第 24 卷第 2 期
2026 年 2 月

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 24 No. 2
Feb. 2026

文章编号:1672-6553-2026-24(2)-045-009

DOI:10.6052/1672-6553-2025-093

基于宽带噪声激励的 MEMS 模态局域化传感方法*

吕强锋[1] 牛阳[1] 宦荣华[1] 王雪峰[2†]

(1. 浙江大学 应用力学研究所,杭州 310027)

(2. 西北工业大学 力学与交通运载工程学院,西安 710072)

摘要 模态局域化因其对结构微扰高度敏感的特性,在微机电系统(MEMS)传感器领域展现出独特优势.然而,传统模态局域化谐振器多依赖扫频激励,只能激发单一模态,且受限于开环幅值稳定性差与双闭环驱动易失稳的问题,导致传感器难以实现实时测量与快速响应.针对这一瓶颈,本文以双梁耦合谐振器为研究对象,提出了一种基于宽带噪声激励的模态局域化传感方法.该方法利用宽带噪声激发系统多个模态,并通过功率谱密度分析提取模态能量分布变化特征,实现高效、灵敏的扰动检测.本文建立了宽带噪声激励下双梁 MEMS 谐振器耦合动力学模型,结合数值仿真与实验研究,对比分析了扫频激励与噪声激励下的模态响应特性.结果表明,宽带噪声激励下的模态局域化效应与谐波激励具有高度一致性,验证了该方法的可行性与有效性.

关键词 MEMS 传感器, 模态局域化, 噪声激励, 功率谱密度, 频域分析

中图分类号:O324 **文献标志码**:A

A MEMS Modal Localization Sensing Method Based on Broadband Noise Excitation*

Lv Qiangfeng[1] Niu Yang[1] Huan Ronghua[1] Wang Xuefeng[2†]

(1. Institute of Applied Mechanics, Zhejiang university, Hangzhou 310027, China)

(2. School of Mechanics and Transportation Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract Modal localization, owing to its high sensitivity to structural perturbations, has demonstrated unique advantages in the field of microelectromechanical systems (MEMS) sensors. However, traditional modal localization resonators mostly rely on frequency-swept excitation, which can only stimulate a single mode and suffer from poor amplitude stability in open-loop operation as well as instability issues in dual closed-loop driving. These limitations hinder the realization of real-time measurement and fast response. To address this challenge, this paper investigates a coupled double-beam resonator and proposes a modal localization sensing method based on broadband noise excitation. The proposed method drives multiple modes simultaneously using broadband noise and extracts the variation characteristics of the modal energy distribution through power spectral density analysis, enabling efficient and sensitive perturbation detection. A coupled dynamic model of a dual beam MEMS resonator under broadband noise excitation is established, and numerical simulations together with experimental studies are conducted to comparatively analyze the modal responses under frequency-swept and noise-driven excitations. The results show that the modal localization effect under broadband noise driven conditions is highly consistent with that under harmonic driving, thereby verifying the feasibility and effectiveness of

2025-05-14 收到第 1 稿,2025-07-25 收到修改稿.

* 中央高校基本科研业务费专项资金资助(226-2025-00237),国家自然科学基金资助项目(12202355);Fundamental Research Funds for the Central Universities (226-2025-00237), National Natural Science Foundation of China (12202355).

† 通信作者 E-mail:xfwang@nwpu.edu.cn

the proposed method.

Key words MEMS sensors, modal localization, noise excitation, power spectral density, frequency-domain analysis

引言

模态局域化作为一种重要的振动分析方法,能够揭示结构振动能量在特定区域的集中特性,为理解复杂结构的动力学行为提供了有力工具[1-7]. 它在航空航天、土木工程、智能材料等领域得到广泛应用,尤其在微纳系统中表现出独特的优势[8]. 对于微机电系统(MEMS)谐振式传感器而言,模态局域化使系统对结构微扰高度敏感,从而显著提升传感灵敏度[9-13];同时,对于阵列中各耦合谐振器暴露于相同环境条件下,模态局域化传感器表现出强大的共模抑制能力[14],对外部环境压力和温度的敏感性明显降低[15,16]. 这一机制源于弱耦合谐振系统中模态能量的非均匀分布,即随着系统参数微小扰动的引入,耦合模态中原本均匀分布的能量逐步向特定模态集中,形成模态局域化. 近年来,基于模态局域化的 MEMS 传感器在质量、加速度、电学量及姿态检测等领域取得了一系列突破性进展,引起了广泛研究关注. 在质量检测方面,Rabenimanana 等[17]设计并实验验证了一种基于不同长度弱耦合悬臂梁的模态局域化质量传感器,通过在短梁上施加可调谐直流偏置电压实现静电刚度软化,克服了制造缺陷并主动调谐至模态转向点. 在加速度检测方面,张和民等[18]利用高阶弯曲模态和超弱耦合结构,实现了 130 ng 的偏置不稳定性与 85 ng/$\sqrt{\mathrm{Hz}}$ 的噪声基底,显著提升了该类器件的精度极限. 在电学量检测领域,文献[19]提出了基于刚度扰动耦合机制的微电流传感器,首次实现了 183.6 nA 分辨率的非接触式测量,为亚微安级电流检测提供了新范式. 在姿态感知方面,文献[20]提出了双加速度计正交架构的模态局域化倾斜传感器,获得 ±90°可扩展至 360°的线性测量范围,灵敏度平均提升 169 倍.

从工作原理而言,谐振器必须工作在动态激励条件下[21,22]. MEMS 器件的驱动方法有许多种,其中最重要的包括静电驱动[23,24]、电磁驱动、电热驱动和压电驱动[25,26]. 静电驱动是 MEMS 传感器中最常用的驱动方法,具有结构简单、易制造、响应快、功耗低的优势,但也存在非线性、寄生效应的问题. 在现有研究中,大多数模态局域化传感器依赖谐波激励[21],在特定模态频率下驱动谐振器,通常只能激发单个模态,而耦合谐振器中的多个振动模态很难通过这种方式同时驱动. 新的激励方式也为模态局域化效应的增强提供了可能. Wang 等[27]首次将蓝边带激励应用于二自由度弱耦合谐振器,同时激发谐振器间模态和谐振器内部模态,大幅增强模态局域化效应. Wang 等[28]通过引入红边带参数泵浦,在非线性模态局域化传感中实现了一种电控可调的动态虚拟耦合,从而突破了传统静态耦合在灵敏度与测量范围之间的固有权衡. 虽然通过引入参数泵浦可同时激发多模态,但需要精密的信号生成、同步与控制硬件,系统搭建和校准复杂. Qiao 等[29]提出了一种热噪声驱动的谐振传感器新范式,通过将固有热噪声转化为驱动力,实现了无需外部激励、在室温和常压下工作的高灵敏度 MEMS/纳机电系统(NEMS)传感,为低功耗、低成本传感器开发提供了新路径,但固有热噪声驱动力较小在传统 MEMS 模态局域化传感器中难以实现. Pi 等[30]首次在基于光波共振的光学微环谐振器中实现了模式局域化传感,实验证明其透射功率变化的检测灵敏度比传统共振波长偏移高三个数量级,为高灵敏度集成光子传感器提供了新范式.

由此可见,模态局域化 MEMS 传感器的研究已从结构多样化、非线性增强、多物理量检测到新型激励方式的引入等多个维度不断推进,展现出在灵敏度和分辨率上的巨大潜力,并为下一代高性能、多功能 MEMS 传感器的发展奠定了坚实基础.

开环条件下,谐振器的幅值稳定需要一定时间. 虽然使谐振器在闭环条件下工作可以显著减小幅值稳定时间,但直接实现两个闭环来控制耦合谐振器存在挑战[31],振幅变化和每个回路的增益调整变得相互矛盾,阻止了两个谐振器的稳定运行. 这种不稳定性源于耦合结构导致谐振器的振幅在双谐振器驱动条件下受到两个驱动力的相互影响,

因此目前常用的模态局域化传感器通常是单谐振器驱动,另一个谐振器处于开环状态,幅值比仅在开环谐振器达到稳定时才能稳定下来,这就导致较低的振幅比带宽. 因此,发展一种无需精确频率驱动、可一次性激励多个模态的新型激励方式,成为实现 MEMS 模态局域化谐振器应用的关键步骤.

本文提出的基于宽带噪声激励的 MEMS 模态局域化传感方法,通过利用宽带噪声作为激励源同时激发系统多个振动模态,并结合功率谱密度分析模态变化,克服了传统扫频激励只能激发单一模态、开环幅值稳定性差及双闭环驱动易失稳的瓶颈问题. 该方法无需精确频率调谐,激励方式简单,频域覆盖广,可实现高效、灵敏的微扰检测. 理论模型、数值仿真与实验验证共同表明,宽带噪声激励下的模态局域化效应与谐波激励高度一致,证实了该方法的可行性与有效性,为 MEMS 模态局域化传感器的发展提供了一种可靠的新型激励方案.

本文内容安排如下:第 1 节以 MEMS 双梁弱耦合谐振器器件为研究对象,建立宽带噪声激励下二自由度模态局域化理论模型,通过频域分析推导得到了双梁 MEMS 谐振器的频响函数. 通过数值仿真,研究了两个耦合谐振器中同相和反相模式之间的能量传递与分布;第 2 节对 MEMS 双梁弱耦合谐振器器件在真空环境下分别开展了扫频实验与噪声激励实验,进一步对比分析了两种激励方式下模态局域化行为的一致性与可靠性;第 3 节对文章作了总结.

1　模态局域化理论模型

对于二自由度弱耦合谐振系统,如图 1 所示,通常假定两个谐振器具有相同的初始结构参数,梁 1 和梁 2 的质量为 $m_1=m_2=m$,阻尼为 $c_1=c_2=c$,固有刚度为 $k_1=k_2=k$,耦合刚度为 k_c,梁 2 存在扰动刚度 Δk,激励 $\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}F_1\\F_2\end{bmatrix}$,则系统方程为

$$\begin{bmatrix}m_1 & 0\\0 & m_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_1 & 0\\0 & c_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_1+k_c & -k_c\\-k_c & k_2+k_c+\Delta k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_1\\F_2\end{bmatrix} \tag{1}$$

若仅梁 1 受到激励 $F_0(t)$,则两边除以 m 归一化后可得

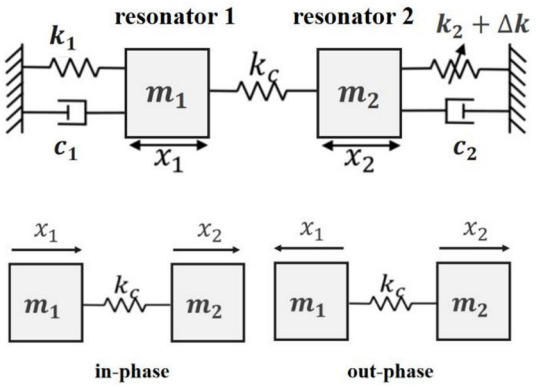


图 1　二自由度弱耦合谐振系统

Fig. 1　Two-degree-of-freedom weakly coupled resonator system

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\omega_0/Q & 0\\0 & \omega_0/Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(1+\kappa)\omega_0^2 & -\kappa\omega_0^2\\-\kappa\omega_0^2 & (1+\kappa+\delta)\omega_0^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_0(t)/m\\0\end{bmatrix} \tag{2}$$

其中 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 分别表示梁 1 和梁 2 的位移,$\omega_0=\sqrt{k/m}$,$Q=\sqrt{km}/c$,$\kappa=k_c/k$ 为归一化耦合刚度,$\delta=\Delta k/k$ 为归一化扰动刚度.

系统在频域中的输入可表示为 $\boldsymbol{\Xi}(\omega)=\begin{bmatrix}F(\omega)\\0\end{bmatrix}$,设系统的频域响应为 $X(\omega)$,则有

$$\begin{bmatrix}X_1(\omega)\\X_2(\omega)\end{bmatrix}=\boldsymbol{H}(\omega)\boldsymbol{\Xi}(\omega)=\Gamma^{-1}\begin{bmatrix}H_{11}\\H_{21}\end{bmatrix}F(\omega)=\Gamma^{-1}\begin{bmatrix}-\omega^2+\mathrm{j}\dfrac{\omega\omega_0}{Q}+(1+\kappa+\delta)\omega_0^2\\\kappa\omega_0^2\end{bmatrix}F(\omega) \tag{3}$$

其中系统的传递函数矩阵为

$$\boldsymbol{H}(\omega)=[-\omega^2\boldsymbol{M}+\mathrm{j}\omega\boldsymbol{C}+\boldsymbol{K}]^{-1}=\Gamma^{-1}\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12}\\H_{21} & H_{22}\end{bmatrix} \tag{4}$$

其中

$$\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12}\\H_{21} & H_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\omega^2+(1+\kappa+\delta)\omega_0^2+\mathrm{j}\omega\omega_0/Q & \kappa\omega_0^2\\\kappa\omega_0^2 & -\omega^2+(1+\kappa)\omega_0^2+\mathrm{j}\omega\omega_0/Q\end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\Gamma=\omega^4-\left(2+2\kappa+\delta+\frac{1}{Q^2}\right)\omega_0^2\omega^2+(1+2\kappa+\delta+\kappa\delta)\omega_0^4-j\frac{1}{Q}[2\omega^3\omega_0-(2+2\kappa+\delta)\omega\omega_0^3] \tag{6}$$

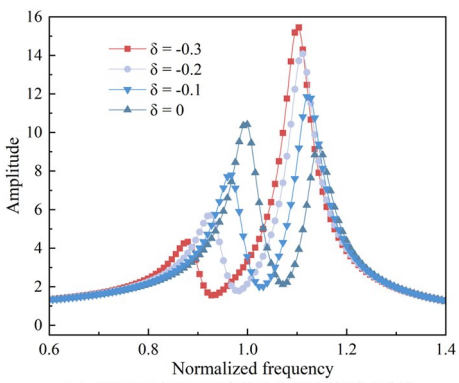
根据公式(2),令为 $F=0$,可以得到自由振动情形下的二自由度耦合谐振器的模态频率为

$$\omega_{1,2}^2=\omega_0^2\left(1+\kappa+\frac{\delta\mp\sqrt{\delta^2+4\kappa^2}}{2}\right) \tag{7}$$

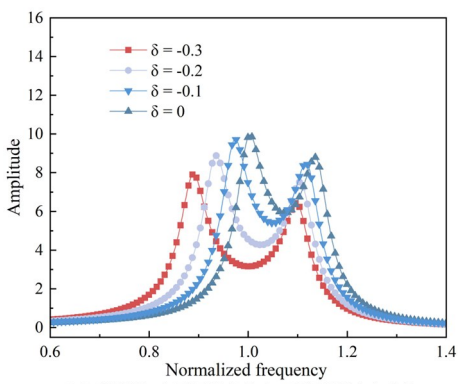
若输入 $F(t)$ 为谐波激励 $A\cos\omega t$,则输出位移响应为

$$\begin{bmatrix}X_1(\omega)\\X_2(\omega)\end{bmatrix}=\Gamma^{-1}\begin{bmatrix}-\omega^2+(1+\kappa+\delta)\omega_0^2+j\dfrac{\omega\omega_0}{Q}\\ \kappa\omega_0^2\end{bmatrix}\frac{A}{m} \tag{8}$$

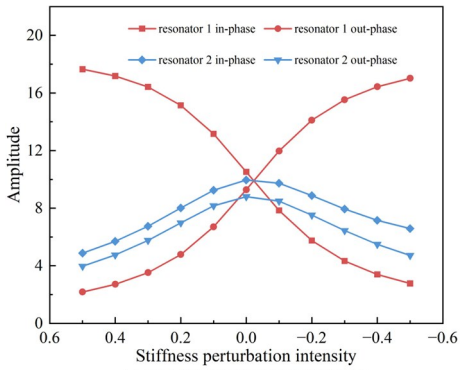
从公式(8)可以看出,系统的振幅是与谐振器刚度、耦合强度、扰动刚度大小、品质因数以及激励强度等多参数相关的量. 通过对式(2)进行数值仿真,可以得到一些数值结果. 耦合谐振器峰值频率以及峰值的大小随扰动刚度的变化趋势如图 2(a)和图 2(b)所示,由于耦合效应的存在,每个谐振器的振幅响应均呈现双峰特征. 这两个峰分别对应于耦合系统的两种模态:同相模态和反相模态. 为展示谐振器振幅响应的演变规律,图2(c)和图2(d)



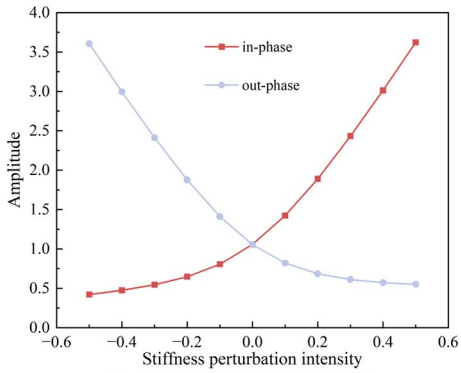
(a) 谐振器1在不同刚度扰动δ下的幅频响应曲线



(b) 谐振器2在不同刚度扰动δ下的幅频响应曲线



(c) 两个谐振器幅值随δ的变化规律



(d) 两种模态的幅值比随δ的变化关系

图 2 谐波激励下的模态局域化现象

Fig. 2 Modal localization under harmonic-driven

分别给出了两个谐振器的双峰振幅和两种模态幅值比随扰动强度变化的曲线,无扰动时能量在两个模态均匀分配,随着刚度扰动的引入,可观察到能量在两种模态间的重新分配,即随着刚度扰动增强,谐振器 1 的一个模态的振幅逐渐减小,而另一个模态的振幅则相应增大. 这种随着扰动刚度的大小变化,谐振器的能量不再均匀分布在两个模态中,而是逐渐集中于某一个振动模态的现象称为模态局域化现象.

若将输入 $F(t)$ 设置为高斯白噪声 $\xi(t)$,其功率谱密度为 $S_{\xi\xi}(\omega)=S_0$(理想情况下为常数),则输出位移响应的功率谱密度为

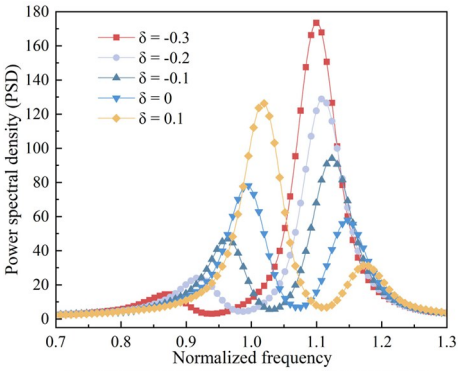
$$S_{x_1x_1}(\omega)=\left|\frac{H_{11}(\omega)}{\Gamma(\omega)}\right|^2S_{\xi\xi}(\omega)=\frac{[-\omega^2+(1+\kappa+\delta)\omega_0^2]^2+\omega^2\omega_0^2/Q^2}{|\Gamma(\omega)|^2}S_0$$

$$S_{x_2x_2}(\omega)=\left|\frac{H_{21}(\omega)}{\Gamma(\omega)}\right|^2S_{\xi\xi}(\omega)=\frac{\kappa^2\omega_0^4}{|\Gamma(\omega)|^2}S_0 \tag{9}$$

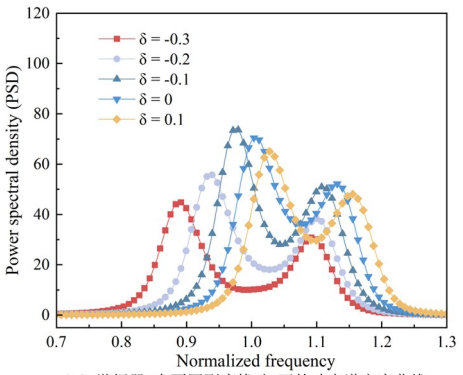
公式(9)可以看出,系统的位移功率谱密度与谐波激励的幅值表达式类似,其大小同样与谐振器刚度、耦合强度、扰动刚度大小、品质因数以及激励强度等多参数相关. 不同的是,噪声激励条件下,系

统响应不再是针对单一激励频率的响应,而是表现为对整个频率谱的响应,也就不像谐波激励那样需要将激励频率设定为某一特定频率.

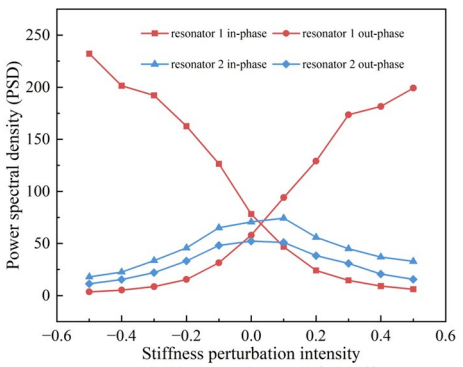
通过对噪声激励下的耦合谐振器系统进行数值仿真,得到仿真结果如图 3 所示,可以看出,噪声激励下耦合谐振器表现出与谐波激励条件下类似的响应情况,同样表现出模态局域化现象.



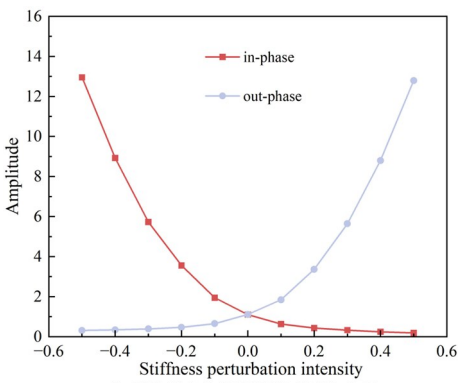
(a) 谐振器1在不同刚度扰动δ下的功率谱密度曲线



(b) 谐振器2在不同刚度扰动δ下的功率谱密度曲线



(c)两个谐振器PSD峰值随δ的变化规律



d) 两种模态的幅值比随δ的变化关系

图 3　噪声激励下的模态局域化现象

Fig. 3　Modal localization under noise-driven

2　实验验证

为了验证噪声激励模态局域化传感器的实际可行性.本文基于由两个相同的双端固支梁组成的微机械谐振器耦合系统开展了相关实验.器件采用传统的 SOI 工艺制备,结构及实验电路如图 4 所示,上方梁记作梁 1,下方梁记作梁 2,实验包括开环扫频和噪声激励两类测试.

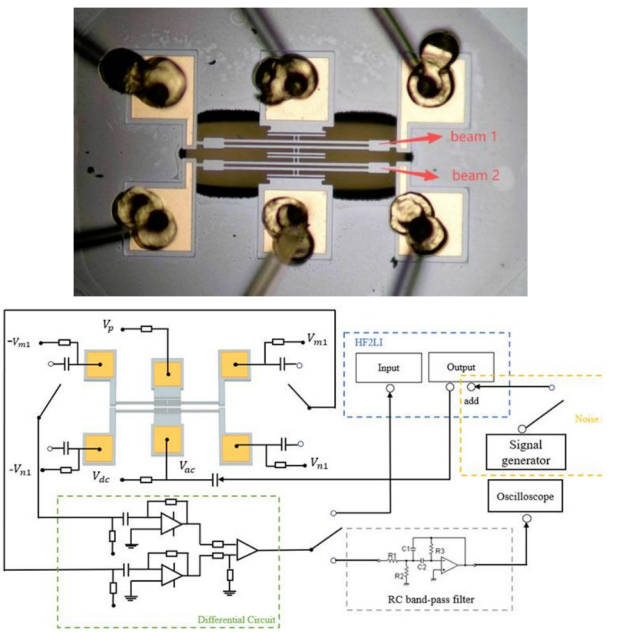


图 4　实验器件和实验电路图

Fig. 4　Experimental device and circuit diagram

开环扫频实验中,开启开关 S1,关闭 S3,静电驱动电压 $V_{dc}+V_{ac}\cos(\omega t)$ 施加于梁中间的极板上以驱动梁振动.通过调节梁两端电压在两梁间形成电势差,实现静电耦合,耦合电压 $V_c=[(V_{m1}-V_{m2})-(V_{n1}-V_{n2})]/2$.由于两端加载电压,梁振动时将因压阻效应产生运动电流,从而可检测其横向位移.运动电流经差分电路放大并转化为电压信号,送入锁相放大器(HF2LI)提取响应.为尽量减少空气阻尼带来的影响,整个实验在气压小于 0.1 Pa 的真空箱中进行.

由于制造误差,梁 1 与梁 2 的固有频率存在一定偏差,因此需通过电热调谐进行频率匹配.首先将系统置于非耦合状态,测量两梁独立振动响应.直流偏置电压 V_{dc} 为 20 V,交流激励电压 V_{ac} 为 50 mV,分别在梁 1 与梁 2 两端施加±10.2 V 与±9.98 V 电压,得到如图 5(a)所示的幅频响应.两梁频率差约为 42 Hz,梁 1 的峰值响应较大是由于其检测电

流更强. 在保持梁上电流不变的条件下,通过调节梁两端电压在两梁之间产生 8 V 的耦合电压,从而形成耦合谐振系统. 对梁 1 进行激励,同时测两梁响应,图 5(b)显示该系统存在两个共振峰,分别对应于同相模态与反相模态.

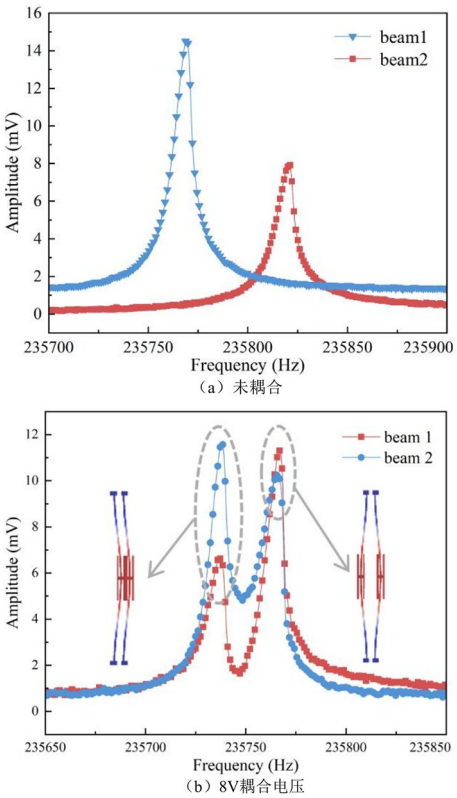


图 5 扫频下的幅频响应曲线

Fig. 5 Amplitude-frequency response curve under frequency sweep

进一步研究耦合谐振器在谐波激励条件下的模态局域化效应,需引入结构扰动. 本实验通过调节梁 2 中间极板的电压,利用静电负刚度效应调整梁的等效刚度,以实现刚度扰动. 图 6 为耦合电压设为 8 V,激励强度为 50 mV 条件下,不同扰动电压梁 1 和梁 2 对应的幅频响应曲线. 可以看出,随着扰动电压增大,梁 1 在同相模态下的响应幅值逐渐减小,反相模态的响应幅值则逐渐增大. 这表明随着刚度扰动的增大,梁 1 的振动能量由同相模态逐步转移至反相模态,当扰动强度达到某一临界值时,梁 1 在两种模态下的振动能量趋于均衡分布,随着扰动强度的进一步增大,能量继续由同相模态向反相模态转移. 梁 2 的响应始终保持均匀分布,仅幅值略有变化,实验结果与仿真结果高度一致.

上述实验验证了谐波激励下耦合谐振器的模态局域化现象,接下来进一步验证宽带噪声激励的可行性. 开启 S2 与 S3,其他条件与前文实验一致,将锁放的谐波激励输出通道关闭,仅通过信号发生器输出带限白噪声,经锁放输出端施加于梁 1 的中间极板,此时极板上的激励电压为 $V_{dc}+V_{noise}$. 噪声激励无法直接通过锁相放大器解调获取幅频响应,需通过示波器采集时域信号后进行频域分析. 由于测量阶段会引入一些测量噪声,可能干扰振动信号的采集,因此在信号采集前引入带通滤波环节. 本实验中使用的示波器型号是 HDO4054,为兼顾信号还原精度与数据处理效率,采样频率设定为 1.25 MHz,采样深度为 12.5 M,对应采样时长 10 s. 在噪声激励的强度为 5 Vpp、带宽为 0～250 kHz 条件下开展实验,通过示波器同步采集两梁的响应信号,并采用 Welch 方法计算功率谱密度(PSD),分辨率为 1.2 Hz,分段数为 199. 图 7 分别展示了梁 1 和梁 2 响应功率谱密度随扰动电压变化的实验结果,可以看出噪声激励下,耦合谐振器同样表现出模态局域化现象,且与谐波激励下具有高度一致性,验证了宽带噪声作为驱动手段在 MEMS 谐振器中的有效性.

同时,宽带噪声激励相比于谐波激励可以激发系统的多个模态,如图 8 所示,宽带噪声激励与谐波激励在模态激发能力上存在本质差异:对于梁 1

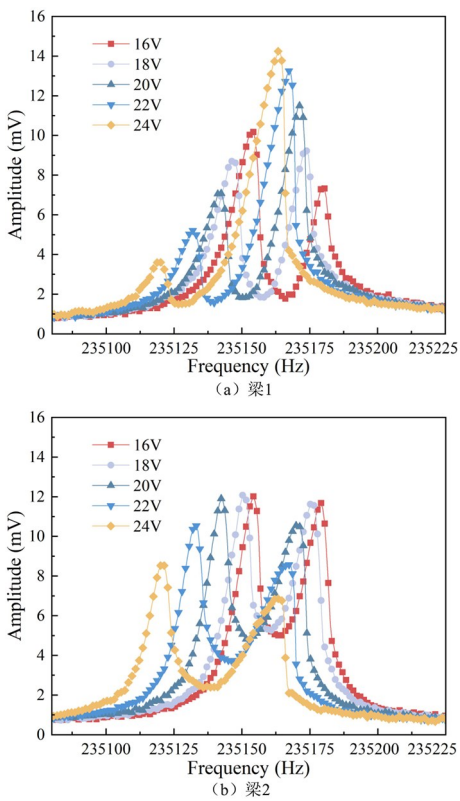


图 6 振幅随扰动电压的变化

Fig. 6 Variation of amplitude with perturbation voltage

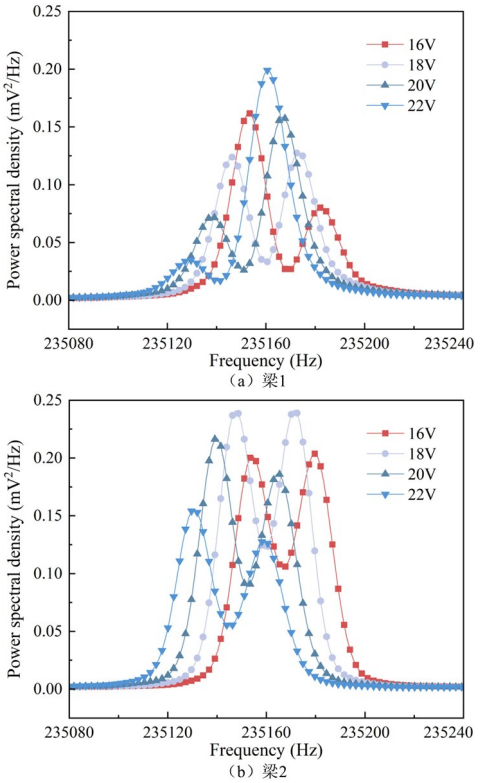


图 7　响应功率谱密度随扰动电压的变化

Fig. 7　Variation of response PSD with perturbation voltage

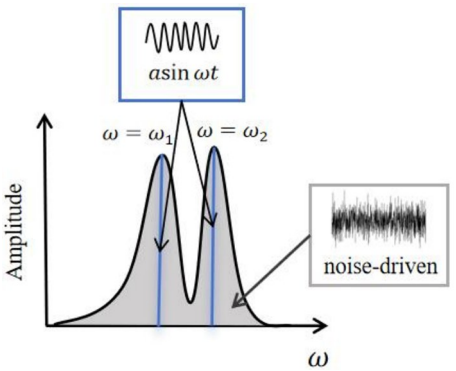


图 8　宽带噪声激励与谐波激励双梁幅频响应的对比示意图

Fig. 8　Comparison diagram of broadband noise excitation and harmonic excitation

的幅频响应,谐波激励由于频率单一性,仅能在特定频率激发单一模态,如同相模态 ω_1 或反相模态 ω_2,而宽带噪声激励因其宽频特性可同时覆盖 ω_1 和 ω_2,实现多模态同步激发.这一特性显著提高了测试效率,尤其适用于需同时考察多模态耦合效应的场景.

据振动能量的模态局部集中效应,我们分析得到两谐振器的幅值比与刚度干扰之间存在着与频率类似的函数关系,通过检测振动幅值比的变化可以直接反映刚度扰动大小,这就是利用模态局域化来设计传感器的基本原理.在谐波激励条件下,基于模态局域化的传感器通常将两个模态共振峰的振幅比作为输出量.类似地,在噪声激励条件下,可通过提取功率谱密度中对应模态频率处的峰值比,作为传感器的输出指标.进一步的实验结果(图 9)显示,两种激励方式下的幅值比输出趋势高度一致,验证了宽带噪声激励在模态局域化传感器中的可行性.

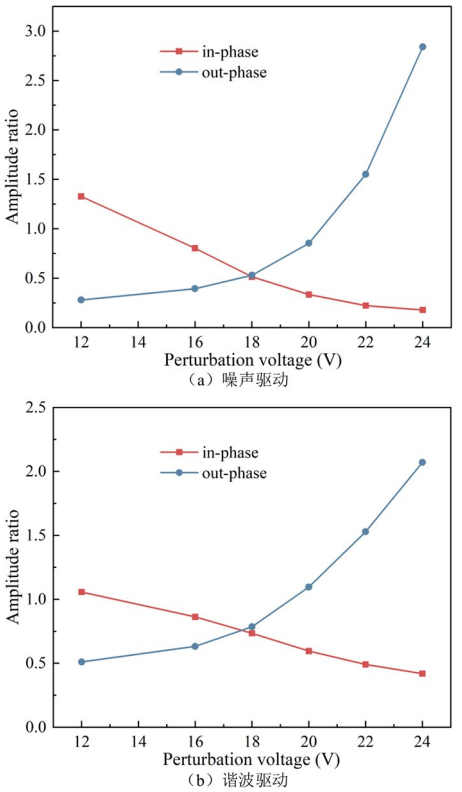


图 9　两种驱动情况下的幅值比随扰动电压的变化

Fig. 9　Variation of amplitude ratio with perturbation voltage under two driving conditions

3　结论

本文提出了一种基于宽带噪声激励的 MEMS 模态局域化传感新方法,突破了传统谐波激励需精确频率调谐的限制.首先建立了宽带噪声激励下模态局域化理论模型,推导了系统功率谱响应与结构参数的解析关系.通过理论分析与实验验证,证实宽带噪声可同时激发梁式耦合谐振器的多阶模态,有效诱导模态局域化效应,其功率谱密度中的幅值比变化与传统激励下高度一致.相较于单频谐波激励,该方法具有显著优势:(1)无需频率匹配:避免传统方法对驱动频率精度的苛刻要求;(2)多模态同步激励:单次激励即可覆盖宽频域,提升检测效率.理论分析和实验共同表明,宽带噪声激励可用于驱动 MEMS 并出现模态局域化响应,拓展了模态局域化机制在随机激励条件下的适用性,为微纳

传感器的发展提供了新的技术路径.

参考文献

[1] HODGES C H. Confinement of vibration by structural irregularity [J]. Journal of Sound and Vibration, 1982, 82(3): 411－424.

[2] PIERRE C, TANG D M, DOWELL E H. Localized vibrations of disordered multispan beams-Theory and experiment [J]. AIAA Journal, 1987, 25(9): 1249－1257.

[3] PIERRE C. Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures [J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 126(3): 485－502.

[4] PIERRE C, CHA P D. Strong mode localization in nearly periodic disordered structures [J]. AIAA Journal, 1989, 27(2): 227－241.

[5] HODGES C H, WOODHOUSE J. Vibration isolation from irregularity in a nearly periodic structure: Theory and measurements [J]. Acoustical Society of America Journal, 1983, 74(3): 894－905.

[6] 李冠强，谢建华. 双边碰撞 Duffing 振子的对称性、尖点分岔与混沌[J]. 动力学与控制学报，2021，19(5)：1－7.
LI G Q, XIE J H. Symmetry, cusp bifurcation and chaos of the double-impact duffing oscillator [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(5): 1－7. (in Chinese)

[7] 高行山，赵亚溥，吕胜利，等. 微机电系统多场耦合仿真分析[J]. 动力学与控制学报，2004，2(1)：70－74.
GAO H S, ZHAO Y P, LV S L, et al. On the simulation analysis of mixed-energy domain for MEMS [J]. Journal Of Dynamics And Control, 2004, 2(1): 70－74. (in Chinese)

[8] WANG X F, SHI Z, YANG Q Q, et al. Recent advancements of nonlinear dynamics in mode coupled microresonators: a review [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2025, 46(2): 209－232.

[9] 王贵杰，储昭志，杨鹏飞等. 一种高品质因子模态局域化 MEMS 电场传感器[J]. 电子与信息学报，2025，47(6)：2015－2022.
WANG G J, CHU Z Z, YANG P F, et al. A high-quality factor mode-localized MEMS electric field sensor [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2025, 47(6): 2015－2022. (in Chinese)

[10] 王子龙，刘向明，高雅浩，等. 一种基于模态局域化的高性能 MEMS 静电压传感器[J]. 仪表技术与传感器，2021，(10)：1－5.
WANG Z L, LIU X M, GAO Y H, et al. High-performance MEMS electrostatic potential sensor based on mode localization, instrument technique and sensor, 2021, 10: 1－5. (in Chinese)

[11] WANG D F, CHATANI K, IKEHARA T, et al. Mode localization analysis and characterization in a 5-beam array of coupled nearly identical micromechanical resonators for ultra-sensitive mass detection and analyte identification [J]. Microsystem Technologies, 2012, 18(11): 1923－1929.

[12] KANG H, RUAN B, HAO Y C, et al. Mode-localized accelerometer with ultrahigh sensitivity [J]. Science China Information Sciences, 2021, 65(4): 142402.

[13] LIU Z H, CHEN Y Z, WANG X F, et al. Nonlinearity enhanced mode localization in two coupled MEMS resonators [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2024, 271: 109133.

[14] THIRUVENKATANATHAN P, YAN J, SESHIA A A. Common mode rejection in electrically coupled MEMS resonators utilizing mode localization for sensor applications [C]//2009 IEEE International Frequency Control Symposium Joint with the 22nd European Frequency and Time Forum. New York: IEEE, 2009: 358－363.

[15] ZHANG H M, ZHONG J M, YUAN W Z, et al. Ambient pressure drift rejection of mode-localized resonant sensors [C]//2017 IEEE 30th International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS). New York: IEEE, 2017: 1095－1098.

[16] ZHONG J M, YANG J, CHANG H L. The temperature drift suppression of mode-localized resonant sensors [C]//2018 IEEE Micro Electro Mechanical Systems (MEMS). New York: IEEE, 2018: 467－470.

[17] RABENIMANANA T, WALTER V, KACEM N, et al. Mass sensor using mode localization in two weakly coupled MEMS cantilevers with different lengths: Design and experimental model validation [J]. Sensors and Actuators A: Physical, 2019, 295: 643－652.

[18] ZHANG H M, SOBREVIELA G, PANDIT M, et al. A low-noise high-order mode-localized MEMS accelerometer [J]. Journal of Microelectromechanical Systems, 2021, 30(2): 178－180.

[19] LI H, ZHANG Z, ZU L H, et al. Micromechanical mode-localized electric current sensor [J]. Microsystems & Nanoengineering, 2022, 8: 42.

[20] LI B Y, ZHANG H M, ZHONG J M, et al. A mode localization based resonant MEMS tilt sensor with a linear measurement range of 360° [C]//2016 IEEE 29th International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS). January 24－28, 2016, Shanghai, China. IEEE, 2016: 938－941.

[21] ALGAMILI A S, KHIR M H M, DENNIS J O, et al. A review of actuation and sensing mechanisms in MEMS-based sensor devices [J]. Nanoscale Research Letters, 2021, 16(1): 16.

[22] 刘中华,徐友良,宦荣华. 参激微机械谐振器幅频响应的翘尾效应及其电热调控[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(10): 51－58.
LIU Z H, XU Y L, HUAN R H. The tail-up effect of amplitude-frequency response and its electrothermal control of parametrically excited microelectromechanical resonators [J]. Journal Of Dynamics and Control, 2024, 22(10): 51－58. (in Chinese)

[23] SATHYA S, MURUGANAND S, MANIKANDAN N, et al. Design of capacitance based on interdigitated electrode for BioMEMS sensor application [J]. Materials Science in Semiconductor Processing, 2019, 101: 206－213.

[24] LIKHITE R, BANERJEE A, MAJUMDER A, et al. Parametrically amplified low-power MEMS capacitive humidity sensor [J]. Sensors, 2019, 19(18): 3954.

[25] BA HASHWAN S S, KHIR M H M, NAWI I M, et al. A review of piezoelectric MEMS sensors and actuators for gas detection application [J]. Discover Nano, 2023, 18(1): 25.

[26] LIU Z M, AYAZI F. A review of eigenmode and frequency control in piezoelectric MEMS resonators [J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 2023, 70(10): 1172－1188.

[27] WANG L L, WANG Y, ZHANG P, et al. Enhanced mode localization in 2-DoF weakly coupled electrostatic MEMS resonant sensor devices via blue-sideband excitation [J]. IEEE Transactions on Electron Devices, 2025, 72(3): 1345－1351.

[28] WANG G J, HOU S L, KACEM N, et al. Tunable energy transfer in coupled nonlinear MEMS resonators under parametric modulation for enhanced sensor performance [J]. Microsystems & Nanoengineering, 2025, 11(1): 210.

[29] QIAO Y, ELHADY A, ARABI M, et al. Thermal noise-driven resonant sensors [J]. Microsystems & Nanoengineering, 2024, 10: 90.

[30] PI H L, WANG S M, FENG Y, et al. Optical mode localized sensing in on-chip coupled microring resonators [J]. Optics Express, 2024, 32(22): 39996－40006.

[31] ZHANG Z, LI H, HOU C, et al. Virtually coupled resonators with modal dominance for improved sensitivity and bandwidth [J]. Microsystems & Nanoengineering, 2025, 11(1): 57.