$ 与 $\mathbf{E}(k)$ 的关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(k+1) &= \left(\Phi_{k+1} - \beta_{k+1} \mathbf{G}_{k+1} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{(N-Z_{k+1}) \times Z_k} \\ \Phi_{k+1} \end{bmatrix} \right) \mathbf{E}(k) \quad (14) \end{aligned}$$

由此, 我们将 AILC 算法的设计问题转化成了未知参数 β_{k+1} 的求解问题, 即找到适合的 β_{k+1} , 使得 $\mathbf{E}(k)$ 收敛到给定的误差精度范围内. 为了求解 β_{k+1} , 我们又将其转化为以下优化问题

$$\begin{aligned} J_{k+1}(\beta_{k+1}) &= \|\mathbf{E}(k+1)\|^2 + \omega \beta_{k+1}^2, \\ \beta_{k+1} &= \operatorname{argmin}(J_{k+1}) \quad (15) \end{aligned}$$

式中: $\omega > 0$. 对式(15)求偏导, 令 $\partial J_{k+1} / \partial \beta_{k+1} = 0$, 可以得到参数最优解

$$\beta_{k+1}^* = \frac{\langle \Phi_{k+1} \mathbf{E}(k), \mathbf{G}_{k+1} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{(N-Z_{k+1}) \times Z_k} \\ \Phi_{k+1} \end{bmatrix} \mathbf{E}(k) \rangle}{\omega + \left\| \mathbf{G}_{k+1} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{(N-Z_{k+1}) \times Z_k} \\ \Phi_{k+1} \end{bmatrix} \mathbf{E}(k) \right\|^2} \quad (16)$$

式中: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$, $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$. 基于 AILC 算法(12)可以得到以下的参数优化 AILC 算法

$$\begin{aligned} u(t, k+1) &= \begin{cases} u(t, k), & t < \sigma_{k+1} \\ u(t, k) + \beta_{k+1}^* e(t+1, k), & \sigma_{k+1} \leq t \leq N-1 \end{cases} \quad (17) \end{aligned}$$

3 加速迭代学习控制算法流程及收敛性分析

参数优化 AILC 算法(17)应用于系统(1)的具体流程如图1.

定理1: 参数优化 AILC 算法(17), 使得 $\|\mathbf{E}(k)\|^2$ 满足单调性条件, 即 $\|\mathbf{E}(k+1)\|^2 \leq \|\Phi_{k+1} \mathbf{E}(k)\|^2$, 等号成立当且仅当 $\beta_{k+1} = 0$.

证明: 令 $\beta_{k+1} = 0$, 代入式(14)和式(15)可得

$$J_{k+1}(0) = \|\Phi_{k+1} \mathbf{E}(k)\|^2 \quad (18)$$

令 $\beta_{k+1} = \beta_{k+1}^*$, 代入式(15)可得

$$\begin{aligned} J_{k+1}(\beta_{k+1}^*) &= \|\mathbf{E}(k+1)\|^2 + \omega \beta_{k+1}^{*2} \geq \|\mathbf{E}(k+1)\|^2 \quad (19) \end{aligned}$$

由于 β_{k+1}^* 为最优值, 因此 $J_{k+1}(0) \geq$

$J_{k+1}(\beta_{k+1}^*)$. 结合式(18)和(19)可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}(k+1)\|^2 &\leq J_{k+1}(\beta_{k+1}^*) \leq J_{k+1}(0) \\ &= \|\Phi_{k+1}\mathbf{E}(k)\|^2 \end{aligned} \quad (20)$$

当且仅当 $\beta_{k+1} = 0$ 时等号成立.

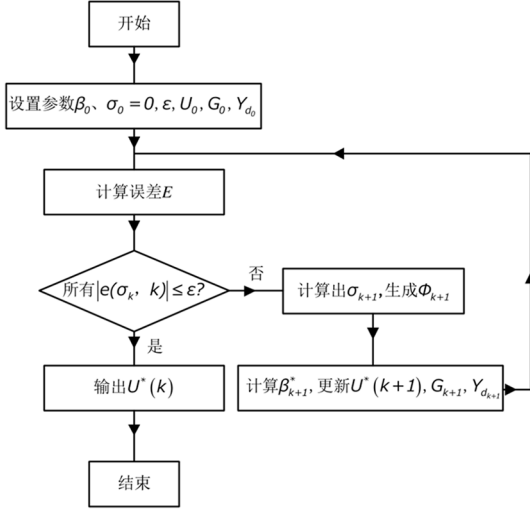


图1 AILC算法流程图

Fig.1 Flow chart of the AILC algorithm

定理 2: 参数序列 $\{\beta_{k+1}^*\}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{k+1}^* = 0$.

证明: 由式(20)可得 $\|\mathbf{E}(k+1)\|^2 + \omega\beta_{k+1}^{*2} \leq \|\Phi_{k+1}\mathbf{E}(k)\|^2$, 即

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}(k+1)\|^2 &\leq \|\Phi_{k+1}\mathbf{E}(k)\|^2 - \omega\beta_{k+1}^{*2} \\ &\leq \|\mathbf{E}(k)\|^2 - \omega\beta_{k+1}^{*2} \leq \|\mathbf{E}(0)\|^2 - \omega \sum_{j=0}^k \beta_{j+1}^{*2} \end{aligned} \quad (21)$$

由定理 1 可知 $\|\mathbf{E}(k)\|^2$ 满足单调性条件, 因此 $\|\mathbf{E}(\infty)\|^2$ 有界. 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 由(21)可得,

$$\begin{aligned} \omega \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{j+1}^{*2} &\leq \|\mathbf{E}(0)\|^2 - \|\mathbf{E}(\infty)\|^2 < \infty, \text{ 即} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{k+1}^* &= 0. \end{aligned}$$

定理 3: 将基于模型降维的参数优化 AILC 算法(17)应用到系统(1)中(具体流程如图 1), 若矩阵 \mathbf{G} 满足 $\mathbf{G} + \mathbf{G}^T > \mathbf{0}$, 则系统跟踪误差 $e(k, t)$ 随着迭代次数 k 的增加而收敛, 直至达到迭代截止条件(3), 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} |e(k, t)| \leq \epsilon$, 且对任意 $\epsilon \geq 0$ 都成立.

证明: 由式(7)可知 \mathbf{G} 可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11,k+1} & \mathbf{O}_{(N-Z_{k+1}) \times Z_k} \\ \mathbf{G}_{21,k+1} & \mathbf{G}_{22,k+1} \end{bmatrix}, \text{ 则} \\ \mathbf{G} + \mathbf{G}^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11,k+1} + \mathbf{G}_{11,k+1}^T & \mathbf{G}_{21,k+1}^T \\ \mathbf{G}_{21,k+1} & \mathbf{G}_{22,k+1} + \mathbf{G}_{22,k+1}^T \end{bmatrix} > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (22)$$

基于假设 2 和 Shur 补引理, 由式(22)可得 $\mathbf{G}_{22,k+1} + \mathbf{G}_{22,k+1}^T > \mathbf{0}$, 因此, 必然存在一个常数 $\sigma_1^2 > 0$, 使得

$$\mathbf{G}_{22,k+1} + \mathbf{G}_{22,k+1}^T \geq \sigma_1^2 \mathbf{I} \quad (23)$$

由定理 1 和式(8)可知, 必然存在一个常数 $\sigma_2^2 > 0$, 使得

$$\begin{aligned} &\left\| \mathbf{G}_{k+1} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{(N-Z_{k+1}) \times Z_k} \\ \Phi_{k+1} \end{bmatrix} \mathbf{E}(k) \right\|^2 \\ &= \|\mathbf{G}_{22,k+1} \Phi_{k+1} \mathbf{E}(k)\|^2 \leq \|\mathbf{G} \mathbf{E}(0)\|^2 \leq \sigma_2^2 \end{aligned} \quad (24)$$

综上, 将式(23)和(24)代入式(16)中可得

$$\begin{aligned} \beta_{k+1}^* &= \frac{1}{2} \frac{[\Phi_{k+1} \mathbf{E}(k)]^T (\mathbf{G}_{22,k+1} + \mathbf{G}_{22,k+1}^T) \Phi_{k+1} \mathbf{E}(k)}{\omega + \|\mathbf{G}_{22,k+1} \Phi_{k+1} \mathbf{E}(k)\|^2} \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2}{\omega + \sigma_2^2} \|\Phi_{k+1} \mathbf{E}(k)\|^2 \end{aligned} \quad (25)$$

由定理 2 中 $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{k+1}^* = 0$ 可得 $\|\Phi_{k+1} \mathbf{E}(k)\|^2$ 可以收敛到零, 即 $e(k, t)$ 可以收敛到零. 结合实际运行中考虑的迭代截止条件, 可得 $\lim_{k \rightarrow \infty} |e(k, t)| \leq \epsilon$, 且对任意 $\epsilon \geq 0$ 都成立.

4 数值仿真

令系统(1)中各参数值分别为 $\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0.00065 & -1.66 \\ 0.07 + 0.001t & 0.098 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0.08 + 0.001t \\ 0.0044 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C}(t) = [2.1 \ 1.8]$, $N = 20$. 期望跟踪轨迹为 $y_d(t) = 0.1 \sin(0.7t) e^{0.23t}$.

4.1 $\epsilon = 0.1$ 时, AILC 和固定增益 ILC 的比较

令 $\epsilon = 0.1$, 取固定增益 $\beta = 0.4$, 图 2 表示 $k = 5$ 和 $k = 18$ 时, 系统输出跟踪期望轨迹的过程, 第 18 次迭代后每点的跟踪误差都小于 0.1, 达到跟踪目的. 取固定增益 $\beta = 3.0$, 图 3 表示 $k = 3$ 和 $k = 17$ 时, 系统输出跟踪期望轨迹的过程, 第 17 次迭代后每点的跟踪误差都小于 0.1, 达到跟踪目的.

采用参数优化 AILC 算法(17), 增益由(16)算出. 图 4~6 分别表示, $k = 2$ 、 $k = 5$ 和 $k = 9$ 时, 系统输出跟踪期望轨迹的过程. 可以看出, 随着迭代次数的增加, 运行的时间区间在不断减小. 第 12 次迭代后每点的跟踪误差都小于 0.1, 达到跟踪目的, 不再进行新的迭代.

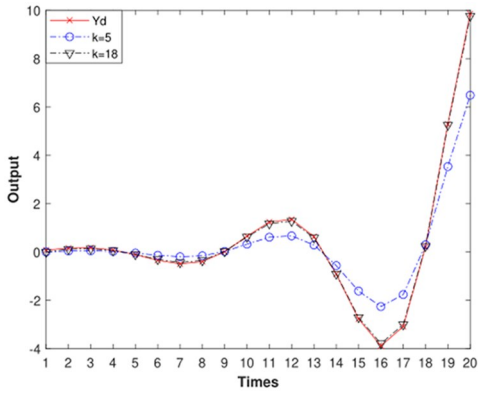


图 2 固定增益 $\beta=0.4$ 时 ILC 的跟踪效果
Fig. 2 Tracking performance of the fixed gain ILC at $\beta=0.4$

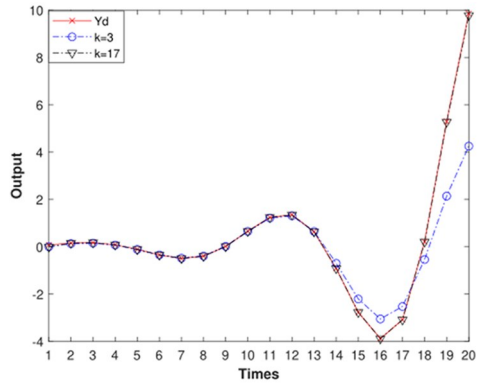


图 3 固定增益 $\beta=3$ 时 ILC 的跟踪效果
Fig. 3 Tracking performance of the fixed gain ILC at $\beta=3.0$

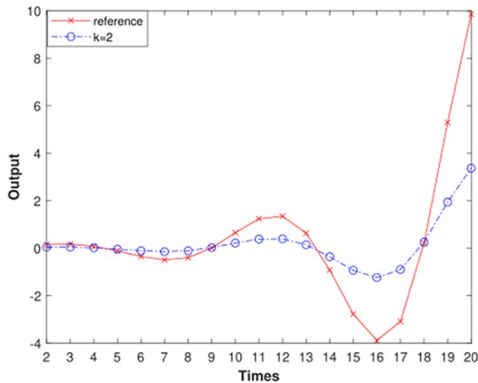


图 4 $\epsilon=0.1$ 且 $k=2$ 时参数优化 AILC 的跟踪效果
Fig. 4 Tracking performance of the parameter-optimal AILC at $k=2$ and $\epsilon=0.1$

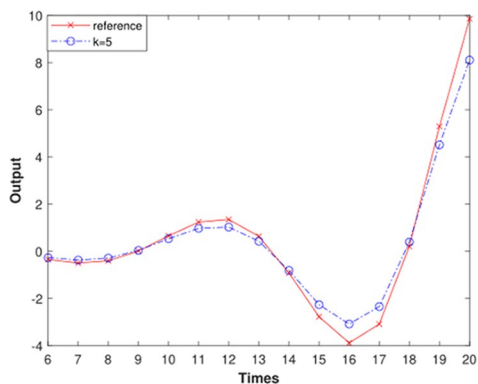


图 5 $\epsilon=0.1$ 且 $k=5$ 时参数优化 AILC 的跟踪效果
Fig. 5 Tracking performance of the parameter-optimal AILC at $k=5$ and $\epsilon=0.1$

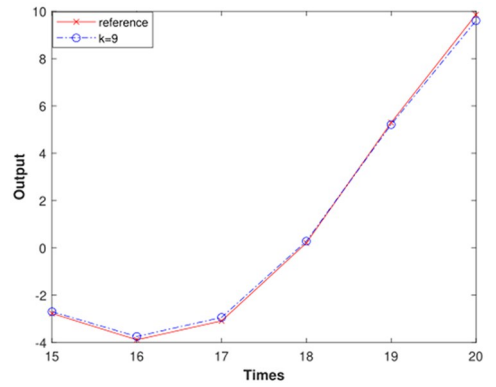


图 6 $\epsilon=0.1$ 且 $k=9$ 时参数优化 AILC 的跟踪效果
Fig. 6 Tracking performance of the parameter-optimal AILC at $\epsilon=0.1$ and $k=9$

表 1 $\epsilon=0.1$ 时 AILC 和固定增益 ILC 的比较
Table 1 Comparison of AILC with fixed gain ILC when $\epsilon=0.1$

Algorithm	β	k	Total iteration time	Changes in the dimensions of input and output matrices
ILC	0.4	18	360	20
ILC	3.0	17	340	20
AILC		12	138	20→19→15→14→10→6→5→4→1

4.2 $\epsilon=0.01$ 时, AILC 和固定增益 ILC 的比较

当 $\epsilon=0.01$ 时,采用参数优化 AILC 算法(17),图 7~9 分别表示系统在第 5 次、第 13 次和第 22 次迭代下系统输出跟踪期望轨迹的过程.由图可以看出,随着迭代次数的增加,运行的时间区间在不断减小.第 53 次迭代后每点的跟踪误差都小于 0.01,达到跟踪目的,不再进行新的迭代.表 2 展示了 $\epsilon=0.01$ 时 AILC 和固定增益 ILC 各个指标的比较.

表 2 $\epsilon=0.01$ 时 AILC 和固定增益 ILC 的比较
Table 2 Comparison of AILC with fixed gain ILC when $\epsilon=0.01$

Algorithm	β	k	Total iteration time	Changes in the dimensions of input and output matrices
ILC	0.4	34	680	20
ILC	3.0	24	480	20
AILC		53	414	20→19→18→14→10→9→5→4→1

由以上实验可知,基于模型降维的参数优化 AILC 算法与固定增益 ILC 相比,在 ϵ 取的值较大时,不但能减少迭代的次数,还能不断降低模型维度和运行的时间区间;当 ϵ 取较小的值时,虽然会增加迭代次数,但依然能有效减少迭代运行的总时

间,实现更精细的优化结果.这一发现为模型降维的参数优化 AILC 算法的调参提供了重要参考,使得我们可以根据具体需求在速度和精度之间找到平衡点,从而更有效地解决实际问题.

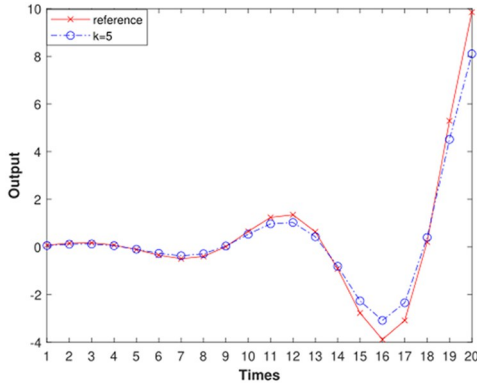


图7 $\epsilon=0.01$ 且 $k=5$ 时参数优化 AILC 的跟踪效果
Fig. 7 Tracking performance of the parameter-optimal AILC at $k=5$ and $\epsilon=0.01$

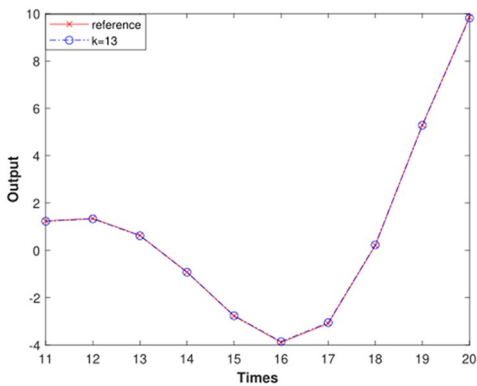


图8 $\epsilon=0.01, k=13$ 时参数优化 AILC 的跟踪效果
Fig. 8 Tracking performance of the parameter-optimal AILC at $k=13$ and $\epsilon=0.01$

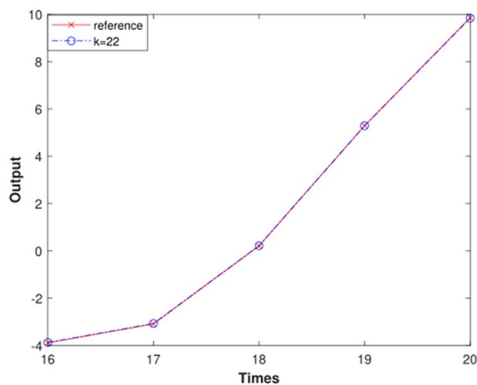


图9 $\epsilon=0.01, k=22$ 参数优化加速算法的跟踪效果
Fig. 9 Tracking performance of the parameter-optimal AILC at $k=22$ and $\epsilon=0.01$

5 结论

本文针对离散线性时变系统,设计了一种模型降维的参数优化 AILC 算法.该算法通过随迭代变化的提取矩阵逐渐降低了模型的维度,同时利用参

数优化的方法实时修正控制器增益.随着迭代次数的增加,需要修正的轨迹逐渐缩短,从而通过减少冗余信息和逐渐缩短跟踪轨迹长度的方法加快了 ILC 的速度.

参考文献

- [1] 张艺镗, 张涛, 李勇, 等. 基于变论域模糊迭代学习的直线电机位置控制[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(12): 45-53.
ZHANG Y Q, ZHANG T, LI Y, et al. Position control of PMLSM based on variable universe fuzzy iterative learning [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(12): 45-53. (in Chinese)
- [2] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robots by learning [J]. Journal of Robotic Systems, 1984, 1(2): 123-140.
- [3] CHU B, FREEMAN C T, OWENS D H. A novel design framework for point-to-point ILC using successive projection [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2015, 23(3): 1156-1163.
- [4] STRIJBOCH N, OOMEN T. Iterative learning control for intermittently sampled data: Monotonic convergence, design, and applications [J]. Automatica, 2022, 139: 110171.
- [5] CHEN Y Y, CHU B, FREEMAN C T. Iterative learning control for robotic path following with trial-varying motion profiles [J]. IEEE Transactions on Mechatronics, 2022, 27(6): 4697-4706.
- [6] YAN L L, BANKA N, OWAN P, et al. MIMO ILC using complex-kernel regression and application to Precision SEA robots [J]. Automatica, 2021, 127: 109550.
- [7] SAAB S S, SHEN D, ORABI M, et al. Iterative learning control: practical implementation and automation [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2022, 69(2): 1858-1866.
- [8] ZHANG T, JIAO X H, ZHANG Y H. Internal-model-principle-based fast adaptive iterative learning trajectory tracking control for autonomous farming vehicle under alignment condition and input constraint [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2023, 53(6): 3588-3599.
- [9] 吴东南, 程勉, 高为炳. 多步控制修正下的学习控

- 制[J]. 自动化学报, 1989, 15(5): 445—449.
- WU D N, CHENG M, GAO W B. Learning control under multistep modification law [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1989, 15(5): 445—449. (in Chinese)
- [10] LAN T Y, YAN F, LIN H. Iterative learning control with forgetting factor for urban road network [J]. *Journal of Control Science and Engineering*, 2017, 2017(1): 9269187.
- [11] ZHANG Y J, LI Y H, CHEN M J. Iterative learning control for linear generalized distributed parameter system [J]. *Neural Computing and Applications*, 2019, 31(9): 4503—4512.
- [12] 徐建明, 王耀东, 孙明轩. 基于初次控制信号提取的迭代学习控制方法[J]. 自动化学报, 2020, 46(2): 294—306.
- XU J M, WANG Y D, SUN M X. Iterative learning control based on extracting initial iterative control signals [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(2): 294—306. (in Chinese)
- [13] AMANN N, OWENS D H, ROGERS E. Iterative learning control for discrete-time systems with exponential rate of convergence [J]. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers-Control Theory and Applications*, 1996, 143(2): 217—224.
- [14] OWENS D H, FENG K. Parameter optimization in iterative learning control [J]. *International Journal of Control*, 2003, 76(11): 1059—1069.
- [15] HÄTÖNEN J, OWENS D H, FENG K. Basis functions and parameter optimisation in high-order iterative learning control [J]. *Automatica*, 2006, 42(2): 287—294.
- [16] 逢勃, 邵诚. 基于奇异值分解的PID型参数优化迭代学习控制算法[J]. 信息与控制, 2014, 43(4): 483—489.
- PANG B, SHAO C. PID-type parameter optimal iterative learning control algorithm based on singular value decomposition [J]. *Information and Control*, 2014, 43(4): 483—489. (in Chinese)
- [17] XU J X, TAN Y. Robust optimal design and convergence properties analysis of iterative learning control approaches [J]. *Automatica*, 2002, 38(11): 1867—1880.
- [18] SHEN D, LI X F. Iterative learning control for systems with iteration-varying trial lengths: synthesis and analysis [M]. Singapore: Springer Singapore, 2019.
- [19] ZHUANG Z H, TAO H F, CHEN Y Y, et al. An optimal iterative learning control approach for linear systems with nonuniform trial lengths under input constraints [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2023, 53(6): 3461—3473.
- [20] 兰天一, 林辉. 区间可调节的变增益加速迭代学习控制[J]. 系统工程与电子技术, 2017, 39(4): 883—887.
- LAN T Y, LIN H. Accelerated iterative learning control algorithm with variable gain and adjustment of learning interval [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2017, 39(4): 883—887. (in Chinese)
- [21] 兰天一, 林辉. Lebesgue-p范数意义下区间可调节的变增益加速迭代学习控制[J]. 控制与决策, 2017, 32(11): 2071—2075.
- LAN T Y, LIN H. Accelerated iterative learning control algorithm with variable gain and adjustment of interval in sense of Lebesgue-p norm [J]. *Control and Decision*, 2017, 32(11): 2071—2075. (in Chinese)
- [22] 池荣虎, 侯忠生, 黄彪. 间歇过程最优迭代学习控制的发展: 从基于模型到数据驱动[J]. 自动化学报, 2017, 43(6): 917—932.
- CHI R H, HOU Z S, HUANG B. Optimal iterative learning control of batch processes: from model-based to data-driven [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(6): 917—932. (in Chinese)
- [23] FREEMAN C T, TAN Y. Iterative learning control with mixed constraints for point-to-point tracking [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2013, 21(3): 604—616.
- [24] XU Y, SHEN D, ZHANG X D. Stochastic point-to-point iterative learning control based on stochastic approximation [J]. *Asian Journal of Control*, 2017, 19(5): 1748—1755.
- [25] ZHAO X D, WANG Y Q. Improved point-to-point iterative learning control for batch processes with unknown batch-varying initial state [J]. *ISA Transactions*, 2022, 125: 290—299.