

基于非线性能量汇的 Timoshenko 输流管道 振动控制^{*}

邵宇飞^{1,2} 顾颖宾¹ 丁虎^{2†}

(1. 中国核能电力股份有限公司, 北京 100000)

(2. 上海大学力学与工程科学学院, 上海 200444)

摘要 输流管道具有重要的工程价值. 工程管道往往会受到各种因素影响而产生振动. 振动幅值过大会对管道本身以及支撑带来损害, 即使是小幅振动也会带来累积性的损伤. 因此如何减弱输流管道的振动成了一个亟须研究的课题. 非线性能量汇 (nonlinear energy sink, NES) 胞元作为一种新型的减振概念被应用于本文中管道的减振. 本文采用广义哈密顿原理, 基于 Timoshenko 梁模型建立输流管道与 NES 胞元减振系统的耦合振动控制方程, 使用复模态法求解系统的固有频率. 系统的响应由谐波平衡法和数值方法求解, 研究了不同 NES 胞元数量以及不同安装方式对振动抑制效率的影响, 研究发现外激励在特定频率附近时, 单点集中式分布拥有更出色的减振性能, 而多点集中式和均匀平铺式分布对于宽频激励有更好的减振效果, 为工程中管道的减振提供理论指导.

关键词 输流管道, 非线性能量汇, 胞元, 振动控制

中图分类号: O327

文献标志码: A

Vibration Control of a Timoshenko Fluid-Conveying Pipe Based on Nonlinear Energy Sink^{*}

Shao Yufei^{1,2} Gu Yingbin¹ Ding Hu^{2†}

(1. China National Nuclear Power Co., Ltd., Beijing 100000, China)

(2. School of Mechanics and Engineering Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract Fluid-conveying pipes hold significant engineering value. In practical applications, pipes are often subjected to vibrations due to various factors. Excessive vibration amplitudes can cause damage to the pipe itself and its supporting structures, while even minor vibrations may lead to cumulative damage over time. Therefore, mitigating pipe vibrations has become a critical issue that needs to be addressed. In this study, a fluid-conveying pipe model is established based on the Timoshenko beam theory. The nonlinear energy sink (NES) cell, as a novel vibration suppression concept, is applied to reduce pipe vibrations. The governing equations of the system are derived using the generalized Hamilton's principle, and the system's natural frequencies are obtained through the complex modal method. The system's response is solved using the harmonic balance method and numerical simulations. The influence of different NES cell quantities and installation configurations on vibration suppression efficiency is investigated. The study found that when external excitation is near specific frequencies, a single-point concentrated

distribution exhibits superior vibration reduction performance, whereas multi-point concentrated and uniform distributions provide better vibration reduction efficiency for broadband excitation, providing theoretical guidance for vibration control in engineering pipes.

Key words fluid-conveying pipe, nonlinear energy sink, cell, vibration reduction

引言

输流管道广泛应用于航空航天^[1-4]、海洋工程^[5-7]、核电^[8]及城市供排水^[9]等工程领域,其安全稳定运行至关重要.然而,在流体输送过程中,管道系统常因内部流体的流动激励、压力脉动、机械扰动等因素产生振动,严重时可能导致结构疲劳、连接件松动甚至管道破裂,引发安全事故.因此,研究输流管道的振动特性,尤其是其固有频率及减振方法,具有重要的工程价值^[10-13].以往的研究中,学者们较多地使用基于 Euler-Bernoulli 梁理论的管道模型^[13-15].该模型在求解细长管道时具有良好的计算精度.然而随着管道变得短粗或者需要计算高阶模态时,考虑管道剪切变形和横截面扭转运动的基于 Timoshenko 梁理论的管道模型更加精准^[16-21].

在振动抑制领域,被动控制由于其结构较为简单、成本较低以及安装和维护方便的特点备受青睐^[22,23].非线性能量汇(NES)是一种常用的被动减振结构,因为其具有宽频减振以及自适应频率的特点广泛应用于工程中^[24-28].然而,NES 也存在一些问题,比如对于多模态结构,单个 NES 难以兼顾多个模态的共振抑制,而且在剧烈振动时 NES 结构的可靠性不够强.随之,Ding 等提出了 NES 胞元的概念,将单个 NES 通过方便拆卸的外壳相互连接,通过灵活组合 NES 胞元的数量和连接方式实现对主系统梁的减振^[29].通过分布式布置 NES 胞元的减振策略,能够兼顾多模态共振,并提高 NES 对强激励振动的抑制效率.随后,NES 胞元被应用于更多的场景的减振研究^[30-32].

结合输流管道的振动控制需求,以及 NES 胞元对多模态结构共振的有效抑制能力,本文聚焦于 Timoshenko 模型的输流管道在安装了 NES 胞元后简谐激励下的非线性强迫振动问题.首先,基于哈密顿原理建立输流管道耦合 NES 胞元的非线性振动微分方程,并使用伽辽金截断法将偏微分方程离散为非线性的常微分方程.使用复模态法求解系

统的固有频率,并且与有限元数值计算的输流管道固有频率进行比较验证.然后,利用谐波平衡法和数值方法求解非线性常微分方程得到系统的频率响应曲线,研究 NES 胞元对管道减振效率的影响.

1 输流管道与 NES 胞元力学模型

根据实际管道,建立安装非线性能量汇(NES)胞元的两端固支输流管道的非线性振动模型.图 1 (a)为输流管道系统的力学模型示意图.输流管道采用 Timoshenko 梁理论建模,考虑其黏弹性、横向和横截面旋转耦合.管道的长度为 L ,外径和内径分别为 D 和 d ,密度为 ρ_p ,剪切模量为 G ,弹性模量为 E ,截面绕中性轴转动惯量为 I_p .假定管道中的流体以恒定速度 V 流动且不可压缩,流体的密度为 ρ_f .管道在距离左端 s 处受到一个周期的力激励 $F=F_0\sin(\omega t)$,在距离左端 l 处安装了数个 NES 胞元.管道横向位移和轴向位移分别用 $v(x,t)$ 和 $u(x,t)$ 表示,使用 $\varphi(x,t)$ 表示 Timoshenko 输流管横截面的旋转角度,如图 1 (b)所示.

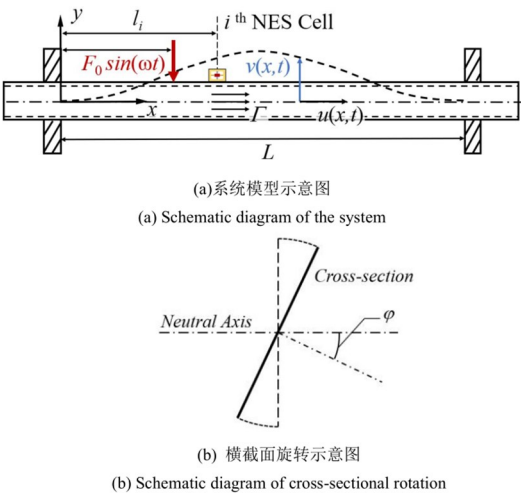


图 1 安装非线性能量汇胞元的输流管道系统模型和管道横截面旋转的示意图

Fig. 1 The schematic diagram of model in the fluid-conveying pipe with nonlinear energy sink cells and the cross-sectional rotation of the pipe

单个 NES 胞元模型如图 2 所示.第 i 个 NES 胞元的振子质量为 m_i ,非线性刚度为 k_{Ni} ,阻尼为

c_{Ni} , 振子竖直方向的位移用 $Y_i(t)$ 表示. 胞元内添加了刚度为 k_i 的限幅弹簧, 限幅距离为 H_i .

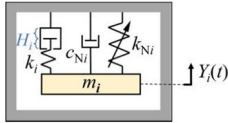


图 2 单个 NES 胞元模型图
Fig. 2 Model diagram of a single NES cell

第 i 个 NES 胞元的控制方程为

$$m_i \ddot{Y}_i + [k_{Ni}(Y_i - v_{li})^3 + c_{Ni}(\dot{Y}_i - \dot{v}_{li},_t) + G(Y_i - v_{li})] = 0 \tag{1}$$

其中 v_{li} 表示 $v(l_i, t)$, 限幅弹簧恢复力函数 G 可以表示为

$$G(Y_i - v_{li}) = \begin{cases} k_i(Y_i - v_{li} + H_i), & Y_i - v_{li} < -H_i \\ 0, & -H_i \leq Y_i - v_{li} \leq H_i \\ k_i(Y_i - v_{li} - H_i), & Y_i - v_{li} > H_i \end{cases} \tag{2}$$

在输流管道上安装 N 个 NES 胞元, 管道与 NES 胞元的相互作用力可以表示为

$$\hat{F}_i = k_{Ni}(Y_i - v_{li})^3 + c_{Ni}(\dot{Y}_i - \dot{v}_{li},_t) + G[Y_i - v_{li}] \tag{3}$$

该作用于输流管道上的力所做虚功的变分为

$$\delta W_F = - \int_0^L \sum_{i=1}^N \hat{F}_i \delta v \, dx \tag{4}$$

基于广义哈密顿原理能够导出 Timoshenko 输液管道横向非线性振动的偏微分—积分控制方程^[16]:

$$\begin{aligned} &(\rho_p A_p + \rho_f A_f) v_{,tt} + 2\rho_f A_f \Gamma v_{,xt} + \\ &\rho_f A_f \Gamma^2 v_{,xx} - v_{,xx} \frac{EA_p}{2L} \int_0^L v_{,x}^2 \, dx + \\ &c_0 v_{,t} - A_p k_s G(v_{,xx} - \varphi_{,x}) + \sum_{i=1}^N \delta(x - l_i) \hat{F}_i + \delta(x - s) F = 0, \\ &\rho_p I_p \varphi_{,tt} - EI_p \varphi_{,xx} - A_p k_s G(v_{,x} - \varphi) = 0, \\ &m_i \ddot{Y}_i + \{k_{Ni}(Y_i - v_{li})^3 + c_{Ni}(\dot{Y}_i - \dot{v}_{li},_t) + \\ &G[Y_i - v_{li}]\} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

两端的固支边界条件为

$$\begin{aligned} &v(0, t) = v(L, t) = 0, u(0, t) = u(L, t) = 0, \\ &\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = 0, \\ &v_{,x}(0, t) = v_{,x}(L, t) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

在后续的计算中, 分段函数在分段点处的不连续导数会给计算带来不便. 双曲正切函数由于其奇函数具有上下界的特性, 在将分段函数处理为连续

函数方面有很好的效果. 取连续函数为

$$T_i(x) = k_i(x - H_i)\{1 + \tanh[\epsilon(x - H_i)]\}/2 + k_i(x + H_i)\{1 - \tanh[\epsilon(x + H_i)]\}/2 \tag{7}$$

其中 ϵ 是精度参数.

2 系统响应近似解和数值验证

首先, 使用复模态假设法(CMM)求解系统的固有频率, 计算结果如下表所示, 并使用有限元(finite element method, FEM)软件 ANSYS 建模检验计算结果. 从表 1 中可以看出, 二者计算结果吻合良好.

表 1 输流管道前四阶固有频率
Table 1 The first four natural frequencies of the fluid-conveying pipe

Order	Results (Hz)	
	CMM	FEM
1	213.10	215.52
2	544.70	538.73
3	960.05	952.12
4	1440.42	1414.6

在本节中, 采用龙格—库塔法(runge-kutta method, RKM)计算了管道在外激励下的幅频曲线, 并与谐波平衡法(harmonic balance method, HBM)对比验证. 然后, 计算不同胞元数量下系统的响应.

在本文中, 对所有 NES 胞元使用相同的参数. 令 $m_i = m, k_{Ni} = k_N, c_{Ni} = c_N, k_i = k, H_i = H$. 用于计算系统固有频率和响应的物理参数如表 2 所示.

表 2 算例参数
Table 2 Example parameters

Symbol	Value and Unit	Symbol	Value and Unit
L	1.6 m	F_0	100 N
D	0.14 m	ρ_f	1000 kg/m ³
d	0.132 m	V	1 m/s
ρ_p	7930 kg/m ³	l	1 m
E	194 GPa	m	0.5 kg
μ	0.3	k_N	5×10 ⁹ N/m ³
G	74.6 GPa	c_N	3 N s/m
I_p	3.955×10 ⁻⁶ m ⁴	k	500 N/m
c_0	10 N s/m	H	0.01 m
s	0.667 m	N	10

接下来,使用伽辽金截断法对输流管道连续体系统离散化处理.用 N_T 表示截断阶数,为满足边界条件,方程(5)的解设为

$$\begin{cases} v(x, t) = \sum_{j=1}^{N_T} q_j^v(t) \left\{ \sinh\left(\frac{\beta_j x}{L}\right) - \sin\left(\frac{\beta_j x}{L}\right) + \xi_j \left[\cosh\left(\frac{\beta_j x}{L}\right) - \cos\left(\frac{\beta_j x}{L}\right) \right] \right\} \\ \varphi(x, t) = \sum_{j=1}^{N_T} q_j^\varphi(t) \left\{ \cosh\left(\frac{\beta_j x}{L}\right) - \cos\left(\frac{\beta_j x}{L}\right) + \xi_j \left[\sinh\left(\frac{\beta_j x}{L}\right) + \sin\left(\frac{\beta_j x}{L}\right) \right] \right\} \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\xi_j = [\sinh(\beta_j) - \sin(\beta_j)] / [\cos(\beta_j) - \cosh(\beta_j)]$, β_j 为方程 $\cos(\beta) \cdot \cosh(\beta) = 1$ 的第 j 个解. 设权函数为

$$\begin{cases} w_i(x) = \sinh\left(\frac{\beta_i x}{L}\right) - \sin\left(\frac{\beta_i x}{L}\right) + \xi_i \left[\cosh\left(\frac{\beta_i x}{L}\right) - \cos\left(\frac{\beta_i x}{L}\right) \right] \\ u_i(x) = \cosh\left(\frac{\beta_i x}{L}\right) - \cos\left(\frac{\beta_i x}{L}\right) + \xi_i \left[\sinh\left(\frac{\beta_i x}{L}\right) + \sin\left(\frac{\beta_i x}{L}\right) \right], i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (9)$$

将解式(8)代入方程(5)再乘以权函数并在 $x=0 \sim L$ 上进行积分,从而得到 $2N_T+1$ 个离散的控制方程. 后续 RKM 以及 HBM 的求解将基于截断后的方程计算.

综合计算精度与计算速度,选取三阶截断阶数和一阶谐波展开计算系统的幅频响应曲线,即 $N_T=3$,计算结果如图 3 所示,两种安装模式下两种计算方法得到的结果吻合较为良好.

从图 4 中可以看到,随着安装 NES 胞元个数的增加,系统在一阶固有频率处的响应不断降低,

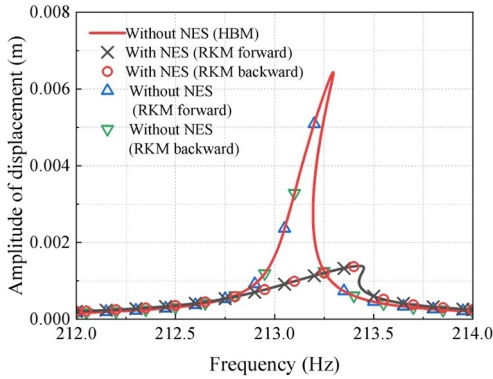


图 3 HBM 和 RKM 结果对比 ($N_T=3, N=12$)
Fig. 3 Comparison of the results of HBM and RKM ($N_T=3, N=12$)

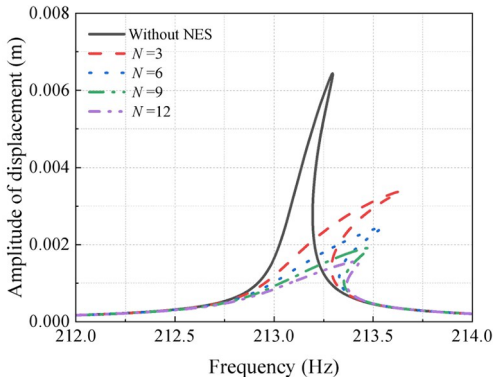
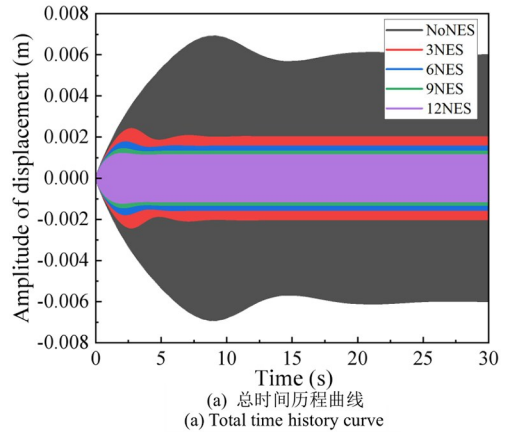


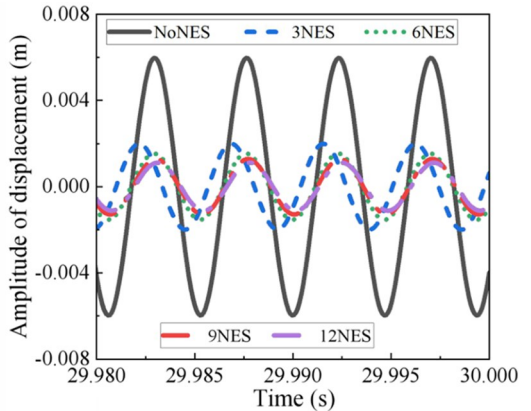
图 4 不同数量胞元下系统的幅频响应曲线
Fig. 4 The amplitude-frequency response curves of the system under different numbers of NES cells

减振效果随着 NES 胞元个数的增加不断提高.

从图 5 中可以看出,随着 NES 胞元数量的增加,系统的响应逐渐降低,并且能够更快地到达稳态阶段.



(a) 总时间历程曲线
(a) Total time history curve



(b) 达到稳态的时间历程曲线
(b) The steady-state time history curve

图 5 系统的时间历程曲线

Fig. 5 The time history curve of the system

3 NES 胞元不同分布方式

在安装 NES 胞元时,考虑三种不同的分布方式,如图 6 所示.

使用三阶截断阶数和一阶谐波展开计算系统

的幅频响应曲线。从图 7 (a)中可以看出,随着 NES 胞元数量的增加,系统的响应在不断降低,并且单点集中的安装方式具有更好的减振效果;多点集中式和均布式安装二者相比多点集中式安装的响应略低一些。为了进一步探明减振交过,可以通过安装 NES 后管道响应幅值均方根的降低率来定义减振效率,如式(10)所示。

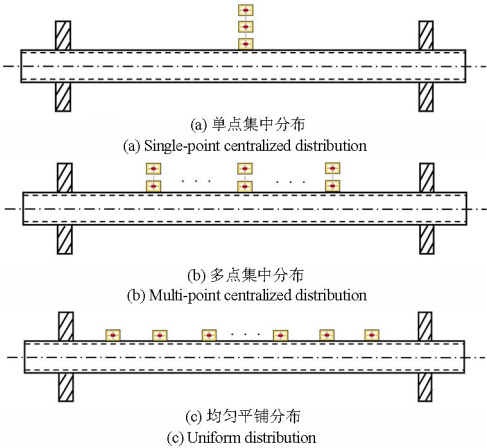


图 6 NES 胞元不同分布方式
Fig. 6 Different distribution methods of NES cells

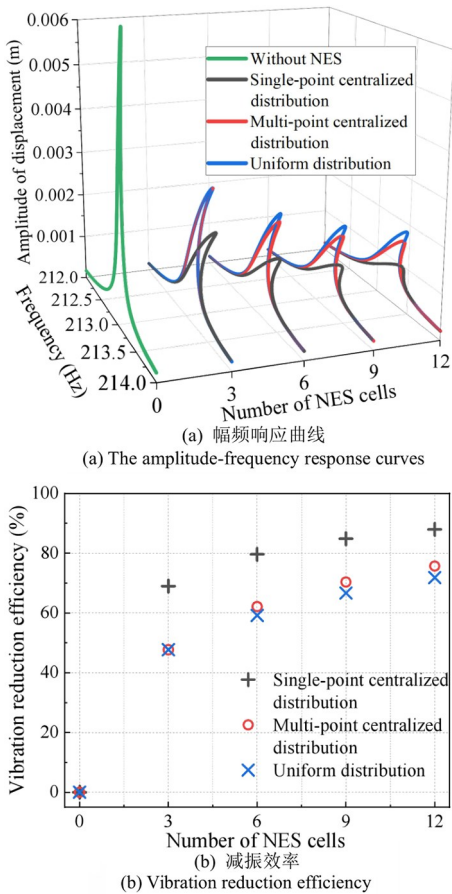


图 7 不同 NES 安装方式下系统的幅频响应曲线与减振效率(一阶固有频率附近)
Fig. 7 The amplitude-frequency response curves and vibration reduction efficiency of the system under different distribution patterns (Near the first-order natural frequency)

$$\eta_A = \frac{\bar{A}_{\text{uncontrolled}} - \bar{A}_{\text{NES}}}{\bar{A}_{\text{uncontrolled}}} \times 100\% \tag{10}$$

图 7 (b)为三种安装模式下输流管道安装不同数量 NES 胞元数量时的减振效率。可以看到,随着胞元数量的增加,系统的减振效率不断提高。然而随着胞元数量进一步增加,减振效率的提升速率在变缓慢。其中,中点集中式安装模式拥有最高的减振效率,随之是多点集中式安装方式。

当外激励频率来到二阶固有频率附近时,中间集中分布的方式因为所处位置为振动节点,从而失去减振效果。因此此时单点集中安装 NES 的位置变更至二阶振型峰值处。根据复模态假设法得到系统二阶振型在 $x=0.4688\text{ m}$ 处振型取得最值。因此在计算二阶频率附近的幅频响应时,将单点集中安装的位置调整到该处,即 $l=0.4688\text{ m}$,如图 8 所示。从图 9 中可以得到与图 7 中类似的现象与结论,即减振效率随着胞元数量的增加而提升,并且 NES 胞元单点集中式分布具有最佳的减振效果,其次是多点集中式安装方法,最后是均匀分布安装方法。

值得注意的是,在图 9 中,为了应对二阶固有频率附近的外激励所带来的振动,单点集中分布的位置做了调整,安放在了振型的峰值处。这样的安装策略势必带来不便,因为需要针对不同频率外激

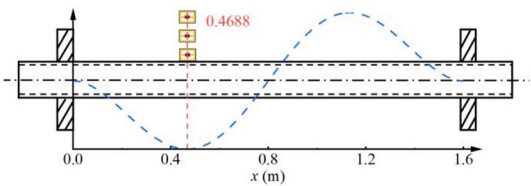
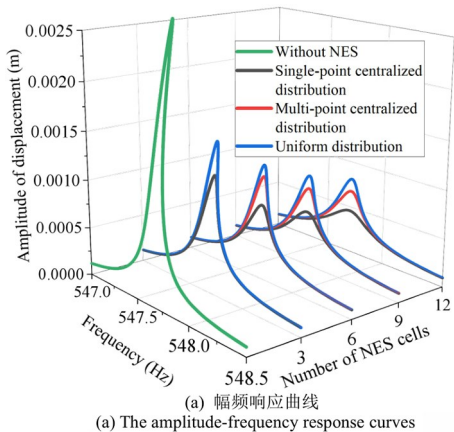


图 8 基于二阶振型新的单点集中分布位置
Fig. 8 The new single-point concentrated distribution position based on the second-order vibration mode



(a) 幅频响应曲线
(a) The amplitude-frequency response curves

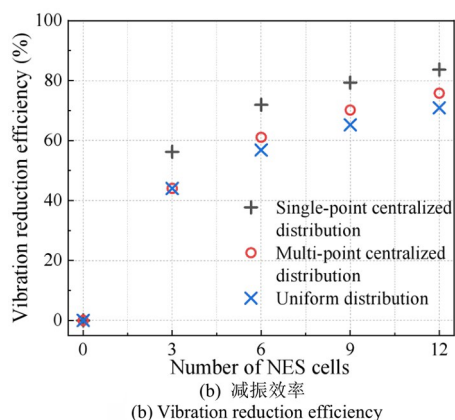


图 9 不同 NES 安装方式下系统的幅频响应曲线与减振效率(二阶固有频率附近)

Fig. 9 The amplitude-frequency response curves and vibration reduction efficiency of the system under different distribution patterns (Near the second-order natural frequency)

励做出调整,而多点集中式分布与均匀平铺分布的安装方法更为普适和实用。

4 结论

本文着重 NES 胞元对于基于 Timoshenko 梁理论的输流管道的减振研究,通过建立理论模型和控制方程,使用谐波平衡法与数值方法相结合,研究了不同数量 NES 胞元以及不同分布安装方式对于减振性能的影响,得出了以下结论:

(1) NES 胞元具有良好的减振性能,并且减振效率随着胞元数量增加而提高,并且更多数量的 NES 胞元能让系统更早地进入稳态振动;

(2) NES 胞元在达到一定数量时,减振效率的提升速度变缓,这意味着可以根据实际情况灵活选择安装不同数量的胞元以平衡减振效率与其他客观因素之间的关系;

(3) NES 胞元单点集中式分布针对特定固有频率附近的激励拥有出色的减振效果,而多点并联式分布和均匀平铺式分布安装对于宽频激励的减振拥有更好的适应性。

本文为工程实际中输流管道的减振提供了指导,并且在未来将着重于研究如何将 NES 胞元应用于更多的实际场景。

参考文献

[1] 张胜发, 杨乐, 邵敏强. 航空液压管路系统动力学特性研究[J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(6): 58—63.

ZHANG S F, YANG L, SHAO M Q. Dynamic characteristics of aviation hydraulic piping system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(6): 58—63. (in Chinese)

[2] 陈奕丰, 范鑫, 魏莎, 等. 基于 Kriging 模型的航空发动机管道系统有限元模型修正[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(9): 23—32.

CHEN Y F, FAN X, WEI S, et al. Finite element model updating of an aeroengine pipe system based on Kriging model [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(9): 23—32. (in Chinese)

[3] GAO P X, YU T, ZHANG Y L, et al. Vibration analysis and control technologies of hydraulic pipeline system in aircraft: a review [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2021, 34(4): 83—114.

[4] 李占营, 王建军, 邱明星. 航空发动机空间管路系统的流固耦合振动特性[J]. 航空动力学报, 2016, 31(10): 2346—2352.

LI Z Y, WANG J J, QIU M X. Dynamic characteristics of aero-engine pipe system considering fluid-structure coupling [J]. Journal of Aerospace Power, 2016, 31(10): 2346—2352. (in Chinese)

[5] LI T Y. On the formulation of a finite element method for the general pipe-in-pipe structure system: Impact buckling analysis [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2018, 135: 72—100.

[6] PAN H Y, LI H N, LI C, et al. Probabilistic seismic responses and failure analyses of free-spanning subsea pipelines under offshore spatial earthquake motions [J]. Thin-Walled Structures, 2022, 179: 109566.

[7] 余建星, 李振眠, 余杨, 等. 轴力和水压作用下深水输液管道湿模态振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2021, 40(12): 90—96, 113.

YU J X, LI Z M, YU Y, et al. Wet modal vibration analysis for submarine fluid-conveying pipeline under axial tension and hydrostatic pressure [J]. Journal of Vibration and Shock, 2021, 40(12): 90—96, 113. (in Chinese)

[8] 林磊, 陈志林, 徐德城, 等. 核电厂管道系统的典型振动现象及其治理[J]. 中国核电, 2023, 16(1): 60—65.

LIN L, CHEN Z L, XU D C, et al. Typical vibration phenomena of the piping system in nuclear power plant and the mitigation measures [J]. China Nuclear Power, 2023, 16(1): 60—65. (in Chinese)

- [9] TAFSIROJJAMAN T, MANALO A, TIEN C M T, et al. Analysis of failure modes in pipe-in-pipe repair systems for water and gas pipelines [J]. *Engineering Failure Analysis*, 2022, 140: 106510.
- [10] 丁虎. 输流管道振动的被动控制研究[J]. *自然杂志*, 2022, 44(4): 316—322.
- DING H. Passive control of vibration in pipes conveying fluid [J]. *Chinese Journal of Nature*, 2022, 44(4): 316—322. (in Chinese)
- [11] 唐冶, 高传康, 丁千, 等. 输流管道动力学与控制领域的最新进展[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(6): 18—30.
- TANG Y, GAO C K, DING Q, et al. Review on dynamic and control of pipes conveying fluidan [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(6): 18—30. (in Chinese)
- [12] 郭宇辰, 丁虎. L形输流管道三维振动固有特性研究[J]. *宁夏大学学报(自然科学版)*, 2024, 45(3): 259—266.
- GUO Y C, DING H. Research on natural characteristics of three-dimensional vibration of L-shaped pipe [J]. *Journal of Ningxia University (Natural Science Edition)*, 2024, 45(3): 259—266. (in Chinese)
- [13] 何毅翔, 邢浩然, 代胡亮, 等. 外流作用下管道流固耦合非线性动力学研究进展[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(6): 3—17.
- HE Y X, XING H R, DAI H L, et al. Research progress on fluid-structure interaction vibrations of pipes subjected to external flows [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(6): 3—17. (in Chinese)
- [14] 谭健, 张理, 王冲, 等. 基于广义积分变换法海洋温差能大口径冷水管强迫振动分析[J]. *振动与冲击*, 2024, 43(5): 41—51, 102.
- TAN J, ZHANG L, WANG C, et al. Forced vibration analysis of large-diameter cold water pipe with ocean temperature difference energy based on generalized integral transformation method [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2024, 43(5): 41—51, 102. (in Chinese)
- [15] 田瑞, 常亮, 韩涛, 等. 输液直管道流-固耦合振动响应计算方法与应用[J]. *应用数学和力学*, 2024, 45(12): 1494—1505.
- TIAN R, CHANG L, HAN T, et al. The calculation method and application of fluid-solid coupling vibration responses of straight infusion pipeline [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, 45(12): 1494—1505. (in Chinese)
- [16] 郭勇. 具有环状运动约束的悬臂输流管道的非线性振动特征[J]. *动力学与控制学报*, 2024, 22(5): 24—37.
- GUO Y. Nonlinear vibration characteristics of cantilevered fluid-conveying pipe with circular motion constraint [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2024, 22(5): 24—37. (in Chinese)
- [17] SHAO Y F, FAN X, SHU S, et al. Natural frequencies, critical velocity and equilibriums of fixed-fixed Timoshenko pipes conveying fluid [J]. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2022, 10(5): 1623—1635.
- [18] 袁嘉瑞, 丁虎, 陈立群. 微曲输流管道振动固有频率分析与仿真[J]. *应用数学和力学*, 2022, 43(7): 719—726.
- YUAN J R, DING H, CHEN L Q. Analysis and simulation of natural frequencies of slightly curved pipes [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, 43(7): 719—726. (in Chinese)
- [19] 高思禹, 毛晓晔, 丁虎, 等. 热环境中超临界黏弹性输流管道自由振动分析[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(6): 39—46.
- GAO S Y, MAO X Y, DING H, et al. Free vibration analysis on supercritical viscoelastic pipes conveying fluid in thermal environment [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(6): 39—46. (in Chinese)
- [20] 杨佳丽, 杨虹, 李伟. 旋转 Timoshenko 输流管道的固有频率和稳定性分析[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(2): 58—65.
- YANG J L, YANG H, LI W. Natural frequency and stability analysis of rotating Timoshenko pipe conveying fluid [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(2): 58—65. (in Chinese)
- [21] 随岁寒, 李成. 输流管道弯曲和振动的有限元分析[J]. *动力学与控制学报*, 2022, 20(4): 83—90.
- SUI S H, LI C. The finite element analysis on bending and vibration of the fluid-conveying pipes [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2022, 20(4): 83—90. (in Chinese)
- [22] SARKAR N, KONAR T, GHOSH A C. Passive vibration control techniques for offshore structures under different environmental loading: a review [J]. *Ocean Engineering*, 2025, 320: 120296.
- [23] MALGACA L, VATAN CAN S. Hybrid passive

vibration control of lightweight manipulators [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2024, 220: 111640.

[24] GENG X F, DING H, JING X J, et al. Dynamic design of a magnetic-enhanced nonlinear energy sink [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2023, 185: 109813.

[25] 毛晓晔, 吴安东, 丁虎. 矩形悬臂板弯扭耦合非线性振动建模及分布式吸振控制[J]. 力学学报, 2025, 57(4): 987—996.

MAO X Y, WU A D, DING H. Modeling and distributed vibration control of bending-torsion coupled vibrations in rectangular cantilever plates [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2025, 57(4): 987—996. (in Chinese)

[26] 高原, 张振, 方勃. 基于负刚度惯容型非线性能量汇的整星振动抑制[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(1): 87—96.

GAO Y, ZHANG Z, FANG B. Whole-spacecraft vibration suppression based on negative stiffness inertial nonlinear energy sink [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(1): 87—96. (in Chinese)

[27] CHEN H Y, ZENG Y C, DING H, et al. Dynamics and vibration reduction performance of asymmetric tristable nonlinear energy sink [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2024, 45(3): 389—406.

[28] 童俊辉, 彭剑, 左云, 等. 基于非线性能量阱的深海柔性张力腿的振动抑制[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(1): 30—35.

TONG J H, PENG J, ZUO Y, et al. Vibration suppression of deep-sea flexible tension legs based on nonlinear energy sink [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(1): 30—35. (in Chinese)

[29] DING H, SHAO Y F. NES cell [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2022, 43(12): 1793—1804.

[30] 王红利, 殷学文, 丁虎. 基于非线性能量汇胞元的浮筏隔振结构减重研究[J]. 振动工程学报, 2024, 37(10): 1739—1746.

WANG H L, YIN X W, DING H. Weight reduction design of floating raft vibration isolation structure by using nonlinear energy sink cell [J]. Journal of Vibration Engineering, 2024, 37(10): 1739—1746. (in Chinese)

[31] LIU E G, SHAO Y F, DOU B, et al. High-order modal vibration control of Timoshenko beams based on nonlinear energy sink cells [J]. Journal of Vibration Engineering & Technologies, 2024, 12(4): 6809—6819.

[32] 李猛, 李孙飏, 丁虎. 非线性能量汇胞元减振效率分析[J]. 力学学报, 2023, 55(11): 2614—2623.

LI M, LI S B, DING H. Analysis of damping efficiency of nonlinear energy sink cell [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2023, 55(11): 2614—2623. (in Chinese)