

双稳态元件的能量传递非互易性调控作用研究^{*}

丁甜^{1,2} 陈建恩^{1,2} 孔娜^{1,2} 孙敏^{3†}

(1. 天津理工大学 机械工程学院 天津市先进机电系统设计与智能控制重点实验室,天津 300384)

(2. 天津理工大学 机电工程国家级实验教学示范中心,天津 300384)

(3. 天津城建大学 理学院,天津 300384)

摘要 在尽量宽的激励参数范围内实现能量传递的非互易性,尤其是强非互易性,有助于非互易器件更好地发挥作用.研究了双稳态元件对能量传递模式的影响及其对非互易性的调控作用.首先,建立了由线性刚度元件、立方刚度元件和双稳态元件所组成系统的动力学方程,运用复变量平均法与最小二乘法得到系统的半解析解,再运用龙格库塔法获得系统的数值解,通过比较半解析和数值解,验证了分析过程的正确性.在此基础上,分析了简谐激励条件下系统的非互易性特征,以及激励振幅的影响.研究结果显示,无论非线性系统是否包含双稳态元件,均会经历从互易状态到非互易状态,再回归互易状态的转变过程,但两者的非互易特征存在较大差异.此外,当双稳态系统具有合适的负刚度时,可以有效降低系统进入非互易性区间所需的激励振幅临界点.

关键词 双稳态元件, 非互易性, 能量传递, 非线性振动

中图分类号:O322

文献标志码:A

Research on the Modulating Effect of a Bistable Component on the Non-reciprocity of Energy Transfer^{*}

Ding Tian^{1,2} Chen Jian-en^{1,2} Kong Na^{1,2} Sun Min^{3†}

(1. Tianjin Key Laboratory for Advanced Mechatronic System Design and Intelligent Control, School of Mechanical Engineering, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China)

(2. National Demonstration Center for Experimental Mechanical and Electrical Engineering Education, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China)

(3. School of Science, Tianjin Chengjian University, Tianjin 300384, China)

Abstract The non-reciprocity of energy transfer, particularly strong non-reciprocity, achieved within a wider range of excitation parameters, can enhance the performance of non-reciprocal devices. The influences of bistable elements on the energy transfer mode and the modulation of non-reciprocity are investigated. Initially, the dynamic equation for a system incorporating linear stiffness, cubic stiffness, and bistable components is derived. The semi-analytical solutions for this system are obtained using the complexification-averaging and least square methods. The numerical solutions are obtained via the Runge-Kutta method. Then, the accuracy of the analysis procedure is confirmed through a comparison of semi-analytical and numerical solutions. Building on this, the non-reciprocal characteristics of the system under harmonic excitation and the effects of excitation amplitude are analyzed. The results show that re-

regardless of the presence of the bistable component, the nonlinear system undergoes a transition from the reciprocal to a non-reciprocal state and then back to the reciprocal state. However, the bistable component significantly alters the non-reciprocal characteristics. Furthermore, it is found that an appropriate negative stiffness in the bistable system can effectively decrease the excitation amplitude threshold for activating the non-reciprocal state.

Key words bistable component, non-reciprocity, energy transfer, nonlinear vibration

引言

非互易性的概念最早在光学领域被广泛研究,随后也在电磁学和微波技术中被广泛应用^[1].非互易性是指波在某一方向上可实现无障碍传输,而在与之相反的方向上则基本无法进行传输的现象.例如,在微波电路中,非互易性器件包括隔离器、环行器等,这些器件的设计和工作原理都基于非互易性的物理机制,从而能够实现微波信号的单向传输,在各种微波系统中发挥重要作用.随着科技的不断发展,非互易性概念也在材料科学中得到了拓展.通过设计和制备非互易性材料,就能实现单向导热、导电等功能,发挥整流和隔离作用.因此,如何更好地实现能量传递的非互易性,引起了众多学者的兴趣.目前,实现声波非互易性的方法主要分为三类:引入时变动态分量、基于磁弹性相互作用机制以及利用材料的非线性特性^[2].

首先,引入动态分量主要是指通过动态变化的参数或结构来打破系统的静态对称性,从而实现声波的非互易性传输.例如,Zhu 等^[3]通过时空调制的薄膜结构,成功实现了声波的非互易传输;Wu 等^[4]利用时空调制的弹簧-质量振荡器实现表面波非互易传输及单向模式转换,并通过理论和数值模拟验证了这一特性.此外,Li 等^[5]研究了初始应力对非线性弹性波超材料中弹性波传播特性的影响,实现了可调的非互易传输.Marconi 等^[6]利用时空调制的压电阵列来打破时间反演对称性,实现了非互易传输,并通过观测方向带隙验证了因时不变性破坏而导致的非互易行为.Cao 等^[7]利用时空调制的超材料,成功实现了基本反对称 Lamb 波的单向传播特性,并在实验中验证了其高效性.Fang 等^[8]结合实验和理论,证明了在非对称平面旋转系统中,通过调节弹性连杆的预拉伸可以实现非互易的动态响应,这种响应打破了系统的对称性,实现

了声波的非互易传播.

其次,通过磁性材料与弹性介质之间的相互作用也能实现声波非互易性.例如,Chen 等^[9]通过引入外加静磁场的方式,在周期系统中产生了有效的弹性波二极管效应,成功实现了一维线性磁弹性声子晶体板中的弹性波非互易传输.Verba 等^[10]从理论上分析了同时具有磁弹性相互作用和 Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用的多层表面声波的非互易性传播.Verba 等^[11]进一步提出了一种多层系统,该系统通过增强磁弹性耦合,扩大了非互易性的工作频段,成功在更宽的频率范围内实现了声波的非互易性,为实际应用提供了更大的灵活性.Luo 等^[12]通过在一维磁弹性声子晶体板中调节静磁场的大小和弹性波的入射角,实现了可调的非互易弹性波传播.Ushii 等^[13]利用表面声波(SAW)与磁异质结构内自旋波的磁弹间相互作用,在微波频段实现了表面声波的单向传播特性.王祥宇等^[14]通过非线性能量阱和超磁致伸缩材料的结合,实现了在气动力激励下的振动控制与能量采集.此外,Küss 等^[15]利用合成反铁磁结构实现了非互易的磁声波传播,揭示了磁弹性耦合对声波传播的调控作用.

最后,还可以利用非线性材料的特性来打破系统的对称性,从而实现声波的单向传输.例如,程建春等^[16]率先提出了声二极管的理论模型,通过材料的非线性效应实现了声二极管效应,后又通过实验验证了声波整流的可行性,为往后研究提供了关键的理论基础和实验参考^[17].Mojahed 等^[18]研究了声波在耗散非线性晶格中的非互易性,证明非线性晶格中的非互易性可以通过系统的非线性特性和结构的不对称性来实现.Wang 等^[19]构建了具有局部非线性和不对称性的波导结构,利用非线性效应和结构的弱耦合特性,使声波在特定条件下能够

实现单向传输或频率转换. 宁文龙等^[20]对带有非线性能量阱和磁流变阻尼器的弹性支撑梁进行了振动控制及能量采集研究,通过合理设计能量阱和阻尼器的参数,有效地实现了振动能量的单向传递和采集. Shao 等^[21]通过非线性 parity-time(PT)对称系统的设计,实现了微波频段的声波的非互易传输. Fang 等^[22]提出了一个双向弹性二极管模型,该模型通过设计具有增强共振非线性弹性超材料,实现了正向和反向弹性波的整流功能,不仅保留了声波的原始频率,还显著提高了前向传输效率,在低频和小尺寸条件下展现出优异的非互易特性.

以上众多学者已经从不同角度提出了多种实现声波非互易性的方法,这些方法在实现声波非互易性方面又各有优势,这为声学器件的设计与应用提供了丰富的理论基础和实践指导. 然而,尽管已有众多研究取得了显著进展,非线性系统中能量传递的机制以及非互易性行为的调控仍有许多问题值得深入探索. 因此,如何进一步提升非互易器件的性能并拓展其应用范围,也成为当前亟须解决的关键问题.

本文通过研究纯非线性系统以及基于该系统引入双稳态元件后的系统的非线性能量传递模式,分析简谐激励作用下各系统的非互易性以及不同激励幅值的影响,探索双稳态元件对能量传递模式的影响及其对非互易性的调节作用.

1 动力学方程

图1为由线性刚度、立方刚度以及双稳态元件组成的非线性系统,简谐激励分别作用在最左和最右侧的振子上. 其中 m_1 、 k 、 λ 分别为两侧振子的质量、刚度和阻尼,并且两者的所有参数完全相同. m_2 、 m_3 分别为中间两振子的质量, k_n 、 λ_n ($n=1\sim 3$) 为中间振子的立方刚度系数和线性阻尼系数, k_{3L} 为双稳态系统中为第三个振子引入的负刚度数值, $f_1 \sin \Omega t$ 和 $f_2 \sin \Omega t$ 分别为施加在左右两侧振子上的简谐激励, f_n ($n=1, 2$) 和 Ω 则分别为激励幅值和频率.

系统中间的两个非线性振子可以被认为是一个用于构建非互易能量传递的界面,该界面两侧可以连接任意自由度的振子. 本文中,为了便于解析分析,界面两侧仅各连接了一个线性振子.

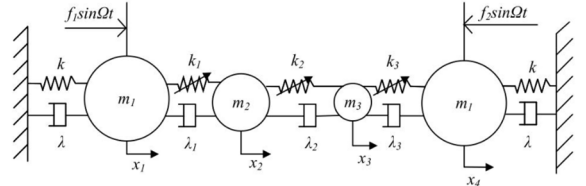


图1 非线性系统的力学模型

Fig. 1 Mechanical model of a nonlinear system

四自由度系统的动力学方程可表示为:

$$m_1 \ddot{x}_1 + kx_1 + \lambda \dot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2)^3 + \lambda_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = f_1 \sin(\Omega t) \quad (1a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1)^3 + \lambda_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_3)^3 + \lambda_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) = 0 \quad (1b)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 + k_2(x_3 - x_2)^3 + \lambda_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_{3L}(x_3 - x_4) + k_3(x_3 - x_4)^3 + \lambda_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) = 0 \quad (1c)$$

$$m_1 \ddot{x}_4 + k_{3L}(x_4 - x_3) + k_3(x_4 - x_3)^3 + \lambda_3(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + kx_4 + \lambda \dot{x}_4 = -f_2 \sin(\Omega t) \quad (1d)$$

引入无量纲系数:

$$\epsilon_n = \frac{m_{n+1}}{m_1}, \tilde{t} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} t, \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\sqrt{k_1 m_1}},$$

$$\tilde{k}_n = \frac{k_n}{k_1}, \tilde{f} = \frac{f}{k_1}, \tilde{\Omega} = \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} \Omega.$$

可以得到如下无量纲方程:

$$\ddot{x}_1 + \tilde{\lambda} \dot{x}_1 + x_1 + \tilde{\lambda}_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \tilde{k}_1(x_1 - x_2)^3 = \tilde{f}_1 \sin(\tilde{\Omega} \tilde{t}) \quad (2a)$$

$$\epsilon_1 \ddot{x}_2 + \tilde{\lambda}_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \tilde{k}_1(x_2 - x_1)^3 + \tilde{\lambda}_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + \tilde{k}_2(x_2 - x_3)^3 = 0 \quad (2b)$$

$$\epsilon_2 \ddot{x}_3 + \tilde{\lambda}_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + \tilde{k}_2(x_3 - x_2)^3 + \tilde{\lambda}_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + \tilde{k}_{3L}(x_3 - x_4) + \tilde{k}_3(x_3 - x_4)^3 = 0 \quad (2c)$$

$$\ddot{x}_4 + \tilde{\lambda}_3(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + \tilde{k}_{3L}(x_4 - x_3) + \tilde{k}_3(x_4 - x_3)^3 + \tilde{\lambda} \dot{x}_4 + x_4 = -\tilde{f}_2 \sin(\tilde{\Omega} \tilde{t}) \quad (2d)$$

为了表述方便,波浪号将在后面的分析中移除. 并利用复变量平均法推导该系统的慢变方程.

首先,引入以下变换:

$$\dot{x}_j + i\Omega x_j = \phi_j(t) e^{i\Omega t}, \dot{x}_j - i\Omega x_j = \bar{\phi}_j(t) e^{-i\Omega t}, (j=1 \sim 4) \quad (3)$$

其中 $\phi_j(t)$ 与 $\bar{\phi}_j(t)$ 互为共轭复数, i 为虚数符号,由式(3)可得:

$$x_j = \frac{\phi_j(t)e^{i\Omega t} - \bar{\phi}_j(t)e^{-i\Omega t}}{2i\Omega} \quad (4a)$$

$$\dot{x}_j = \frac{\phi_j(t)e^{i\Omega t} + \bar{\phi}_j(t)e^{-i\Omega t}}{2} \quad (4b)$$

$$\ddot{x}_j = \frac{\dot{\phi}_j(t)e^{i\Omega t} + i\Omega\phi_j(t)e^{i\Omega t} + \dot{\bar{\phi}}_j(t)e^{-i\Omega t} - i\Omega\bar{\phi}_j(t)e^{-i\Omega t}}{2},$$

$$(j=1 \sim 4) \quad (4c)$$

将式(4)代入式(2)中,保留其慢变部分,可得:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 + i\Omega\phi_1 + \frac{\phi_1}{i\Omega} + \lambda\phi_1 + \lambda_1(\phi_1 - \phi_2) + \\ \frac{3k_1(\phi_1 - \phi_2)^2(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)}{4i\Omega^3} = \frac{f_1}{i} \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_1(\dot{\phi}_2 + i\Omega\phi_2) + \frac{3k_1(\phi_2 - \phi_1)^2(\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_1)}{4i\Omega^3} + \\ \lambda_1(\phi_2 - \phi_1) + \frac{3k_2(\phi_2 - \phi_3)^2(\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_3)}{4i\Omega^3} + \\ \lambda_2(\phi_2 - \phi_3) = 0 \end{aligned} \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_2(\dot{\phi}_3 + i\Omega\phi_3) + \frac{3k_2(\phi_3 - \phi_2)^2(\bar{\phi}_3 - \bar{\phi}_2)}{4i\Omega^3} + \\ \lambda_2(\phi_3 - \phi_2) + k_{3L}\frac{\phi_3 - \phi_2}{i\Omega} + \\ \frac{3k_3(\phi_3 - \phi_4)^2(\bar{\phi}_3 - \bar{\phi}_4)}{4i\Omega^3} + \lambda_3(\phi_3 - \phi_4) = 0 \end{aligned} \quad (5c)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_4 + i\Omega\phi_4 + k_{3L}\frac{\phi_4 - \phi_3}{i\Omega} + \\ \frac{3k_3(\phi_4 - \phi_3)^2(\bar{\phi}_4 - \bar{\phi}_3)}{4i\Omega^3} + \lambda_3(\phi_4 - \phi_3) + \\ \frac{\phi_4}{i\Omega} + \lambda\phi_4 = -\frac{f_2}{i} \end{aligned} \quad (5d)$$

令 $\phi_1 = a_1 + b_1i, \phi_2 = a_2 + b_2i, \phi_3 = a_3 + b_3i, \phi_4 = a_4 + b_4i$, 分离虚部和实部, 可得:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 = b_1\Omega - \frac{b_1}{\Omega} - \lambda a_1 - \lambda_1(a_1 - a_2) - \\ \frac{3k_1(b_1 - b_2)[(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2]}{4\Omega^3} \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} \dot{b}_1 = -a_1\Omega + \frac{a_1}{\Omega} - \lambda b_1 - \lambda_1(b_1 - b_2) - f_1 + \\ \frac{3k_1(a_1 - a_2)[(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2]}{4\Omega^3} \end{aligned} \quad (6b)$$

$$\dot{a}_2 = b_2\Omega - \frac{3k_1(b_2 - b_1)[(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2]}{4\Omega^3\epsilon_1} -$$

$$\begin{aligned} \frac{3k_2(b_2 - b_3)[(a_2 - a_3)^2 + (b_2 - b_3)^2]}{4\Omega^3\epsilon_1} - \\ \frac{\lambda_1(a_2 - a_1)}{\epsilon_1} - \frac{\lambda_2(a_2 - a_3)}{\epsilon_1} \end{aligned} \quad (6c)$$

$$\begin{aligned} \dot{b}_2 = \frac{3k_2(a_2 - a_1)[(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2]}{4\Omega^3\epsilon_2} + \\ \frac{3k_3(a_2 - a_3)[(a_2 - a_3)^2 + (b_2 - b_3)^2]}{4\Omega^3\epsilon_1} - \\ \frac{\lambda_1(b_2 - b_1)}{\epsilon_1} - a_2\Omega - \frac{\lambda_2(b_2 - b_3)}{\epsilon_1} \end{aligned} \quad (6d)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_3 = b_3\Omega - \frac{3k_2(b_3 - b_2)[(a_3 - a_2)^2 + (b_3 - b_2)^2]}{4\Omega^3\epsilon_2} - \\ \frac{3k_3(b_3 - b_4)[(a_3 - a_4)^2 + (b_3 - b_4)^2]}{4\Omega^3\epsilon_2} - \\ \frac{\lambda_2(a_3 - a_2)}{\epsilon_2} - \frac{\lambda_3(a_3 - a_4)}{\epsilon_2} - \frac{k_{3L}(b_3 - b_4)}{\Omega\epsilon_2} \end{aligned} \quad (6e)$$

$$\begin{aligned} \dot{b}_3 = \frac{3k_2(a_3 - a_2)[(a_3 - a_2)^2 + (b_3 - b_2)^2]}{4\Omega^3\epsilon_2} - \\ a_3\Omega - \frac{\lambda_2(b_3 - b_2)}{\epsilon_2} - \frac{\lambda_3(b_3 - b_4)}{\epsilon_2} + \frac{k_{3L}(a_3 - a_4)}{\Omega\epsilon_2} + \\ \frac{3k_3(a_3 - a_4)[(a_3 - a_4)^2 + (b_3 - b_4)^2]}{4\Omega^3\epsilon_2} \end{aligned} \quad (6f)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_4 = b_4\Omega - \lambda_3(a_4 - a_3) - \frac{b_4}{\Omega} - \lambda a_4 - \frac{k_{3L}(a_3 - a_4)}{\Omega} - \\ \frac{3k_3(b_4 - b_3)[(a_4 - a_3)^2 + (b_4 - b_3)^2]}{4\Omega^3} \end{aligned} \quad (6g)$$

$$\begin{aligned} \dot{b}_4 = \frac{3k_3(a_4 - a_3)[(a_4 - a_3)^2 + (b_4 - b_3)^2]}{4\Omega^3} - \\ \lambda_3(b_4 - b_3) + \frac{a_4}{\Omega} - \lambda b_4 + f_2 - a_4\Omega + \frac{k_{3L}(a_4 - a_3)}{\Omega} \end{aligned} \quad (6h)$$

令 $\dot{a}_n = 0, \dot{b}_n = 0 (n=1 \sim 4)$, 四个振子在稳态响应下的振幅可以表示为^[23]: $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} / \Omega$. 后续分析中, 所有的参数均为无量纲参数, 其中两侧线性振子的参数分别为 $k=1, \lambda=0.02$, 中间振子的弹簧刚度以及阻尼系数均满足比例关系^[24], 即 $k_{n+1}/k_n=0.5, \lambda_{n+1}/\lambda_n=0.5 (n=1, 2)$, 且 $k_1=0.6$ 和 $\lambda_1=0.01$.

2 能量传递分析

2.1 纯非线性系统能量传递分析

当方程(6)等号左侧为 0 时, 可得到系统的稳

态响应方程。在 Matlab 软件中使用基于最小二乘法的代码对稳态响应方程进行求解,并利用龙格库塔法直接对动力学方程(2)进行数值计算。

分别激励左右两侧线性振子,将龙格库塔法得到的对侧振子的数值结果与基于最小二乘法得到的半解析结果进行比较,两种求解方式得到的结果吻合较好,从而验证了分析过程的正确性,如图 2 和图 3 所示。图 2 为 $f_{1,2}=0.005$ 时,输出振子的频率响应(将受激励的线性振子定义为输入振子,将对侧线性振子定义为输出振子)。图中,横坐标表示激励频率,纵坐标表示输出振子的振幅。当激励幅值增加至 0.005 时,在共振峰附近,激励右侧振子时左侧振子的振幅明显大于激励左侧振子时右侧振子的振幅。本文中,所有结果均是在一侧振子受激励时得到的,不会同时对两侧振子进行激励。

图 3 为激励幅值 $f_{1,2}=0.08$ 下的输出振子的频率响应,发现在激励频率 $\Omega=0.4\sim 0.8$ 的范围内存在多个解。在响应的低分支上,数值结果与半解析结果吻合相对较好,但是在高分支上会存在一定误差,尤其是高分支中振幅较大的部分,误差较大。

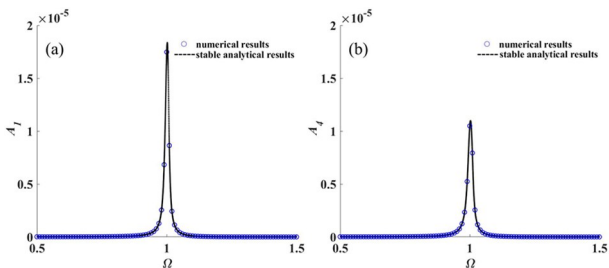


图 2 纯非线性系统的频率响应, $f_1=0.005, f_2=0.005$ 。

- (a) 激励右侧振子,左侧振子的频率响应;
(b) 激励左侧振子,右侧振子的频率响应

Fig. 2 Frequency responses of the purely nonlinear system, $f_1=0.005, f_2=0.005$. (a) Frequency responses of the left oscillator when the right oscillator is excited; (b) Frequency responses of the right oscillator when the left oscillator is excited

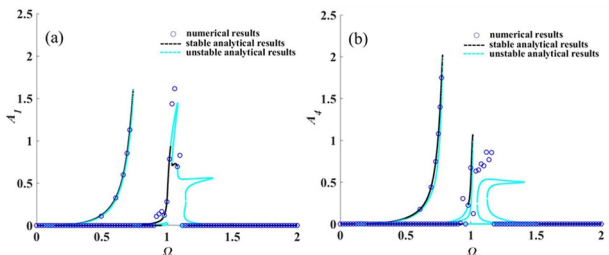


图 3 纯非线性系统的频率响应, $f_1=0.08, f_2=0.08$ 。

- (a) 激励右侧振子,左侧振子的频率响应;
(b) 激励左侧振子,右侧振子的频率响应

Fig. 3 Frequency responses of the purely nonlinear system, $f_1=0.08, f_2=0.08$. (a) Frequency responses of the left oscillator when the right oscillator is excited; (b) Frequency responses of the right oscillator when the left oscillator is excited

为了得到分岔解,利用组合激励,即在对系统施加简谐激励的前提下再施加冲击激励,使系统发生跳跃现象,进而得到高分支上的响应,结果表明,高分支区域也基本吻合。图 4 给出了对纯非线性系统以及双稳态系统施加了 $f_{1,2}=0.08$ 的简谐激励的同时,又在 $t=630$ 时施加了 $F=600$ 的冲击激励后的波形图,图中显示两个系统均在承受冲击激励后发生了跳跃现象,从而获得分岔解。

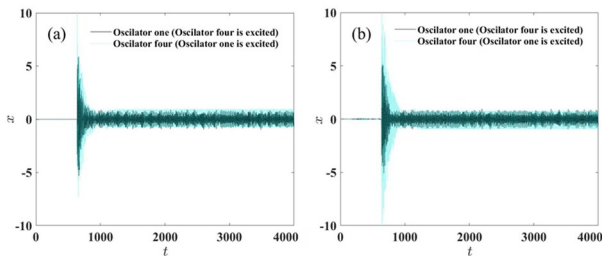


图 4 跳跃现象

Fig. 4 Jump phenomenon. (a) $k_{3L}=0, f_{1,2}=0.08, \Omega=0.71$; (b) $k_{3L}=-0.03, f_{1,2}=0.08, \Omega=0.71$

在这里,冲击力 F 为半波形式,其表达式为:

$$F = \begin{cases} U \sin(2\pi t/T), & 0 \leq t \leq T/2 \\ 0, & t > T/2 \end{cases} \quad (7)$$

式中, $T=0.4/\pi$, U 为冲击力的幅值。在半波冲击中,力的波形表现为半正弦波的形式。

2.2 双稳态系统能量传递分析

由于双稳态元件的存在,使得系统在求解过程中得到的半解析解与数值解之间的差异相对较大,但也能够基本验证分析的正确性。如图 5 和图 6 所示,在一定频率范围内会出现多个解。在响应的低分支上,数值结果与半解析的吻合效果不如纯非线性系统的吻合效果,且在高分支上也会存在一定误差。但从整体来看,数值结果与半解析吻合效果能够基本验证分析的正确性。

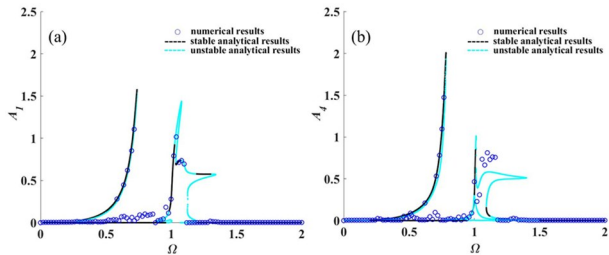


图 5 双稳态系统的频响曲线, $f_1=0.08, f_2=0.08$ 。

- (a) 激励右侧振子,左侧振子频响图;
(b) 激励左侧振子,右侧振子频响图

Fig. 5 Frequency responses of the bistable system, $f_1=0.08, f_2=0.08$. (a) Frequency responses of the left oscillator when the right oscillator is excited; (b) Frequency responses of the right oscillator when the left oscillator is excited

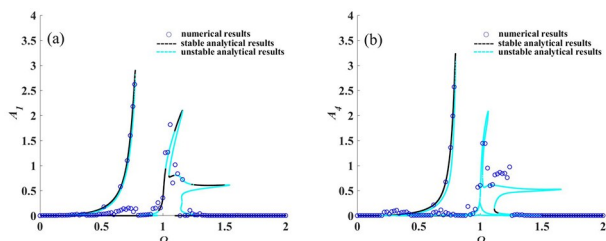


图 6 双稳态系统的频响曲线, $f_1=0.12, f_2=0.12$.

(a) 激励右侧振子, 左侧振子频响图; (b) 激励左侧振子, 右侧振子频响图

Fig. 6 Frequency responses of the bistable system, $f_1=0.12, f_2=0.12$: (a) Frequency responses of the left oscillator when the right oscillator is excited; (b) Frequency responses of the right oscillator when the left oscillator is excited

2.3 非线性系统能量传递分析

由于目前无法使用半解析方法获取响应波形, 在通过半解析解掌握了系统响应的基本特征后, 将利用数值方法进一步分析系统能量传递的特征. 通过分析不同激励幅值下输出振子的响应, 确定了系统由互易状态向非互易状态转变的激励幅值临界点, 如图 7~10 所示, 图中分别展示了系统的互易状态以及两种非互易状态. 这些图中, 横坐标表示激励频率, 纵坐标 A 表示两侧激励下得到的对侧振子的振幅. 在频响图中, 青色线表示正向激励下的对侧振子的频响曲线, 蓝色则表示反向激励下的对侧振子的频响曲线.

分析结果表明, 当激励幅值较小时, 激励左侧振子与激励右侧振子时输出振子的振幅一致, 此时

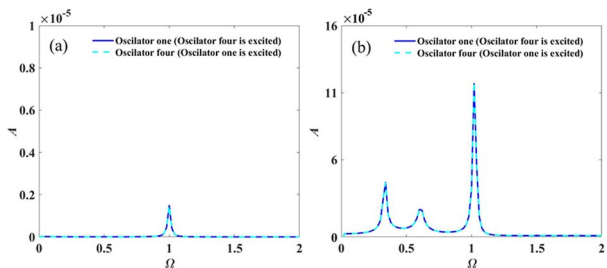


图 7 频响曲线 (系统表现出互易性):

(a) $k_{3L}=0, f_{1,2}=0.001$; (b) $k_{3L}=-0.03, f_{1,2}=0.0001$

Fig. 7 Frequency responses (Both systems show reciprocity):

(a) $k_{3L}=0, f_{1,2}=0.001$; (b) $k_{3L}=-0.03, f_{1,2}=0.0001$

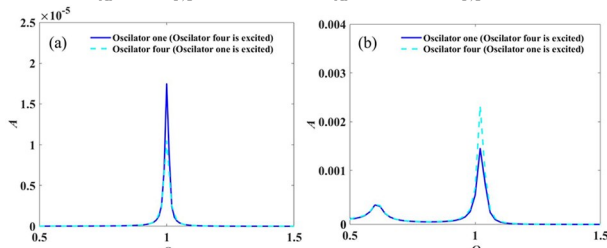


图 8 频响曲线 (系统在小幅激励下表现出弱非互易性):

(a) $k_{3L}=0, f_{1,2}=0.005$; (b) $k_{3L}=-0.03, f_{1,2}=0.002$

Fig. 8 Frequency responses (Both systems show weak non-reciprocity under small excitation): (a) $k_{3L}=0, f_{1,2}=0.005$; (b) $k_{3L}=-0.03, f_{1,2}=0.002$

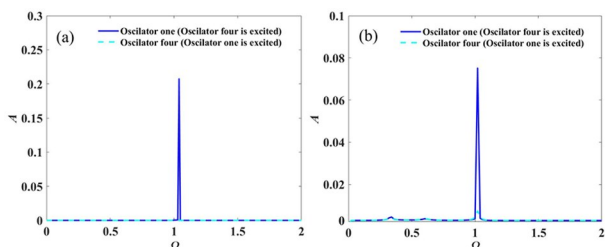


图 9 频响曲线 (系统表现出强非互易性):

(a) $k_{3L}=0, f_{1,2}=0.024$; (b) $k_{3L}=-0.03, f_{1,2}=0.004$

Fig. 9 Frequency responses (Both systems show strong non-reciprocity): (a) $k_{3L}=0, f_{1,2}=0.024$;

(b) $k_{3L}=-0.03, f_{1,2}=0.004$

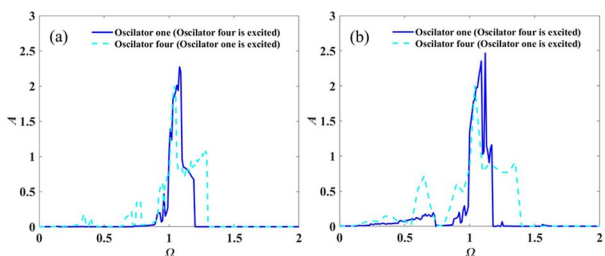


图 10 频响曲线 (系统在大幅激励下表现出弱非互易性):

(a) $k_{3L}=0, f_{1,2}=0.15$; (b) $k_{3L}=-0.03, f_{1,2}=0.16$

Fig. 10 Frequency responses (Both systems show weak non-reciprocity under large excitation): (a) $k_{3L}=0, f_{1,2}=0.15$;

(b) $k_{3L}=-0.03, f_{1,2}=0.16$

系统表现为互易状态; 随着激励幅值的增加, 输出振子的振幅差异逐渐显著, 出现了一侧振幅远高于另一侧振幅的现象. 在纯非线性系统中, 当激励各振子的激励幅值达到 0.001 时, 对侧振子的响应基本一致, 因此表现出互易特征; 继续增大激励幅值, 在共振峰附近, 当激励各振子的激励幅值达到 0.005 时, 激励右侧振子时左侧振子的最大振幅约为激励左侧振子时右侧振子最大振幅的 2 倍, 表现为弱非互易特征; 当激励幅值增加至 0.024 时, 在共振峰附近, 激励右侧振子时左侧振子的振幅明显远大于激励左侧振子时右侧振子的振幅, 最大振幅差异已经达到了百倍, 因此表现出强非互易特征. 当激励幅值达到 0.15 时, 两侧振幅基本一致, 表现为近似互易的特征. 在双稳态系统中, 互易性也会随着激励幅值发生类似变化, 但进入不同状态所需的激励幅值与纯非线性系统存在较大差异.

为了更直观地突出引入双稳态元件会使系统进入强非互易区间所需的激励幅值降低, 选取同一激励幅值 $f_{1,2}=0.004$ 下两系统的频响曲线进行分析, 如图 11 所示. 当激励幅值 $f_{1,2}=0.004$ 时, 激励左右两侧振子, 各对侧振子频响图, 从图中可以看出该激励下的纯非线性系统表现出弱非互易状态, 但双稳态系统已表现出强非互易状态, 系统峰

值的数量级也由原来的 10^{-5} 变为 10^{-2} . 结合图 7、图 8 各激励下的频率响应曲线,可以发现,引入负刚度后,在一定的激励区间内,同激励幅值下得到的系统响应幅值也会增大.

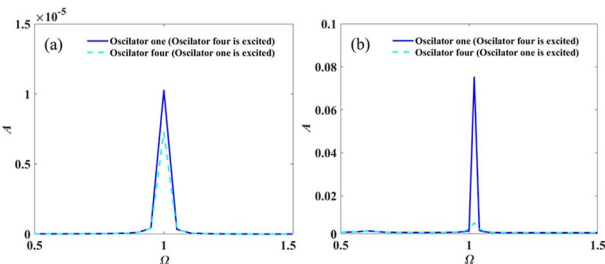


图 11 相同简谐激励下两系统的频率响应:
(a) $k_{3L}=0, f_{1,2}=0.004$; (b) $k_{3L}=-0.03, f_{1,2}=0.004$
Fig. 11 Frequency responses of the two systems excited by the same harmonic excitation: (a) $k_{3L}=0, f_{1,2}=0.004$; (b) $k_{3L}=-0.03, f_{1,2}=0.004$

此外,在不同负刚度条件下也进行了研究,考虑篇幅问题,文中仅给出图 12 以作说明. 图 12 表示了不同负刚度的双稳态系统的各状态区间范围,图中六角星之间的范围为取不同负刚度数值下系统表现出强非互易状态的激励幅值区间,可看出,负刚度的引入不仅可以扩大强非互易性区间,而且双稳态系统具有合适的负刚度时,进入强非互易性区间所需的激励幅值临界点相比纯非线性系统显著降低.

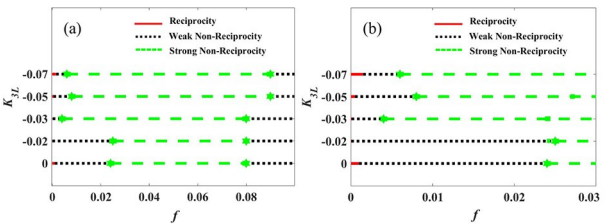


图 12 各状态区间图: (a) 整体图; (b) 局部图
Fig. 12 Range diagram of each state: (a) Overall diagram; (b) Partial diagram

为进一步探讨引入双稳态元件后的双稳态系统如何从弱非互易状态转变为强非互易状态,分别在纯非线性系统和双稳态系统中选取激励幅值为 $f_{1,2}=0.023, f_{1,2}=0.024$ 和激励幅值为 $f_{1,2}=0.003, f_{1,2}=0.004$ 时出现振幅差异最大的频率,对输出振子的响应波形图进行对比,如图 13 和图 14 所示.

图 13 为纯非线性系统中输出振子的响应波形图,由图中可知,当激励幅值 $f_{1,2}=0.023$ 时,该系统表现出弱非互易特性,而当激励幅值 $f_{1,2}=0.024$ 时,系统表现出强非互易特性,且此时输出

振子的最大振幅差异已经达到百倍,以至于在图 13 (b)中已难以观察到振子 4 的响应. 图 14 为双稳态系统中输出振子的响应波形图,从图中可得到,当激励幅值为 0.003 时,振子 1 的运动形式为单阱—阱间交替运动;激励幅值达到 0.004 时,其运动形式变为跨阱运动,从而使系统展现出强非互易特性. 对比纯非线性振子系统中输出振子的响应,发现双稳态元件的引入会使系统的运动形式发生改变,改变系统的动力学行为,使系统产生强非互易性的激励幅值临界点降低.

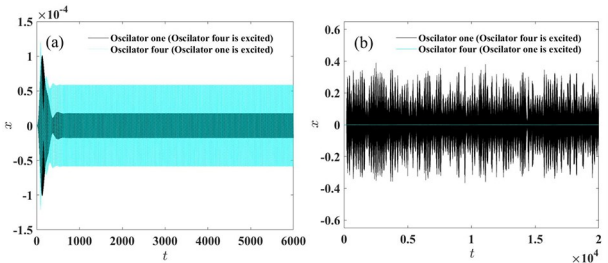


图 13 纯非线性系统波形图: (a) $k_{3L}=0, f_{1,2}=0.023, \Omega=1.04$; (b) $k_{3L}=0, f_{1,2}=0.024, \Omega=1.04$
Fig. 13 Waveform diagrams of the purely nonlinear system: (a) $k_{3L}=0, f_{1,2}=0.023, \Omega=1.04$; (b) $k_{3L}=0, f_{1,2}=0.024, \Omega=1.04$

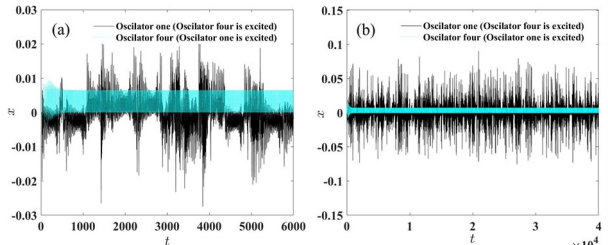


图 14 双稳态系统波形图: (a) $k_{3L}=-0.03, f_{1,2}=0.003, \Omega=1.02$; (b) $k_{3L}=-0.03, f_{1,2}=0.004, \Omega=1.02$
Fig. 14 Waveform diagrams of the bistable system: (a) $k_{3L}=-0.03, f_{1,2}=0.003, \Omega=1.02$; (b) $k_{3L}=-0.03, f_{1,2}=0.004, \Omega=1.02$

3 结论

本文研究了纯非线性系统的能量传递非互易性以及双稳态元件对能量传递模式的影响. 发现无论非线性系统是否包含双稳态元件,均出现了由互易状态向非互易状态的演变过程,且两系统都是在同向激励下表现出强非互易特性. 但双稳态系统在能量传递和振幅表现上又呈现出与纯非线性系统不同的特点.

双稳态系统在进入非互易激励区间的能量传递的先后顺序与纯非线性系统相比是相反的. 并且在引入双稳态元件后,系统的激活阈值降低,使得系统在一定激励区间内的相同激励幅值下的响应

幅值相比纯非线性系统也明显增大。

此外,研究了双稳态系统中负刚度数值变化对系统能量传递非互易性的影响.通过选取不同负刚度数值,发现选取合适的负刚度数值时,可以有效降低系统进入非互易性区间所需的激励振幅临界点.这可以使系统即使在较小的激励下,也能够通过合理的参数调控有效实现声波的单向传输。

参考文献

[1] 秦立国, 吴欣宇, 邢芬芬, 等. 基于腔光力系统的量子非互易性的研究进展[J]. 北京工业大学学报, 2023, 49(6): 717—728.
QIN L G, WU X Y, XING F F, et al. Research progress on quantum nonreciprocity based on cavity optomechanical system [J]. Journal of Beijing University of Technology, 2023, 49(6): 717—728. (in Chinese)

[2] 冯陆洋, 陈久久, 黄宏波. 声学超材料的非互易性研究进展[J]. 科学通报, 2022, 67(12): 1214—1222.
FENG L Y, CHEN J J, HUANG H B. Progress on nonreciprocity of acoustic metamaterials [J]. Chinese Science Bulletin, 2022, 67(12): 1214—1222. (in Chinese)

[3] ZHU X H, LI J F, SHEN C, et al. Non-reciprocal acoustic transmission via space-time modulated membranes [J]. Applied Physics Letters, 2020, 116(3): 034101.

[4] WU Q, CHEN H, NASSAR H, et al. Non-reciprocal Rayleigh wave propagation in space-time modulated surface [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2021, 146: 104196.

[5] LI Z N, WANG Y Z, WANG Y S. Tunable nonreciprocal transmission in nonlinear elastic wave metamaterial by initial stresses [J]. International Journal of Solids and Structures, 2020, 182: 218—235.

[6] MARCONI J, RIVA E, DI RONCO M, et al. Experimental observation of nonreciprocal band gaps in a space-time-modulated beam using a shunted piezoelectric array [J]. Physical Review Applied, 2020, 13(3): 031001.

[7] CAO Y, LI Z, SHEN C, et al. Nonreciprocal acoustic transmission in space-time modulated metamaterials [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2021, 149: 1723.

[8] FANG L Z, MOJAHED A, DARABI A, et al. Passive nonreciprocity in a system of asymmetrical rotational oscillators [J]. Physical Review Applied, 2021, 15(3): 034005.

[9] FENG L Y, CHEN J J, HUANG H B, et al. High-efficiency elastic wave rectifier in one-dimensional linear magnetoelastic phononic crystal slabs by an external magnetostatic field [J]. Physical Review Applied, 2020, 13(6): 064042.

[10] VERBA R, LISENKOV I, KRIVOROTOV I, et al. Nonreciprocal surface acoustic waves in multilayers with magnetoelastic and interfacial Dzyaloshinskii-Moriya interactions [J]. Physical Review Applied, 2018, 9(6): 064014.

[11] VERBA R, TIBERKEVICH V, SLAVIN A. Wide-band nonreciprocity of surface acoustic waves induced by magnetoelastic coupling with a synthetic antiferromagnet [J]. Physical Review Applied, 2019, 12(5): 054061.

[12] LUO H H, BU X Z, HUANG H B, et al. Tunable non-reciprocity of elastic waves in one-dimensional magnetoelastic phononic crystal plate with oblique incident angle [J]. Physics Letters A, 2024, 499: 129356.

[13] USHII L, SLAVIN A, VERBA R. Nonreciprocity of surface acoustic waves coupled to spin waves in a ferromagnetic bilayer with noncollinear layer magnetizations [J]. Physical Review Applied, 2024, 22(3): 034046.

[14] 王祥宇, 臧健. 点阵夹芯梁在气动力下的振动控制与能量采集[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(7): 38—49.
WANG X Y, ZANG J. Vibration control and energy harvesting of lattice sandwich beam under aerodynamic forces [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(7): 38—49. (in Chinese)

[15] KÜSS M, HASSAN M, KUNZ Y, et al. Nonreciprocal magnetoacoustic waves in synthetic antiferromagnets with Dzyaloshinskii-Moriya interaction[J]. Physical Review B, 2023, 107(2): 024424.

[16] LIANG B, YUAN B, CHENG J C. Acoustic diode: rectification of acoustic energy flux in one-dimensional systems [J]. Physical Review Letters, 2009, 103(10): 104301.

[17] LIANG B, GUO X S, TU J, et al. An acoustic rectifier [J]. Nature Materials, 2010, 9(12): 989—992.

- [18] MOJAHED A, GENDELMAN O V, VAKAKIS A F. Breather arrest, localization, and acoustic non-reciprocity in dissipative nonlinear lattices [J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2019, 146(1): 826—842.
- [19] WANG C, MOJAHED A, TAWFICK S, et al. Machine learning non-reciprocity of a linear waveguide with a local nonlinear, asymmetric gate: Case of weak coupling [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2022, 537: 117211.
- [20] 宁文龙, 陈杰, 常智勇. 带有 NES-GMM 的弹性支撑梁振动控制及能量采集研究[J]. *动力学与控制学报*, 2024, 22(7): 50—58.
- NING W L, CHEN J, CHANG Z Y. Vibration suppression and energy harvesting of for an elastically supported beams with NES-GMM [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2024, 22(7): 50—58. (in Chinese)
- [21] SHAO L B, MAO W B, MAITY S, et al. Non-reciprocal transmission of microwave acoustic waves in nonlinear parity-time symmetric resonators [J]. *Nature Electronics*, 2020, 3(5): 267—272.
- [22] FANG X, WEN J H, CHENG L, et al. Bidirectional elastic diode with frequency-preserved nonreciprocity [J]. *Physical Review Applied*, 2021, 15(5): 054022.
- [23] SUN M, HU W H, LIU J, et al. Steady-state responses of mechanical system attached to non-smooth vibration absorber with piecewise damping and stiffness [J]. *Meccanica*, 2021, 56(2): 275—285.
- [24] CHEN J E, SUN M, ZHANG W, et al. Cross-scale energy transfer of chaotic oscillator chain in stiffness-dominated range [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 110(3): 2849—2867.