第 24 卷第 2 期
2026 年 2 月

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 24 No. 2
Feb. 2026

文章编号:1672-6553-2026-24(2)-054-013

DOI:10.6052/1672-6553-2025-091

PVC 凝胶圆柱壳的非线性动力学及振动规律*

李超群[1] 魏杰[1] 罗斌[1,2†] 朱科军[1]

(1. 邵阳学院 机械与能源工程学院,邵阳 422000)

(2. 西安交通大学 复杂服役环境重大装备结构强度与寿命全国重点实验室,西安 710049)

摘要 研究了多个机电参数下 PVC 凝胶圆柱壳的非线性动力学行为. 首先基于 Gent 超弹性材料模型,理论推导圆柱壳结构的非线性振动方程,然后分别讨论圆柱壳在静态和动态电压下的响应和稳定性问题. 静态电压研究表明:圆柱壳因电场正反馈效应存在临界电压阈值,超过该值将引发失稳破坏,且临界电压受厚度和边界条件显著影响. 动态正弦电压研究表明,系统呈现复杂非线性振动特性:通过时域响应、相位轨迹、Poincaré 截面、分岔特性和 Lyapunov 指数分析,证实存在周期性振动及分岔行为;数值仿真显示振幅随激励频率变化时发生多频共振,共振诱发振幅跳跃并导致结构破坏;结合同频非线性验证与相图分析,发现特定参数下振动状态具有规律一致性,证明振动响应可通过电压参数调控实现可控性.

关键词 PVC 凝胶圆柱壳, 静动态电压, 临界电压, 非线性振动

中图分类号:O322;TB381;TM215 **文献标志码**:A

Nonlinear Dynamics and Vibration Characteristics of PVC Gel Cylindrical Shell*

Li Chaoqun[1] Wei Jie[1] Luo Bin[1,2†] Zhu Kejun[1]

(1. College of Mechanical and Energy Engineering, Shaoyang University, Shaoyang 422000, China)

(2. State Key Laboratory of Structural Strength and Life of Major Equipment under Complex Service Environments, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract This paper investigates the nonlinear dynamic behavior of PVC gel cylindrical shell under multiple electromechanical parameters. First, the nonlinear vibration equations of the cylindrical shell structure are theoretically derived based on the Gent hyperelastic material model, and the response and stability of the system under static and dynamic voltages are subsequently discussed. Studies on static voltage reveal that the cylindrical shell exhibits a critical voltage threshold because of the positive feedback effect of the electric field. Exceeding this threshold leads to instability and damage. And the critical voltage is greatly influenced by thickness and boundary conditions. When dynamic sinusoidal voltage is applied, the system shows complex nonlinear vibration characteristics. Through analyses of the time-domain responses, phase trajectories, Poincaré sections, bifurcation characteristics and Lyapunov exponents, the presence of periodic vibrations and bifurcation phenomena is confirmed. Numerical simulations show that multi-frequency resonance occurs when the excitation frequency changes. Such resonance induces amplitude jumps, which leads to structural damage. By combining nonlinear verification at the same frequency with phase diagram analysis, it is shown that the vibration state has regular consistency under specific parameters.

2025-10-21 收到第 1 稿,2025-11-11 收到修改稿.

* 湖南省教育厅重点课题资助项目(25A0555),湖南省自然科学基金项目(2024JJ7490),湖南省教育厅研究生创新项目(CX20251760);Key Project of Hunan Provincial Department of Education(25A0555), Hunan Provincial Natural Science Joint Fund Project(2024JJ7490), Hunan Provincial Postgraduate Research and Innovation Project(CX20251760).

† 通信作者 E-mail:lb19870911@126.com

This finding confirms that the vibration response can be controlled by adjusting voltage parameters.

Key words PVC gel cylindrical shell, static and dynamic voltage, critical voltage, nonlinear vibration

引言

PVC 凝胶作为电场驱动型材料,兼具大形变、快响应、轻量化和适中工作电压等优势,在软体机器人、航空航天及生物医疗等领域具有广阔的应用前景[1-5]. 其轻质柔韧的特性尤其契合软体机器人的需求,可替代刚性驱动器,通过电场控制实现仿生动作,为微型机器人和可穿戴设备提供高效的新型驱动方案[6-9]. 罗斌等[10,11]基于 PVC 凝胶驱动电压低、具有弯曲和拉压变形的双重能力的特点,研究了 PVC 凝胶打印工艺,并开发了驱动传感一体化的柔性抓手机器人. 在 PVC 凝胶的典型应用中,圆柱壳结构具有巨大的应用潜力,可用来能量回收、柔性驱动等. 因此,为推广 PVC 凝胶圆柱壳结构的应用,理论模型研究必不可少.

随着研究的深入,近年来也有一些研究集中在 PVC 凝胶及其致动器的理论变形建模上,相关研究随着认识深化而不断拓展. 盛俊杰等[12]研究了节电弹性体(DE)材料的非线性振动规律,为 DE 材料致动器在各种动态驱动器或传感器中的应用提供理论依据. 王成敏等[13]基于 Ogden 模型研究了不可压缩电活性聚合物圆柱壳在内表面周期载荷作用下的运动与破坏等动力响应问题. 曾修豪等[14]基于 Neo-Hookean 模型研究了黏弹性情形下电活性聚合物圆管圆柱壳的非线性动力学行为. 而 PVC 凝胶作为一种典型的电活性聚合物,其不可压缩性和均匀各向同性特性与许多电活性聚合物材料相似[15,16]. Asaka 等[17]基于 PVC 凝胶的电化学特性开发了机电模型,实现了对致动器在给定电压下弯曲位移的有效估计. 随后,该团队通过引入离子液体添加剂进一步优化致动器性能,并改进了模型以量化添加剂的作用[18],为后续多物理场耦合研究奠定了基础. 随着对材料认识的深化,研究者发现 PVC 凝胶的机电致动效果高度依赖于电压信号类型[19]:直流电压可诱导稳定变形并达到平衡状态,而交流电压则引发动态非线性振动[20,21]. 这种复杂行为源于 PVC 凝胶在多物理场耦合作用下的非线性动态响应[22]. 为解析其机理,Dong 等通过 Yeoh 模型对 PVC 凝胶力学性能进行了系统测试[23],而 Zhang 等[24]则结合 Maxwell 与 Kelvin-Voigt 模型构建黏弹性本构关系,成功捕捉了部分时间依赖性变形行为. 进一步研究表明,这种 PVC 材料的黏弹性特性可通过广义 Maxwell 模型[25,26]或标准线性固体 SLS 模型[27,28]进行表征. 在建模方法上,Frank 等[29]采用有限元法对网状电极的 PVC 凝胶致动器的变形进行数值模拟,Li 等[30]则基于热力学理论开发了预拉伸与电响应的预测模型. Du 等[31]进一步通过有限元仿真揭示了圆平面 PVC 凝胶致动器的共振频率与离面振动特性. 综上,PVC 凝胶致动器的理论建模研究已从单一的本构关系拓展到多场耦合仿真,为优化其驱动性能提供了重要的理论支撑.

现有的理论模型研究发现,尽管将介电弹性体相关理论迁移到 PVC 凝胶的研究有了一定成果,但是由于这两种材料的力学性能及介电性能的差别,其振动规律也有明显区别. 因此平面结构理论应用圆柱壳结构有一定局限性.

基于此,本文主要研究 PVC 凝胶圆柱壳的非线性动力学及振动规律,首先基于 Gent 超弹性本构理论构建材料模型,结合薄壁圆柱壳运动学力电耦合机制,建立非线性动力学控制方程;然后探究圆柱壳在静电场载荷作用下的结构稳定性问题,观察几何参数与边界约束条件对系统临界失稳行为的影响规律;接着通过数值方法求解电激励下的动态响应,分析时域响应、相位轨迹、Poincaré 截面、分岔特性和 Lyapunov 指数,验证激励频率接近特征频率时诱发的非线性现象;最后得出本文的结论.

1　问题模型的建立

针对一个初始内径为 A、外径为 B、轴向长度为 L 的不可压缩型 PVC 凝胶圆柱壳体(示意图如图 1 所示),假设其在初始时刻 $T=0$ 时,内壁受到随时间变化的瞬时内部压力为 P,同时壳体内外表面被施加电场作用. 变形后壳体的内径、外径及轴向

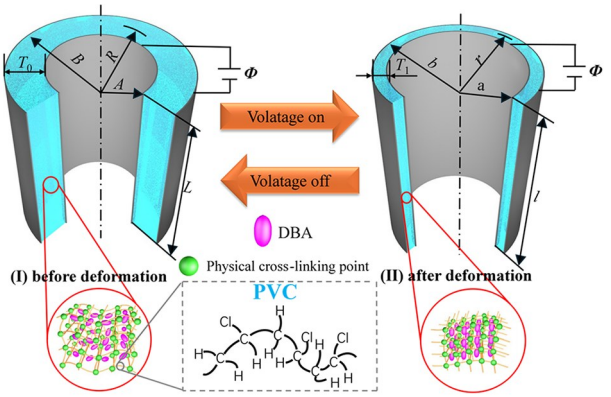


图 1 变形前和变形后的圆柱壳结构

Fig. 1 Cylindrical shell structure before and after deformation

长度分别变为 a、b 和 l. 选取材料坐标系 (R,Θ,Z) 描述初始状态，空间坐标系 (r,θ,z) 描述变形状态，则该圆柱壳的形变规律可表征为：

$$r=r(R),\ \theta=\Theta,\ z=\lambda_z Z,\ (A\leqslant R\leqslant B) \tag{1}$$

式中，$r(R)$ 为待求解的径向位移函数，$\lambda_z=l/L$ 为预设的轴向预应变约束，表征固定拉伸比例. 基于运动学假设，变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 可分解为主伸长分量的对角矩阵形式：

$$\boldsymbol{F}=\mathrm{diag}\left(\frac{\partial r}{\partial R},\ \frac{r}{R},\ \lambda_z\right)=\mathrm{diag}(\lambda_r,\ \lambda_\theta,\ \lambda_z) \tag{2}$$

其中主伸长率定义为：

$$\lambda_r=\frac{\partial r(R)}{\partial R},\ \lambda_\theta=\frac{r(R)}{R}=\frac{r}{R},\ \lambda_z=\frac{l}{L} \tag{3}$$

由超弹性材料不可压缩条件可知：

$$[r^2(R)-a^2]l=(R^2-A^2)L \tag{4}$$

可得：

$$r=r(R)=\left[\frac{L}{l}(R^2-A^2)+a^2\right]^{1/2} \tag{5}$$

将式(3)代入式(5)可得：

$$\lambda_r=\frac{\partial r(R)}{\partial R}=\frac{R}{r\lambda_z} \tag{6}$$

研究 PVC 凝胶力学特性是研究 PVC 凝胶力电耦合模型不可缺少的前提条件. 因此需要超弹性理论中的应变能函数表征 PVC 凝胶的变形时的应力—应变状态. 目前表征 PVC 凝胶应变能函数的模型可以根据是否基于高斯分布而分为两类. 基于高斯分布的模型中包括了 Neo-Hookean 模型、Yeoh 模型、Mooney-Rivlin 模型，Ogden 模型等，这些模型的共同点是认为超弹性材料在变形的过程中，其应变远远没有到达材料的拉伸强度极限，因此材料中高分子链之间的端距可以用高斯统计分布的方法得到. 基于非高斯分布的模型则认为超弹性材料的变形范围较大，完全可能接近材料的最大拉伸极限，所以用非高斯统计的方法进行研究[32]，如 Gent 模型等.

基于 Gent 模型，PVC 凝胶圆柱壳的应变能函数可表示为：

$$W=-\frac{\mu J_{\mathrm{m}}}{2}\ln\left(1-\frac{I_1-3}{J_{\mathrm{m}}}\right) \tag{7}$$

式中，μ 为剪切模量，J_{m} 为超弹性材料分子链的最大变形极限，$I_1=\lambda_r^2+\lambda_\theta^2+\lambda_z^2$ 为第一应变不变量.

对于各向同性超弹性材料，柯西应力张量表示为：

$$\tau_{rr}(r)=\frac{\mu\lambda_r^2}{1-(I_1-3)/J_{\mathrm{m}}}-p(r)+\frac{D_r^2}{2\varepsilon} \tag{8}$$

$$\tau_{\theta\theta}(r)=\frac{\mu\lambda_\theta^2}{1-(I_1-3)/J_{\mathrm{m}}}-p(r)-\frac{D_r^2}{2\varepsilon} \tag{9}$$

式中，$p(r)$ 为静压力，$D_r^2/2\varepsilon$ 为电场力，D_r 为真实电位移，ε 为材料的介电常数.

圆柱壳的力平衡方程为：

$$\frac{\mathrm{d}\tau_{rr}(r)}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{r}(\tau_{rr}-\tau_{\theta\theta})=\rho\ddot{r} \tag{10}$$

圆柱壳内壁瞬时内部压力 P 的边界条件为：

$$\tau_{rr}(a)=-P \tag{11}$$

$$\tau_{rr}(b)=0 \tag{12}$$

2 周期稳态响应

在稳态电压作用下，圆柱壳结构将处于力学平衡状态. 此时通过消除运动方程(10)中的瞬态响应项，可推导出该系统的静力学平衡方程：

$$\frac{\mathrm{d}\tau_{rr}(r)}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{r}(\tau_{rr}-\tau_{\theta\theta})=0 \tag{13}$$

将式(8)、式(9)代入式(13)，并且两边同时积分可得：

$$P+\int_a^b\frac{1}{r}\left[\frac{\mu\lambda_r^2-\mu\lambda_\theta^2}{1-(I_1-3)/J_{\mathrm{m}}}+\frac{D_r^2}{\varepsilon}\right]\mathrm{d}r=0 \tag{14}$$

圆柱壳在电压作用下伸长时，电容公式为：

$$C=\frac{Q}{\Phi}=\frac{2\pi\varepsilon L\lambda_z}{\ln(b/a)} \tag{15}$$

圆柱壳的真实电位移为：

$$D_r=\frac{Q}{2\pi rL\lambda_z} \tag{16}$$

将式(15)代入式(16)中得：

$$D_r=\frac{\Phi\varepsilon}{r\ln(b/a)} \tag{17}$$

将式(3)、式(6)、式(17)代入式(14)可得:

$$P+\int_a^b \frac{\mu}{r}\frac{1}{[1-(I_1-3)/J_m]}\left[\frac{R^2}{(r\lambda_z)^2}-\frac{r^2}{R^2}\right]+\Phi^2\varepsilon\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{-2}r^{-3}\mathrm{d}r=0 \tag{18}$$

对于橡胶态的高分子聚合物,其材料的变形很大,而体积的变化较小,基本可以认为是不可压缩的,因此认为 PVC 凝胶材料不可压缩[15],可以得到:

$$\lambda_r\lambda_\theta\lambda_z=1 \tag{19}$$

令:

$$\kappa=\kappa(R)=\frac{r(R)}{R}=\left(\frac{R^2-A^2}{\lambda_z R^2}+\frac{a^2}{R^2}\right)^{1/2} \tag{20}$$

则有:

$$\lambda_r=\lambda_z^{-1}\kappa^{-1},\ \lambda_\theta=\kappa,\ \frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{1}{1-\lambda_z\kappa^2}\frac{\mathrm{d}\kappa}{\kappa} \tag{21}$$

将式(21)代入(18),可得:

$$-\int_{\kappa(B)}^{\kappa(A)}\frac{\mu[(\lambda_z^{-2}\kappa^{-3}-\kappa)/(1-\lambda_z\kappa^2)]}{[1-(\lambda_z^{-2}\kappa^{-2}+\kappa^2+\lambda_z^2-3)/J_m]}\mathrm{d}\kappa+P+\frac{\Phi^2\varepsilon(b^2-a^2)}{2a^2b^2[\ln(b/a)]^2}=0 \tag{22}$$

得:

$$\begin{cases}\Phi^2=\dfrac{\gamma-P}{\varepsilon(b^2-a^2)/\{2a^2b^2[\ln(b/a)]^2\}}\\ \gamma=\displaystyle\int_{\kappa(B)}^{\kappa(A)}\frac{\mu[(\lambda_z^{-2}\kappa^{-3}-\kappa)/(1-\lambda_z\kappa^2)]}{[1-(\lambda_z^{-2}\kappa^{-2}+\kappa^2+\lambda_z^2-3)/J_m]}\mathrm{d}\kappa\end{cases} \tag{23}$$

令:

$$\frac{a}{A}=x,\ \Delta=\frac{B^2}{A^2}-1 \tag{24}$$

则有:

$$\begin{cases}\dfrac{b^2}{A^2}=x^2+\dfrac{\Delta}{\lambda_z}\\ \dfrac{b^2}{B^2}=\dfrac{x^2+\lambda_z^{-1}\Delta}{\Delta+1}\\ \dfrac{b^2}{a^2}=1+\dfrac{\Delta}{x^2\lambda_z}\end{cases} \tag{25}$$

将式(24)、式(25)代入式(23),可得:

$$\Phi^2=\frac{\gamma-P}{\eta} \tag{26}$$

其中 η 为:

$$\eta=\frac{\varepsilon\Delta}{2A^2x^2(\lambda_z x^2+\Delta)\{\ln[1+\Delta/(x^2\lambda_z)]^{1/2}\}^2} \tag{27}$$

且 $\kappa(A)$ 与 $\kappa(B)$ 的积分上下限分别为:

$$\kappa(A)=\frac{a}{A}=x,\ \kappa(B)=\frac{b}{B}=\left(\frac{x^2+\lambda_z^{-1}\Delta}{\Delta+1}\right)^{1/2} \tag{28}$$

对式(26)进行数值积分,研究不同预拉伸比、不同压力和不同厚度时,PVC 凝胶圆柱壳的电压随变形演化的关系曲线. 模拟计算所需参数值设置为:$\varepsilon=2.83\times10^{-11}$ F/m,$A=0.01$ m,$\mu=1$ MPa,$J_m=100$.

当边界条件 $\lambda_z=1.2$,$P=0$ 时,图 2 表示的是不同厚度的 PVC 凝胶圆柱壳的电压随变形演化的关系曲线. 结果表明,圆柱壳的变形量随外加电压的增大而单调增加;当施加电压逼近该渐近值时,变形急剧增大,此渐近电压表征了结构发生电致失稳破坏的临界状态,故定义为临界电压. 对比不同厚度的曲线可知,临界电压值具有显著的变形依赖性,即圆柱壳的厚度越大,其对应的临界电压越高. 该结果清晰地揭示了 PVC 凝胶圆柱壳机电失稳的临界电压阈值及其对壳体不同厚度的高度依赖性.

当边界条件 $\Delta=1$,$P=0$ 时,图 3 表示的是不同预拉伸比的 PVC 凝胶圆柱壳的电压随变形演化的

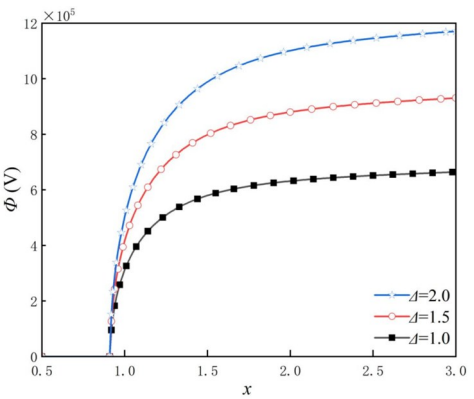


图 2　不同厚度圆柱壳电压随变形的变化曲线

Fig. 2　The curve of voltage versus deformation for cylindrical shell with different thicknesses

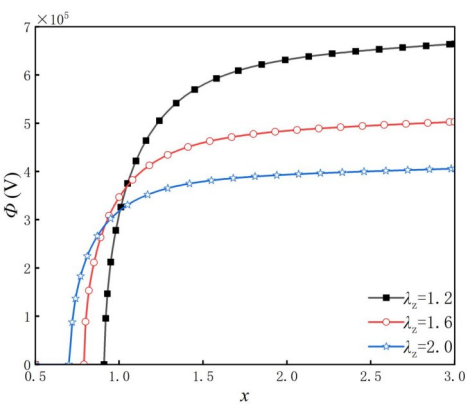


图 3　不同预拉伸比圆柱壳电压随变形的变化曲线

Fig. 3　The curve of voltage versus deformation for cylindrical shell with different pre-stretch ratios

关系曲线. 结果表明,由于圆柱壳在初始状态下已受到预拉伸作用,电压输出并未从零开始,而是呈现一定的初始值. 这一现象源于预应变的引入,使得圆柱壳内部在未变形时即存在残余极化和应力分布,从而影响了初始电学性能. 研究进一步揭示了预拉伸比对 PVC 凝胶圆柱壳机电耦合行为的调控作用,从而影响了初始电学性能. 固定 λ_z 不仅决定了电压的初始状态,还显著影响后续变形过程中的电压响应趋势.

当边界条件 $\Delta=1,\lambda_z=1$ 时,图 4 表示的是不同边界条件 P 的 PVC 凝胶圆柱壳的电压随变形演化的关系曲线. 结果表明,边界条件的差异会显著改变圆柱壳在零电压状态下的初始变形特性,其根本原因在于不同边界条件等效于在结构内外表面引入了不同分布的预应力场. 从力学机制角度分析,边界条件的本质作用在于通过调控预应力分布来改变结构的初始平衡状态. 当边界条件为负值时,内表面预应力大于外表面预应力,导致圆柱壳在零电压条件下呈现向内收缩的变形特征;在中性边界条件下,内外表面预应力达到平衡,结构保持初始几何形态不变;而当边界条件为正值时,外表面预应力大于内表面预应力,使得圆柱壳在零电压状态下产生向外扩张的变形趋势. 这一力学响应规律在图 4 的实验结果中得到了直观体现,不同边界条件 P 对应的零电压变形状态呈现出明显的差异性特征.

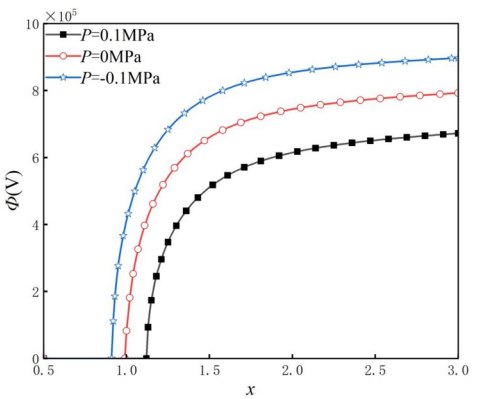


图 4 不同边界条件 P 圆柱壳电压随变形的变化曲线

Fig. 4 The curve of voltage versus deformation for cylindrical shell with different boundary P

3 周期动态响应

3.1 数学模型推导

由式(5)可得:

$$\ddot{r}=\frac{1}{r}\left[\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\dot{a}^2+a\ddot{a}\right] \tag{29}$$

将式(8)、式(9)和式(29)代入式(10),两边同时积分可得:

$$P+\int_a^b\frac{1}{r}\left[\frac{\mu\lambda_r^2-\mu\lambda_\theta^2}{1-(I_1-3)/J_m}+\frac{D_r^2}{\varepsilon}\right]\mathrm{d}r$$
$$=\int_a^b\frac{\rho}{r}\left[\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\dot{a}^2+a\ddot{a}\right]\mathrm{d}r \tag{30}$$

由式(17)、式(21)、式(20)和式(30)推导出:

$$P+H+\frac{\Phi^2\varepsilon(b^2-a^2)}{2a^2b^2[\ln(b/a)]^2}$$
$$=\rho\dot{a}^2\left[(\ln b-\ln a)+\frac{1}{2}a^2(b^{-2}-a^{-2})\right]+$$
$$\rho a\ddot{a}(\ln b-\ln a) \tag{31}$$

其中 H 为:

$$H=-\gamma \tag{32}$$

由式(28)和式(32)推导出:

$$H=\mu J_m\left[\frac{1}{2}\ln|\kappa|-\frac{1}{4}\ln|\kappa^2-C\kappa+\lambda_z^{-2}|+\right.$$
$$\left.\frac{(2+\lambda_z C)}{4\lambda_z D}\ln\left|\frac{\kappa-G_+}{\kappa-G_-}\right|\right]_{\kappa(B)^2}^{\kappa(A)^2} \tag{33}$$

式(33)中,$C=J_m-\lambda_z^2+3$,$D=\sqrt{C^2-4\lambda_z^{-2}}$,$G_\pm=(C\pm D)/2$.

将式(24)、式(25)代入式(31)可得:

$$\frac{\varepsilon\Delta\Phi^2}{2A^2x^2(\lambda_z x^2+\Delta)\{\ln[1+\Delta/(\lambda_z x^2)]^{1/2}\}^2}$$
$$=\rho A^2\dot{x}^2\left\{\frac{-\Delta}{2(\lambda_z x^2+\Delta)}+\ln[1+\Delta/(\lambda_z x^2)]^{1/2}\right\}+$$
$$\rho A^2x\ddot{x}\ln[1+\Delta/(\lambda_z x^2)]^{1/2}-(P+H) \tag{34}$$

将上述公式整理之后得:

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}^2+g(x)=0 \tag{35}$$

其中:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{\Delta}{2(\lambda_z x^3+\Delta x)\ln[1+\Delta/(\lambda_z x^2)]^{1/2}} \tag{36}$$

$$g(x)=-\frac{P+H}{\rho A^2x\ln[1+\Delta/(\lambda_z x^2)]^{1/2}}-$$
$$\frac{\varepsilon\Delta\Phi^2}{2\rho A^4x^3(\lambda_z x^2+\Delta)\{\ln[1+\Delta/(x^2\lambda_z)]^{1/2}\}^3} \tag{37}$$

初始条件是:

$$x(0)=1,\dot{x}(0)=0 \tag{38}$$

3.2 固有频率的求解

当施加的电压 Φ 保持恒定状态时,圆柱壳结构

能够保持稳态平衡,此时系统的平衡条件可表示为:

$$g(x_{eq})=0 \tag{39}$$

在给定所有材料参数与外部载荷的情况下,通过求解该方程即可确定圆柱壳处于平衡状态时的形变量 x_{eq}. 若系统在平衡位置附近受到微小扰动时,其瞬时变形可表示为:

$$x(T)=x_{eq}+\delta(T) \tag{40}$$

其中 $\delta(T)$ 为随时间变化的扰动幅值,满足 $|\delta(T)|\ll x_{eq}$. 将式(40)代入式(35),并对非线性项 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在平衡点 x_{eq} 处进行一阶泰勒公式展开. 经过线性化处理得:

$$\frac{d^2\delta}{dT^2}+\delta^3\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_{eq}}+\delta\frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{x_{eq}}=0 \tag{41}$$

三次扰动项 δ^3 为高阶小量,对系统动态的影响可忽略不计. 简化后的线性振动方程为:

$$\frac{d^2\delta}{dT^2}+\delta\frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{x_{eq}}=0 \tag{42}$$

该方程对应典型的简谐振动形式,由此可得圆柱壳在平衡位置附近微幅振动的固有频率为:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{x_{eq}}} \tag{43}$$

该频率由平衡点处函数 g 对形变量的一阶导数决定,反映了系统抵抗微小扰动的刚度特性.

3.3　激励振动响应的求解

下面讨论圆柱壳在周期电压下的动力响应与破坏:

$$\Phi=\Phi_{dc}+\Phi_{ac}\sin(\omega t) \tag{44}$$

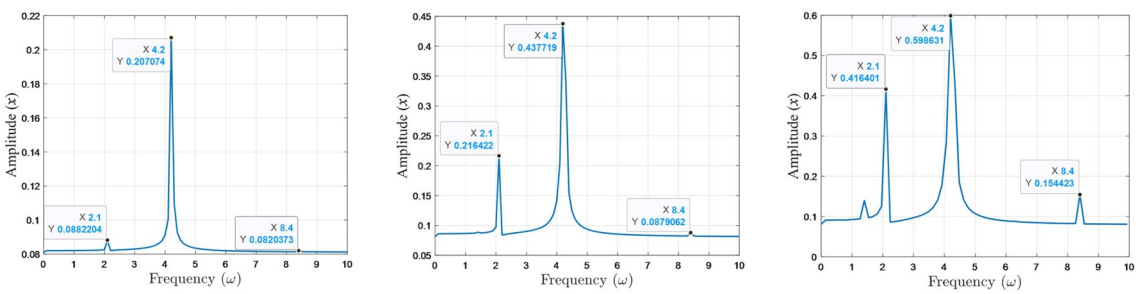
式中,Φ_{dc} 为直流电压,Φ_{ac} 为交流电压的振幅,ω 为交流电压激励频率.

模拟计算所需参数值设置为:$\varepsilon=2.83\times10^{-11}$ F/m,$A=0.01$ m,$\mu=1$ MPa,$J_m=100$,$\rho=1350$ kg/m^3,给定边界条件 $\lambda_z=1.2$,$\Delta=2$,$P=0$,由式(39)可以得到稳态平衡时的圆柱壳变形 $x_{eq}=0.94$,然后代入式(43)可以得到固有频率为 $\omega_0=4.2$.

接下来,讨论交流电压的动态方程对电活性聚合物圆柱壳动力学行为的影响. 本节的分析基于固定的直流电压 Φ_{dc},而交流电压的幅值 Φ_{ac} 则根据目标比值进行设定.

图 5 展示了圆柱壳振动幅值随激励频率变化的响应曲线. 当激励频率 ω 趋近于系统固有频率 ω_0 时,圆柱壳表现出强烈的振动响应,即主共振现象. 当激励频率为固有频率的整数倍 $\omega=2\omega_0$ 时,系统发生亚谐共振. 当激励频率为固有频率的分数倍 $\omega=\omega_0/2$ 时,则出现超谐共振. 然而,如图 5(a)所示,并未观察到亚谐共振现象,这主要归因于所施加的激励幅值 Φ_{ac} 未能达到引发该现象所需的阈值. 同时,对比图 5 中的三幅子图可知,随着施加的交流电压幅值 Φ_{ac} 增大,主共振、亚谐共振及超谐共振对应的峰值幅值均呈现增大的趋势,且在共振点处幅值发生跳跃现象,这将会导致圆柱壳结构发生破坏.

本质上可归因于总电压有效值的增大,使得系统逐渐接近或超过其临界电压,从而引起结构动态失稳. 这一现象反映了系统在电压激励增强过程中结构稳定性的临界行为,而非仅由比值本身的变化所导致.



(a) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=0.1$　　(b) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=0.5$　　(c) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=1$

图 5　圆柱壳振动幅值随激励频率变化的响应曲线

Fig. 5　The response curve of vibration amplitude versus excitation frequency for a cylindrical shell

电压的激励频率往往会很大程度地影响 PVC 凝胶圆柱壳的动态响应行为. 接下来通过时域响应,相位轨迹和 Poincaré 截面来研究 PVC 凝胶圆柱壳在不同交流电压和直流电压比值下的激励频率变化时的非线性动态行为. 分别取一般频率和共振频率,一般频率为 0.5;共振频率为 2.1、4.2 和 8.4,分别对应的是超谐共振频率,主共振频率和亚谐共振频率. 如图 6 所示,当 $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=0.1$ 时,对

PVC 凝胶圆柱壳的振动特性影响. 由图 5(a)可知，$\omega=2.1$ 和 $\omega=8.4$ 共振频率峰值不明显，当 $\omega=0.5$、2.1、8.4 时，他们的振动幅值和振动特性相差不大，幅值基本保持在 1 附近. 相位轨迹都是规律性的封闭图形，并且 Poincaré 截面上面的点集呈现有序状态，并密集分布在闭合曲线上，此时 PVC 凝胶圆柱壳正在经历确定的非线性准周期运动. $\omega=4.2$ 时产生了一些拍频，且振幅相对其他频率更高，并且相位路径图交错程度比其他频率更复杂. 但 Poincaré 截面点集围绕一条模糊地轨迹散乱分布，表明此刻 PVC 凝胶圆柱壳的振动是拟周期振动与混沌振动的中间过渡状态.

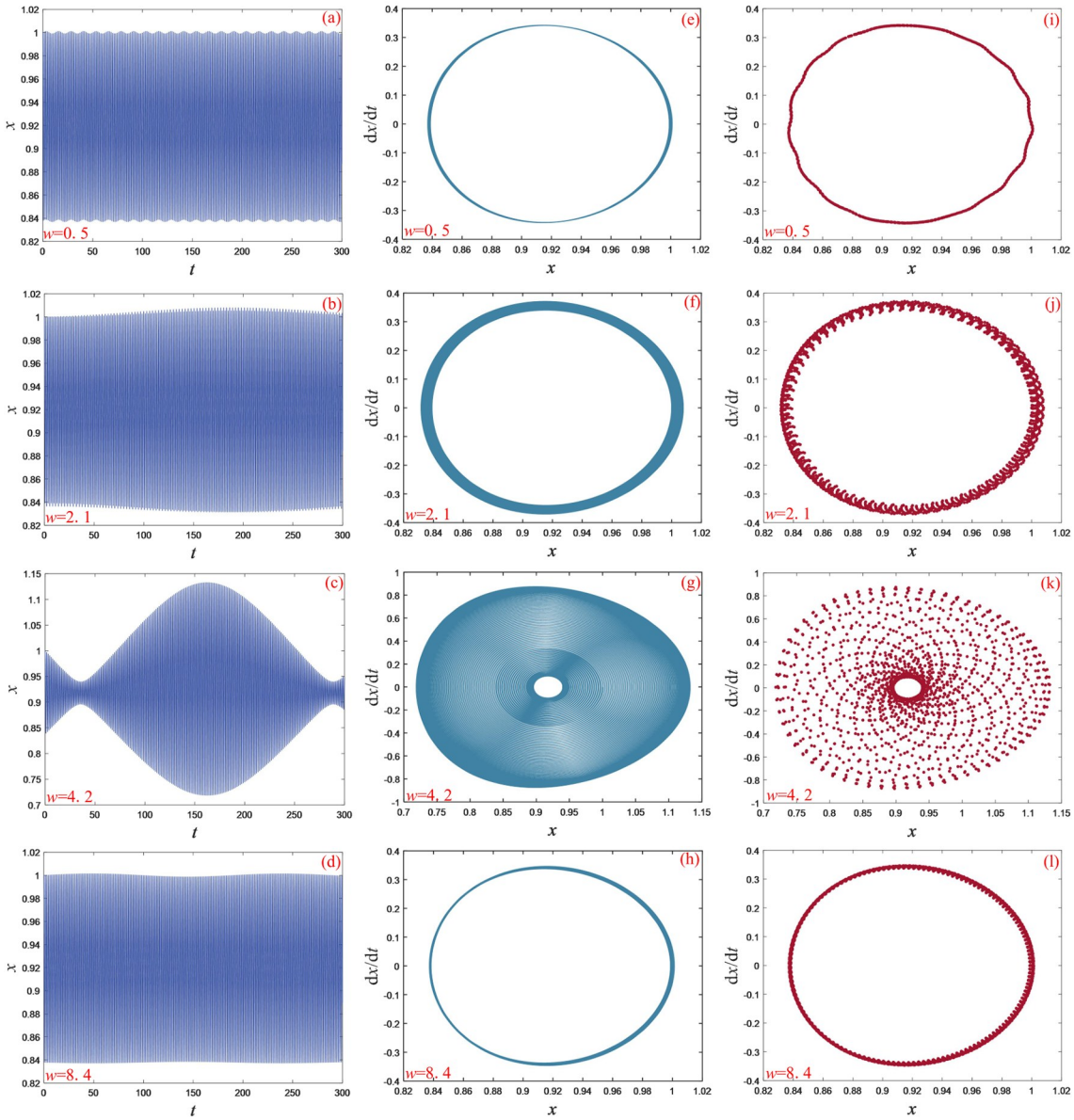


图 6 当 $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=0.1$ 时，PVC 凝胶圆柱壳的时域响应，相位轨迹和 Poincaré 截面：(a)～(d)分别对应的 ω 为 0.5、2.1、4.2、8.4 时的时域响应；(e)～(h)分别对应的 ω 为 0.5、2.1、4.2、8.4 时的相位轨迹；(i)～(l)分别对应的 ω 为 0.5、2.1、4.2、8.4 时的 Poincaré 截面

Fig. 6 For $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=0.1$, the time-domain response, phase trajectorie, and Poincaré section of the PVC gel cylindrical shell: (a)～(d) Time-domain response at $\omega=0.5$, 2.1, 4.2 and 8.4; (e)～(h) Phase trajectory at $\omega=0.5$, 2.1, 4.2 and 8.4; (i)～(l) Poincaré section at $\omega=0.5$, 2.1, 4.2 and 8.4

如图 7 和图 8 所示，$\omega=2.1$、4.2、8.4 的时域响应都产生了拍频，并且主共振频率内拍频的峰谷差更大，拍频的“形状”相比超谐共振频率和亚谐共振频率更“陡峭”，随着 Φ_{ac}/Φ_{dc} 比值增大，这种现象更加明显，如图 7(b)～(d)和图 8(b)～(d). 而一般频率 $\omega=0.5$ 内的 PVC 凝胶圆柱壳振动时域很少呈现拍频，幅值变化较稳定，如图 7(a)和图 8(a). 可见通过改变 Φ_{ac}/Φ_{dc} 比值和激励电压的频率可以调节 PVC 凝胶圆柱壳的拍频特性. 从图 7(e)～(h)和图 8(e)～(h)中可以看出，无论是否处于主共振或谐共振区域内，Φ_{ac}/Φ_{dc} 比值下的 PVC 凝胶圆柱壳的相位路径轨迹曲线都局限于一个有

界的区域内并没有发散至无穷远,说明经历了稳定的振动过程. 主共振或谐共振区域内的相位路径表现出较一般频率交错程度更大的现象,说明非线性程度更强. 随着 Φ_{ac}/Φ_{dc} 比值增大,$\omega=2.1$、4.2 时,Poincaré 截面上的散点出现了变化,其离散程度逐渐增加且逐渐不再闭合,Poincaré 截面由之前有序的散点逐渐变成混乱的无序状态,如图 7(j)～(k)和图 8(j)～(k),这意味着振动状态出现了混沌. 可见 Φ_{ac}/Φ_{dc} 比值增大会导致振动系统的稳定性变差,逐步失去确定的准周期性运动.

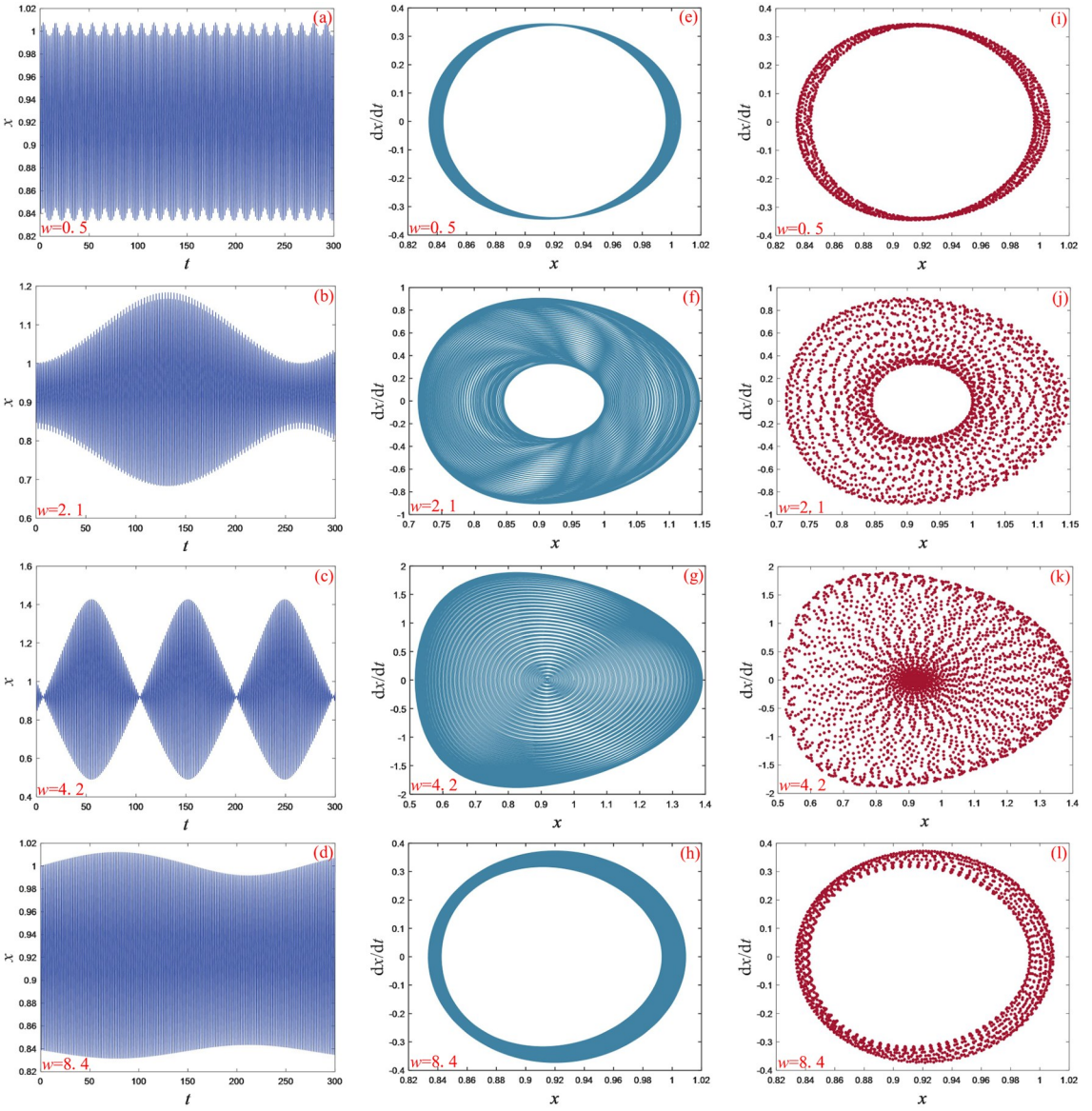
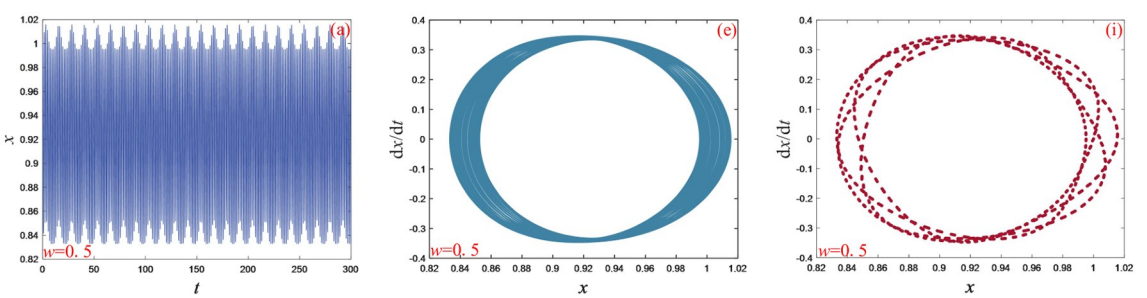


图 7　当 $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=0.5$ 时,PVC 凝胶圆柱壳的时域响应,相位轨迹和 Poincaré 截面:(a)～(d)分别对应的 ω 为 0.5、2.1、4.2、8.4 时的时域响应;(e)～(h)分别对应的 ω 为 0.5、2.1、4.2、8.4 时的相位轨迹;(i)～(l)分别对应的 ω 为 0.5、2.1、4.2、8.4 时的 Poincaré 截面

Fig. 7　For $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=0.5$, the time-domain response, phase trajectorie, and Poincaré section of the PVC gel cylindrical shell: (a)～(d) Time-domain response at $\omega=0.5$, 2.1, 4.2 and 8.4; (e)～(h) Phase trajectory at $\omega=0.5$, 2.1, 4.2 and 8.4; (i)～(l) Poincaré section at $\omega=0.5$, 2.1, 4.2 and 8.4



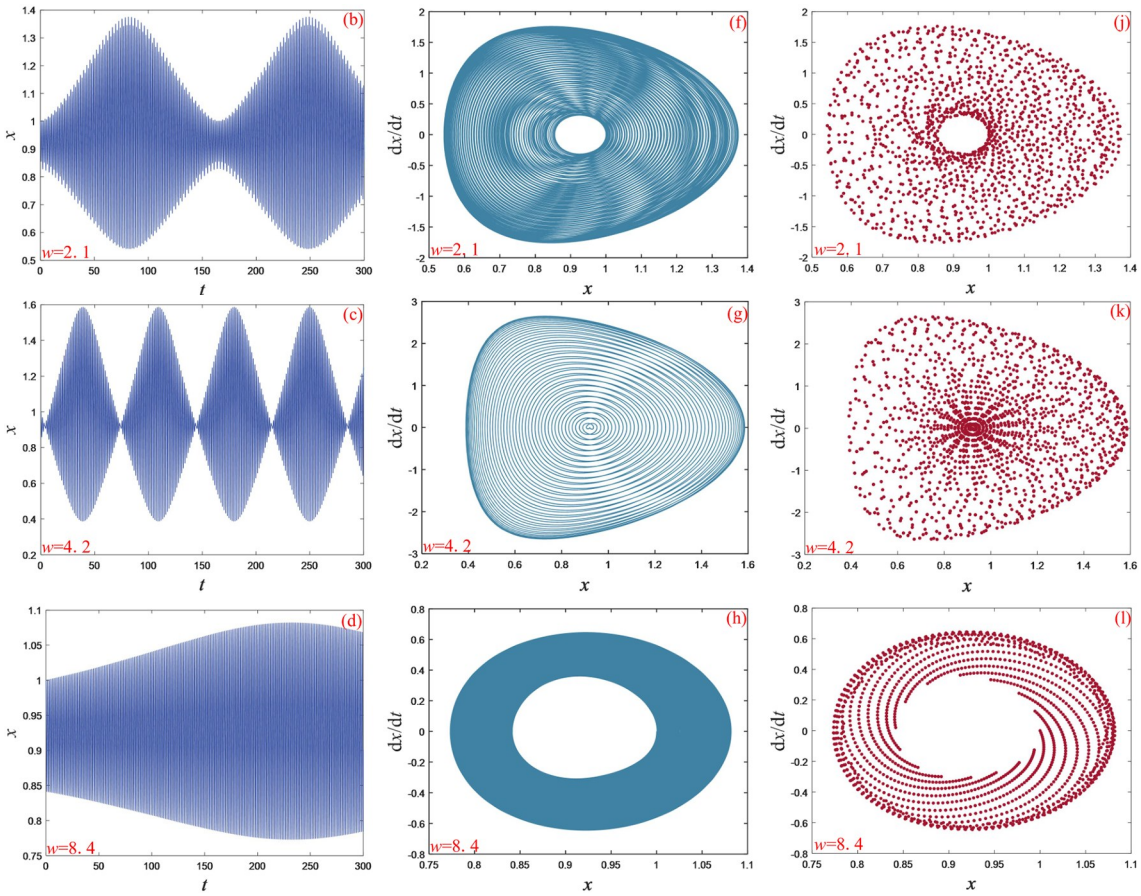


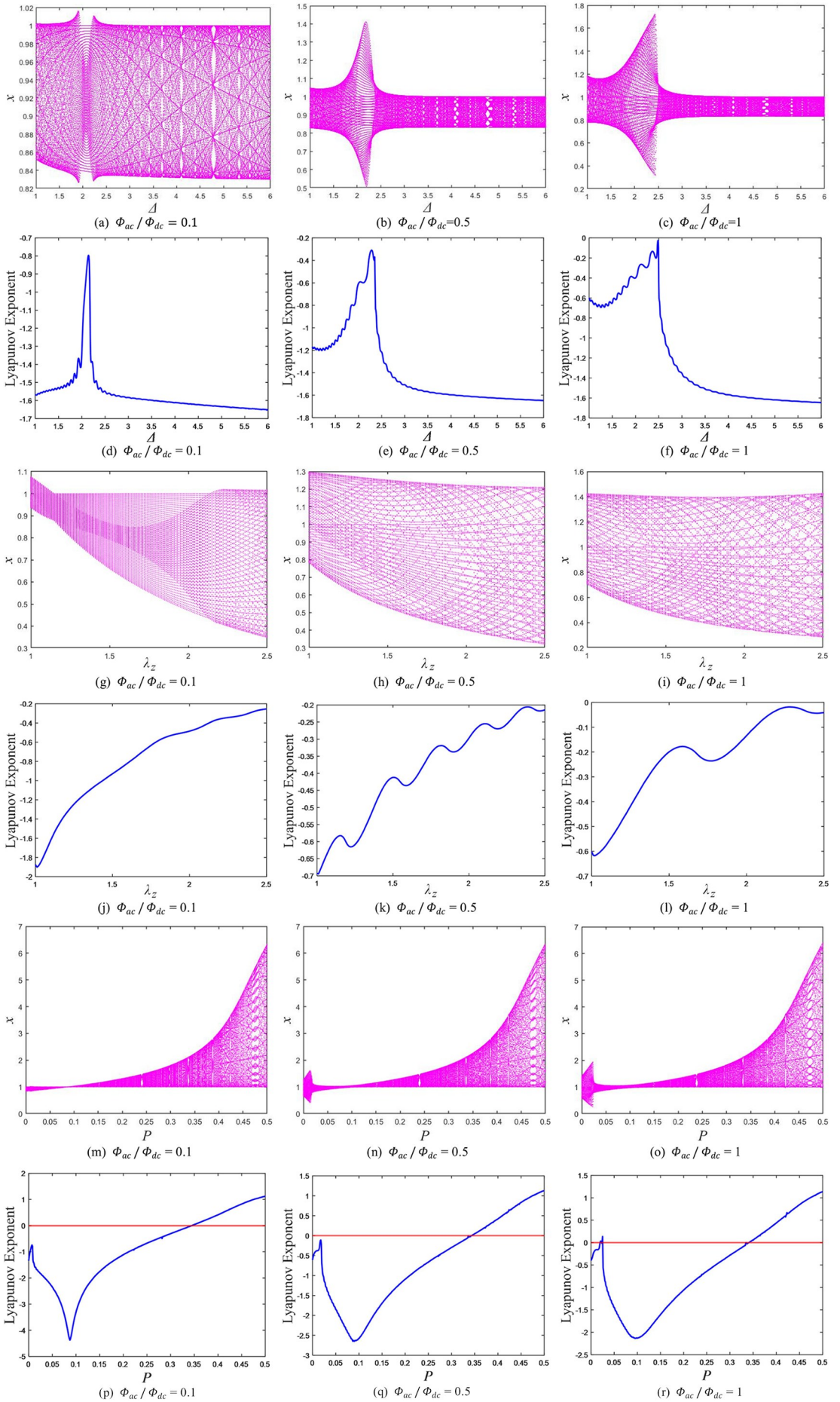
图 8 当 $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=1$ 时，PVC 凝胶圆柱壳的时域响应，相位轨迹和 Poincaré 截面：(a)～(d)分别对应的 ω 为 0.5、2.1、4.2、8.4 时的时域响应；(e)～(h)分别对应的 ω 为 0.5、2.1、4.2、8.4 时的相位轨迹；(i)～(l)分别对应的 ω 为 0.5、2.1、4.2、8.4 时的 Poincaré 截面

Fig. 8 For $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=1$, the time-domain response, phase trajectorie, and Poincaré section of the PVC gel cylindrical shell: (a)～(d) Time-domain response at $\omega=0.5$, 2.1, 4.2 and 8.4; (e)～(h) Phase trajectory at $\omega=0.5$, 2.1, 4.2 and 8.4; (i)～(l) Poincaré section at $\omega=0.5$, 2.1, 4.2 and 8.4

3.4 单一参数变化下 PVC 凝胶圆柱壳分岔特性和 Lyapunov 指数

图 9 展示了固有频率 $\omega_0=4.2$ 时，PVC 凝胶圆柱壳在不同 Φ_{ac}/Φ_{dc} 比值下，随圆柱壳厚度 Δ、预拉伸比 λ_z、预应力 P 和变形极限 J_m 的变化而表现出的丰富的分岔特性与 Lyapunov 指数.

在图 9(a)～(c)中，PVC 凝胶圆柱壳的振幅随着厚度的增大而趋向于稳定，同时由图 9(d)～(f)所展示的 Lyapunov 指数可知，Lyapunov 指数数值始终小于 0，因此可以判断出 PVC 凝胶圆柱壳在厚度增大的过程中振动的周期性逐渐增强，始终处于稳定振动，未发生混沌振动. 并且随着 Φ_{ac}/Φ_{dc} 比值和 Δ 的增大，PVC 凝胶圆柱壳依旧保持稳定的振动. 图 9(g)～(i)展示出 PVC 凝胶圆柱壳随预拉伸比变化时 PVC 凝胶圆柱壳的振动规律，随着 λ_z 的增大而趋向于稳定，并且图 9(j)～(l)的 Lyapunov 指数始终小于 0，表明随着 λ_z 的增大，PVC 凝胶始终处于稳定性的振动状态，未发生混沌振动，并且随着 Φ_{ac}/Φ_{dc} 比值和 λ_z 的增大，PVC 凝胶圆柱壳依旧保持稳定的振动. 如图 9(m)～(o)所示，PVC 凝胶圆柱壳的振动随着预应力 P 的增大振幅不断增大，周期性倍数越高，图 9(p)～(r)中的 Lyapunov 指数在增大至预应力 $P=0.35$ 附近时大于 0，因此表明随着 P 的增大，PVC 凝胶圆柱壳的振动发生了混沌现象，并且通过分岔图和 Lyapunov 指数可以看出，在 $P=0.02$ 附近发生混沌现象. 如图 9(s)～(u)所示，当 $J_m<3$ 时，瞬间振幅增大，转变为混沌运动，当 $J_m>3$ 时，PVC 凝胶圆柱壳为准周期运动，同时图 9(v)～(x)的 Lyapunov 指数在 $J_m<3$ 时大于 0，证实了 PVC 凝胶圆柱壳在 $J_m<3$ 过程中混沌的发生，并且随着 Φ_{ac}/Φ_{dc} 比值的增大，通过分岔图和 Lyapunov 指数可以看出，在 $J_m=98$ 附近发生混沌现象. 综上可知，在力电耦合作用下，PVC 凝胶圆柱壳的振动状态受多种因素共同影响，其中交流电压与直流电压的比值以及不同参数的变化均会对其产生显著影响.



(a) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=0.1$　(b) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=0.5$　(c) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=1$

(d) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=0.1$　(e) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=0.5$　(f) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=1$

(g) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=0.1$　(h) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=0.5$　(i) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=1$

(j) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=0.1$　(k) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=0.5$　(l) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=1$

(m) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=0.1$　(n) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=0.5$　(o) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=1$

(p) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=0.1$　(q) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=0.5$　(r) $\Phi_{ac}/\Phi_{dc}=1$

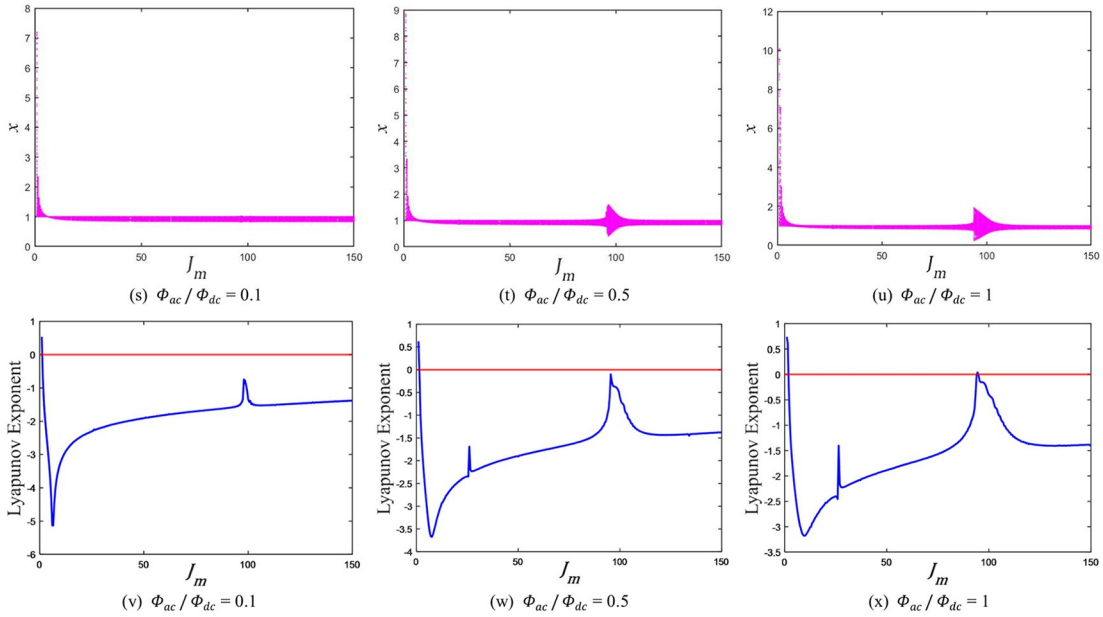


图 9 不同 Φ_{ac}/Φ_{dc} 比值下的各参数对应的分岔特性和 Lyapunov 指数：(a)～(c)为 Δ 的分岔特性；(g)～(i)为 λ_z 的分岔特性；(m)～(o)为 P 的分岔特性；(s)～(u)为 J_m 的分岔特性；(d)～(f)为 Δ 的 Lyapunov 指数；(j)～(l)为 λ_z 的 Lyapunov 指数；(p)～(r)为 P 的 Lyapunov 指数；(v)～(x)为 J_m 的 Lyapunov 指数

Fig. 9 Bifurcation characteristic and Lyapunov exponent of different parameters under different Φ_{ac}/Φ_{dc} ratios: (a)～(c) show the bifurcation characteristic of Δ; (g)～(i) of λ_z; (m～o) of P and (s～u) of J_m; (d)～(f) show the Lyapunov exponents of Δ; (j)～(l) of λ_z; (p～r) of P and (v～x) of J_m

4 结论

本研究探讨了 PVC 凝胶圆柱壳结构在直流和交流电压激励下的力学响应及其失稳特性. 基于不可压缩假设和 Gent 超弹性本构关系，建立了描述圆柱壳表面变形的非线性控制方程. 采用数值分析方法求解该非线性微分方程，获得了不同参数条件下圆柱壳的变形特征曲线，并系统分析了其稳定性行为.

在直流电压加载工况下，研究揭示了圆柱壳变形量与外加电压之间的非线性关系. 随着电压升高，变形量呈现单调递增趋势，并逐渐逼近一个极限值. 当电压接近该临界值时，结构变形会急剧增大直至失效. 分析表明，对比不同厚度的曲线可知，圆柱壳越厚对应的临界电压越大；对比不同预拉伸比曲线可知，圆柱壳预拉伸比越小对应的临界电压越大；对比不同预应力曲线可知，当 P 与施加电压方向相反时，对应的临界电压越大.

在交流电压激励下，圆柱壳表现出丰富的非线性动力学行为. 通过小变形理论计算了系统的固有频率特性，研究发现了多频共振现象：当激励频率分别接近系统固有频率的 1/2 倍、1 倍和 2 倍时，结构依次出现超谐波共振、主共振和亚谐波共振. 在这些共振区域，振幅突变现象会导致结构失稳. 通过对时域响应曲线、相位轨迹曲线、Poincaré 截面、分岔特性和 Lyapunov 指数分析，验证了系统在这些参数区域的稳定振动特性，证明振动响应可通过电压参数调控实现可控性.

本研究结果对 PVC 凝胶柔性驱动器设计具有指导意义. 确定的临界电压为设定安全工作区提供了关键参数，有助于避免结构失稳. 非线性振动特性的分析为通过调控静动态电压配比来优化驱动器性能提供了依据. 这些发现可为该类材料在软体机器人等领域的应用提供设计参考.

参考文献

[1] LI Y, HASHIMOTO M. PVC gel based artificial muscles: Characterizations and actuation modular constructions [J]. Sensors and Actuators A: Physical, 2015, 233: 246－258.

[2] YOON J U, HAN D H, OH S J, et al. Electro-reconfigurable adaptive microlens with simultaneous multidirectional focal adjustment and zooming [J]. Advanced Materials Technologies, 2023, 8 (8): 2201988.

[3] BALACHANDRAN A, RAVINDRAN N A, MOHD G, et al. Bioinspired moisture-driven soft robotic actuator [J]. Advanced Intelligent Systems,

2025，7(6)：2400609.

[4] CHEN X Y，LI Z Z，DENG X R，et al. Visible light-driven soft actuator exhibiting multistage shape morphing [J]. Small，2025，21(37)：e07247.

[5] HEGDE P N，UDDUTTULA A. Nature-inspired bioelectric stimuli-based electroactive polymeric therapeutics technology for osteoarthritis treatment-A review [J]. ACS Biomaterials Science & Engineering，2025，11(7)：4002－4018.

[6] LIU Y H，PHARR M，SALVATORE G A. Lab-on-skin：a review of flexible and stretchable electronics for wearable health monitoring [J]. ACS Nano，2017，11(10)：9614－9635.

[7] PARK W H，SHIN E J，YOO Y，et al. Soft haptic actuator based on knitted PVC gel fabric [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics，2020，67(1)：677－685.

[8] WANG J J，XU B G，WANG X，et al. Control of soft wearable robots for elbow assistance and rehabilitation：a simplified solution using disturbance observer and nonsmooth feedback [J]. IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering，2025，33：2988－2999.

[9] TERAJIMA R，INOUE K，NAKAJIMA K，et al. Multifunctional physical reservoir computing in soft tensegrity robots [J]. Chaos，2025，35(8)：e273567.

[10] 罗斌，陈花玲，徐雪杰，等. 电活性聚合物 PVC 凝胶材料的 3D 直写打印工艺[J]. 机械工程学报，2019，55(11)：76－82.
LUO B，CHEN H L，XU X J，et al. Printing electroactive polymer polyvinyl chloride(PVC) gel via direct writing [J]. Journal of Mechanical Engineering，2019，55(11)：76－82.（in Chinese）

[11] 罗斌，李小兰，徐雪杰，等. PVC 凝胶驱动及 CNT/PDMS 传感一体化柔性抓手的研究[J]. 西安交通大学学报，2020，54(12)：30－36.
LUO B，LI X L，XU X J，et al. Integrated polyvinyl chloride (PVC) gel actuating and CNT/PDMS sensing structure for flexible gripper [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University，2020，54(12)：30－36.（in Chinese）

[12] 盛俊杰，李树勇，张玉庆，等. 介电弹性体材料致动器的非线性动态行为研究[J]. 动力学与控制学报，2017，15(2)：119－124.
SHENG J J，LI S Y，ZHANG Y Q，et al. Nonlinear dynamic performance of a dielectric elastomer actuator [J]. Journal of Dynamics and Control，2017，15(2)：119－124.（in Chinese）

[13] 王成敏，任九生. 周期载荷下电活性聚合物圆柱壳的动力响应[J]. 动力学与控制学报，2016，14(3)：211－216.
WANG C M，REN J S. Dynamical response of electro-active polymer cylindrical shells under periodic pressure [J]. Journal of Dynamics and Control，2016，14(3)：211－216.（in Chinese）

[14] 曾修豪，黄志龙，王惠明. 介电弹性体圆管的黏弹非线性动力学分析[J]. 动力学与控制学报，2023，21(2)：33－40.
ZENG X H，HUANG Z L，WANG H M. Nonlinear dynamic analysis of dielectric elastomer tube considering the viscoelastic effect [J]. Journal of Dynamics and Control，2023，21(2)：33－40.（in Chinese）

[15] WANG Z P，HE B，ZHOU Y M，et al. Effects of pre-stretch on the oscillation and stability of dielectric elastomers [J]. International Journal of Mechanical Sciences，2020，185：105879.

[16] 王延杰，徐望舒，赵春，等. 聚氯乙烯电活性凝胶材料研究进展[J]. 高分子材料科学与工程，2020，36(12)：151－157.
WANG Y J，XU W S，ZHAO C，et al. Progress of polyvinyl chloride electroactive gel [J]. Polymer Materials Science & Engineering，2020，36(12)：151－157.（in Chinese）

[17] ASAKA K，HASHIMOTO M. Electrical properties and electromechanical modeling of plasticized PVC gel actuators [J]. Sensors and Actuators B：Chemical，2018，273：1246－1256.

[18] ASAKA K，HASHIMOTO M. Effect of ionic liquids as additives for improving the performance of plasticized PVC gel actuators [J]. Smart Materials and Structures，2020，29(2)：025003.

[19] LUO B，ZHONG Y D，CHEN H L，et al. Direct writing corrugated PVC gel artificial muscle via multi-material printing processes [J]. Polymers，2021，13(16)：2734.

[20] AL-RUBAIAI M，QI X D，FRANK Z，et al. Control-oriented nonlinear modeling of polyvinyl chloride (PVC) gel actuators [J]. IFAC-PapersOnLine，2021，54(20)：304－309.

[21] PARK H，OH S J，KIM D，et al. Plasticized PVC-gel single layer-based stretchable triboelectric nano-

generator for harvesting mechanical energy and tactile sensing [J]. Advanced Science, 2022, 9(22): 2201070.

[22] LI Y, GUO M F, LI Y B. Recent advances in plasticized PVC gels for soft actuators and devices: a review [J]. Journal of Materials Chemistry C, 2019, 7(42): 12991—13009.

[23] DONG T Y, LIU T. The electrical response and self-sensing of the fully flexible PVC gel actuator based on flexible electrodes [J]. Sensors and Actuators A: Physical, 2022, 340: 113554.

[24] ZHANG M R, JAKOBSEN J, LI R Q, et al. Investigation of a simple viscoelastic model for a PVC-gel actuator under combined mechanical and electrical loading [J]. Materials, 2023, 16(3): 1183.

[25] ACHARYA R, DUTTA S D, PATIL T V, et al. A review on electroactive polymer-metal composites: development and applications for tissue regeneration [J]. Journal of Functional Biomaterials, 2023, 14(10): 523.

[26] WHITE J R. The site model theory and the standard linear solid [J]. Rheologica Acta, 1981, 20(1): 23—28.

[27] WANG D H, LIU W J, CHEN K W. Well-posedness and decay property for the Cauchy problem of the standard linear solid model with thermoelasticity of type III [J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 2023, 74(2): 70.

[28] LI Z, LIU C, SHENG M, et al. Broadening Bandwidth in a Semi-Active Vibration Absorption System Utilizing Stacked Polyvinyl Chloride Gel Actuators [J]. Micromachines, 2024, 15(5): 649.

[28] LI Z Y, LIU C, SHENG M P, et al. Broadening bandwidth in a semi-active vibration absorption system utilizing stacked polyvinyl chloride gel actuators [J]. Micromachines, 2024, 15(5): 649.

[29] FRANK Z, OLSEN Z, HWANG T, et al. Modelling and Experimental Study for PVC Gel Actuators [C]//ASME 2019 Dynamic Systems and Control Conference. New York: ASME, 2019.

[30] LI Y, FENG X X, ZHU L X, et al. Modeling of fiber-constrained planar PVC gel actuators [J]. Nanomaterials, 2023, 13(9): 1483.

[31] DU Z A, LUO B, ZHU K J. Study on deformation theory and resonance frequency of circular-plane PVC actuator [J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2024, 57(6): 065401.

[32] GENT A N. A new constitutive relation for rubber [J]. Rubber Chemistry and Technology, 1996, 69(1): 59—61.

附录 A

A1 **物理量和几何参数的定义**

A1 Definition of physical quantities and geometric parameters

物理量和几何参数	定义	物理量和几何参数	定义
A	壳体的初始内径	λ_z	轴向主伸长率
B	壳体的初始外径	I_1	第一应变不变量
L	壳体的轴向长度	μ	剪切模量
a	壳体变形的内径	J_m	超弹性材料分子链的最大变形极限
b	壳体变形的外径	ε	材料的介电常数
l	壳体变形的长度	Δ	壳体厚度
P	壳体的内部瞬压力	x	无量纲
ρ	材料的密度	D_r	真实电位移
T	初始时间	Φ_{dc}	直流电压
λ_r	径向主伸长率	Φ_{ac}	交流电压的振幅
λ_θ	周向主伸长率	ω	交流电压激励频率