

一种复合型吸振器对弹性梁的抑振效果研究^{*}

苏智¹ 申永军^{1,2†} 杨绍普²

(1. 石家庄铁道大学 机械工程学院, 石家庄 050043)

(2. 石家庄铁道大学 省部共建交通工程结构力学行为与系统安全国家重点实验室, 石家庄 050043)

摘要 本文提出了一种复合型动力吸振器. 建立弹性简支梁—动力吸振器耦合动力学模型. 采用模态叠加法, 推导了各阶模态幅频响应的解析表达式, 并针对弹性梁第 1 阶模态, 以 H_{∞} 优化准则和固定点理论为依据, 求解得到了该模型的最优调谐比、最优刚度比、最优阻尼比的解析式, 以及对应的惯容最佳工作范围, 并通过有限差分法验证了该设计公式的正确性. 将惯容连接于主子系统之间, 没有提升系统减振性能. 此外, 该动力吸振器对弹性梁第 1 阶模态具有良好的吸振能力, 且拓宽了吸振频带.

关键词 动力吸振器, 弹性梁, 参数优化, 固定点理论

中图分类号: O328; TH113.1

文献标志码: A

Study on the Vibration Suppression Performance of a Combined Dynamic Vibration Absorber for Elastic Beams^{*}

Su Zhi¹ Shen Yongjun^{1,2†} Yang Shaopu²

(1. School of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

(2. State Key Laboratory of Mechanical Behavior and System Safety of Traffic Engineering Structures, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract This paper proposes a combined dynamic vibration absorber and establishes a coupled dynamic model of an elastic simply-supported beam equipped with a dynamic vibration absorber. Using the modal superposition method, analytical expressions for the amplitude-frequency response of different vibration modes are derived. Focusing on the first-order mode of the elastic beam, analytical solutions for the optimal tuning ratio, optimal stiffness ratio, and optimal damping ratio are obtained based on the H_{∞} optimization criterion and fixed-point theory, along with the corresponding optimal operating range of the inerter. The validity of the derived design formulas is further verified through the finite difference method. The results indicate that connecting the inerter between the primary and secondary systems does not enhance the vibration reduction performance. In addition, the proposed dynamic vibration absorber demonstrates excellent vibration suppression capability for the first-order mode of the elastic beam and effectively broadens the vibration absorption frequency band.

Key words dynamic vibration absorber, elastic beam, parameter optimization, fixed-point theory

2025-05-08 收到第 1 稿, 2025-06-02 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12272242), 石家庄铁道大学研究生创新资助项目(YC202433), National Natural Science Foundation of China(12272242), Graduate Student Innovation Funding Program of Shijiazhuang Tiedao University (YC202433).

[†] 通信作者 E-mail: shenyongjun@126.com

引言

梁结构因其简洁而高效的力学性能,被广泛应用于建筑、桥梁、航空航天、机械制造等诸多关键领域.采用动力吸振器对梁结构的振动进行有效抑制,不仅具有极其重要的理论研究价值,更在工程实践中意义非凡.

动力吸振器(DVA)是一种通过共振机制来汲取并降低物体振动能量的装置.其工作原理基于在振动主系统上增设一个由质量和弹簧构成的共振子系统,当该系统达到共振状态时,能够产生对抗性反作用力,从而有效降低振动幅度.动力吸振器的思想最早源于1909年Frahm^[1]的研究,他首次提出了一个专门用于极窄频带范围的无阻尼动力吸振器.Ormondroyd等^[2,3]基于传统无阻尼吸振装置,通过引入阻尼机制,开发出具有更佳性能且适用性更广的Voigt型吸振系统,同时开创性地提出了固定点理论.此外,他们还在相关专著中系统地归纳了设计动力吸振器最优参数的方法.李艳^[4]提出一种基于颗粒阻尼机理的钢轨动力吸振器,验证了其良好的减振降噪性能.赵存生等^[5]设计了一种新型悬臂梁式动力吸振器,实验表明该动力吸振器吸振性能良好且参数可连续调节,克服了经典质量-弹簧系统吸振器参数固定不可变的局限性.姚伍平等^[6]通过欧拉-伯努利梁振动理论建立了管路-吸振器连续体系统振动模型并经过有限元验证,研究表明激励因素与动力吸振器的安装位置对振动抑制效果具有显著影响,控制对象选择差异大,支撑刚度仅在一定范围内影响系统1阶固有频率.赵迪等^[7]设计了多自由度动力吸振器,通过理论模型分析、优化算法推导最优参数,并经实验验证,证明了四自由度动力吸振器在振动控制效果和可控制频带上均优于单自由度及二自由度吸振器.

负刚度元件在动力吸振器中表现出高承载、小变形、优控制、低固有频率及宽减振频带等优势,近年来在系统减振领域得到广泛应用.刘海平等^[8]研究了多种负刚度动力吸振器对有限长弹性简支梁振动特性的作用效果.研究结果表明,在接近目标控制模态频率的范围内,负刚度动力吸振器能有效控制弹性梁的动态响应,同时多个振动模态的响应均得到良好控制;其中,阻尼与负刚度元件并联接地的配置方案具有最优控制效果.此外,研究还发

现系统各设计参数均存在相应的最佳取值区间.陈杰等^[9]设计了一种新型吸振器,该装置整合了惯容元件与负刚度机构,用于抑制结构梁的横向振动响应.代晗等^[10]探讨了基于负刚度时滞反馈的动力吸振器等峰优化方法,实现了幅频响应曲线的宽频减振特性,同时降低了共振峰与反共振峰之间的幅值差异.郝岩等^[11]将黏弹性材料和多个负刚度弹簧的Maxwell模型引入减振系统,在谐波和随机激励的情况下都具有良好的振动控制效果.Man-takas等^[12]开发并实现了一种基于负刚度原理的被动吸振器,作为典型钢筋混凝土住宅建筑的地震加固措施.Harouni等^[13]研究引入负刚度非线性吸振器以控制振动并减少地震损伤,通过调整负刚度参数和利用内共振转移振动能量,结合数值模拟与有源控制回路研究其对近断层和远场地震破坏的缓解效果.

放大机构在动力吸振器中的应用主要体现在通过杠杆原理或类似机制实现振动能量的转移和放大,从而增强吸振效果、拓宽减振频带,并优化系统的振动控制性能.申永军等^[14-19]在多种吸振器中引入放大机构元件的实践表明,这类吸振器展现出了出色的减振效果.尤其是文献[18]中的研究发现,当放大比与质量比的结合达到某一特定值时,系统会展现出一个正的最优接地刚度比,从而进一步提升其吸振性能.

其他类型的放大机构同样被应用于减振与隔振技术中.以杠杆组件为例,Flannelly^[20]介绍了一种动力反共振隔振器,发现通过杠杆组件能够增强质量所产生的惯性效应,从而拓宽了隔振器的适用场合.李春翔等^[21]对杠杆式吸振器的动力特性进行详细研究,发现引入杠杆后的吸振器不仅克服了传统悬吊式吸振器净高的不足,在大型建筑领域中的抖振控制更为出色.汪正兴等^[22]开发了一种利用杠杆放大原理的斜拉索杠杆式吸振器,并在真实桥梁环境中进行了验证,有效减轻了斜拉索的振动问题.Zang等^[23]提出了一种杠杆式非线性能量吸振器,在振动控制方面相较于传统的动力吸振器展现出了明显的优越性,同时还探讨了支点位置对整个系统稳定性能的影响.刘建武等^[24]提出采用杠杆放大机制的铅黏弹性吸振器,其耗能性能表现突出.

黏弹性材料因其兼具黏性(能量耗散)和弹性

(能量存储)特性,能够有效抑制振动并降低噪声,在振动控制中具有独特的优势。例如,在土木工程领域,研究者提出了一套使用扇形铅黏弹性阻尼器加固节点的设计方法^[25]。此外,汽车悬架中的磁流变阻尼器^[26]、航天器振动控制中应用的金属橡胶^[27],以及高速列车减振系统中应用的空气弹簧^[28]等,都是该特性在不同领域的成功应用。基于黏弹性材料的这些优势,本文拟将其引入到简支梁系统中进行振动控制研究。

本文提出了一种复合型吸振器的弹性梁减振系统。此设计旨在评估其对简支梁振动控制的效能,从而进一步拓展传统振动控制技术的边界。通过结合放大机构、惯容和黏弹性材料这些组件实现振动控制。其中,较大的放大比能够显著提升吸振器在动态环境下的减振性能。通过质量块提供惯性、弹簧储存能量并调谐固有频率、阻尼耗散振动能量,三者协同实现减振;其核心优势是结构简单可靠、成本低且理论成熟(遵循 Den Hartog 的等峰优化准则),能在特定频率(如主系统共振频段)实现高效振动抑制。

1 动力吸振器的模型建立及求解

本文将由放大机构、惯容和接地三要素组合成的复合型吸振器加入简支梁振动系统,研究该模型对简支梁振动系统的减振效果并求出该吸振器的

最优参数。将吸振器加入弹性简支梁振动模型后的系统模型如图 1 所示。

弹性梁为等截面简支梁,弹性模量 E , 密度 ρ , 截面惯性矩 I , 横截面面积为 A , 坐标系的原点设定在弹性梁的左端。在距离坐标原点 x_1 处作用一干扰力 $p \sin(\omega t)$, 其中 p 与 ω 分别为激励力的振幅与频率。在弹性梁中点布置复合型吸振器。弹性梁系统的水平位置坐标由 x 表示, 垂直位移则由坐标 u 表示, 其中, $u(x, t)$ 代表梁随着时间 t 在垂直方向上的挠度变化。图 1 为本文所提出的含复合型的简支梁—动力吸振器模型, 其中 m_2 为动力吸振器质量; r_1 和 r_2 分别为阻力臂和动力臂长度, 杠杆放大比定义为 $L = r_2/r_1$; k_2 为吸振器刚度; k_3 和 c_2 分别是串联型黏弹性模型的刚度和阻尼; b 表示惯容系数; 弹性梁长为 l 。

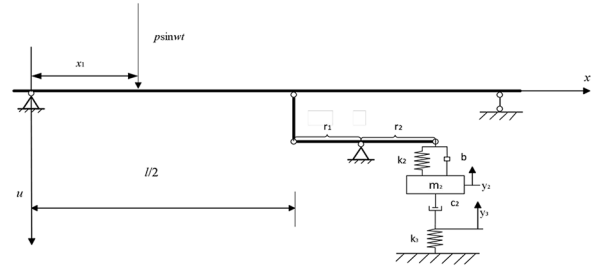


图 1 安装复合型吸振器的弹性简支梁模型

Fig. 1 Model of an elastic simply-supported beam with an installed combined dynamic vibration absorber

忽略杠杆质量和系统内摩擦, 根据牛顿第二定律得到系统的动力学方程为

$$\begin{cases} EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + k_2 L \left[Lu\left(\frac{l}{2}, t\right) - y_2(t) \right] \delta\left(x - \frac{l}{2}\right) + \\ bL \left[\ddot{L}\left(\frac{l}{2}, t\right) - \ddot{y}_2(t) \right] \delta\left(x - \frac{l}{2}\right) = p(x, t) \delta(x - x_1) \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_2 \left[y_2(t) - Lu\left(\frac{l}{2}, t\right) \right] + b \left[\ddot{y}_2(t) - L\ddot{u}\left(\frac{l}{2}, t\right) \right] + c_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_3) = 0 \\ c_2 (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + k_3 y_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, ρA 为单位长度质量, δ 为 Dirac 函数, $p(x, t)$ 为干扰力, EI 为简支梁的弯曲刚度, y_2 为吸振器的位移响应, y_3 为串联弹簧与阻尼连接点的位移。

采用分离变量法, 简支梁的位移表达式如下

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t) \quad (2)$$

其中, 振型函数 $\phi_i(x)$ 可以写为 $\sin(i\pi x/l)$ ($i=1, 2, 3, \dots$), 不随时间变化; $q_i(t)$ 为随时间变化的振幅。对公式(1) 两边同乘 $\phi_i(x)$, 并在 $(0, l)$ 上积分, 利用振型正交性得到

$$\begin{cases} M_i^* \ddot{q}_i(t) + K_i^* q_i(t) + k_2 L \left[Lu\left(\frac{l}{2}, t\right) - y_2(t) \right] \phi_i\left(\frac{l}{2}\right) + bL \left[\ddot{L}\left(\frac{l}{2}, t\right) - \ddot{y}_2(t) \right] \phi_i\left(\frac{l}{2}\right) = p_i^*(t) \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_2 \left[y_2(t) - Lu\left(\frac{l}{2}, t\right) \right] + b \left[\ddot{y}_2(t) - L\ddot{u}\left(\frac{l}{2}, t\right) \right] + c_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_3) = 0 \\ c_2 (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + k_3 y_3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中, 模态质量 $M_i^* = \int_0^l \rho A [\phi_i^2(x)] dx = \rho Al/2$,
 K_i^* 为模态刚度, 第 i 阶固有频率 $\omega_{ai} = (i\pi/l)^2$
 $\sqrt{EI/\rho A}$, $p_i^*(t) = p \sin(\omega t) \sin(i\pi x_1/l)$.

$$\begin{cases} \ddot{q}_i(t) + \omega_{ai}^2 q_i(t) + \mu \omega_2^2 LD [LD q_i(t) - y_2(t)] + \mu \gamma LD [LD \ddot{q}_i(t) - \ddot{y}_2(t)] = p_i^*(t)/M \\ \ddot{y}_2(t) + \omega_2^2 [y_2(t) - LD q_i(t)] + \gamma [\ddot{y}_2(t) - LD \ddot{q}_i(t)] + 2\omega_2 \xi_2 [\dot{y}_2(t) - \dot{y}_3(t)] = 0 \\ 2\omega_2 \xi_2 [\dot{y}_3(t) - \dot{y}_2(t)] + \alpha \omega_2^2 y_3(t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

1.1 求解析解

对公式(4)进行拉氏变换. 设解的形式 $y_2 = Y_2 e^{j\omega t}$, $q_i = H_{1i} e^{j\omega t}$, $s = j\omega$, $f = p \sin(i\pi x_1/l)/M$, 可以得到

$$\begin{cases} B_1 H_{1i} - \mu B_2 Y_2 = f \\ B_3 Y_2 - B_2 H_{1i} - B_4 Y_3 = 0 \\ B_5 Y_3 - B_4 Y_2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中,

$$\begin{aligned} B_1 &= -\omega^2 + \omega_{ai}^2 + \mu \omega_2^2 L^2 D^2 - \mu \gamma \omega^2 L^2 D^2, \\ B_2 &= \omega_2^2 LD - \omega^2 \gamma LD, \\ B_3 &= -\omega^2 + \omega_2^2 - \omega^2 \gamma + 2\omega_2 \xi_2 j\omega, \\ B_4 &= 2\omega_2 \xi_2 j\omega, \\ B_5 &= 2\omega_2 \xi_2 j\omega + \alpha \omega_2^2. \end{aligned}$$

对公式(5)进行求解得到

$$\begin{cases} H_{1i} = \frac{f(B_4^2 - B_3 B_5)}{B_1 B_4^2 - B_1 B_3 B_5 + B_5 B_2^2 \mu} \\ Y_2 = -\frac{B_2 B_5 f}{B_1 B_4^2 - B_1 B_3 B_5 + B_5 B_2^2 \mu} \\ Y_3 = -\frac{B_2 B_4 f}{B_1 B_4^2 - B_1 B_3 B_5 + B_5 B_2^2 \mu} \end{cases} \quad (6)$$

将公式(6)进行化简整理得到

$$\begin{cases} H_{1i} = \frac{f(ja_1 + b_1)}{iC_1 + D_1} \\ Y_2 = \frac{f(ja_2 + b_2)}{iC_1 + D_1} \\ Y_3 = \frac{f(ja_3 + b_4)}{iC_1 + D_1} \end{cases} \quad (7)$$

其中,

$$\begin{aligned} a_1 &= 2\omega \omega_2 \xi_2 [(1+\gamma)\omega^2 - (1+\alpha)\omega_2^2], \\ b_1 &= \omega^2 \omega_2^2 \alpha (1+\gamma) - \omega_2^4 \alpha, \\ C_1 &= 2\omega \{- (\omega - \omega_{ai})(\omega + \omega_{ai})[(1+\gamma)\omega^2 - \omega_2^2(1+\alpha)] - D^2 L^2 (\omega_2^2 - \gamma \omega^2) \{- [(1+\gamma)\omega^2 + \omega_2^2(1+\alpha)]\mu + D^2 L^2 (-\gamma \omega^2 + \omega_2^2)^2 \mu^3\} \xi_2, \\ D_1 &= \omega_2^2 \alpha \{- [(1+\gamma)\omega^2 - \omega_2^2](\omega - \omega_{ai})(\omega + \end{aligned}$$

引入参数: $M = \rho Al/2$, $\mu = m_2/M$, $\omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}$, $\xi_2 = c_2/2m_2\omega_2$, $\alpha = k_3/k_2$, $\gamma = b/m_2 D = \sin(i\pi/2)$, 则公式(3)可以化简为

$$\omega_{ai})\} - D^2 L^2 (\gamma \omega^2 - \omega_2^2) [(1+\gamma)\omega^2 - \omega_2^2] \mu + D^2 L^2 (-\gamma \omega^2 + \omega_2^2)^2 \mu^3),$$

$$a_2 = 2DL\omega^2 \omega_2 \mu \alpha \xi_2 (\gamma \omega^2 - \omega_2^2),$$

$$b_2 = \omega^2 \omega_2 DL \mu \alpha (\gamma \omega^2 - \omega_2^2),$$

$$a_3 = 2DL\omega \omega_2 \mu \xi_2 (\gamma \omega^2 - \omega_2^2),$$

$$b_3 = 0.$$

引入下列参数:

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega_{ai}}, v = \frac{\omega_2}{\omega_{ai}}, H_{st} = \frac{F}{K_1} \quad (8)$$

定义主系统振幅放大因子

$$C_{1i}^2 = \left| \frac{H_{1i}}{H_{st}} \right|^2 = \frac{\xi_2^2 a_4^2 + b_4^2}{\xi_2^2 C_2^2 + D_2^2} \quad (9)$$

其中,

$$a_4 = 2\lambda [v^2(1+\alpha) - (1+\gamma)\lambda^2],$$

$$b_4 = v\alpha [v^2 - (1+\gamma)\lambda^2],$$

$$C_2 = 2\lambda \{(-1+\lambda^2)[-v^2(1+\alpha) + (1+\gamma)\lambda^2] + L^2 D^2 (v^2 \alpha - \lambda^2)(v^2 - \gamma \lambda^2) \mu\},$$

$$D_2 = v\alpha \{v^2 [-1 + \lambda^2(1 + L^2 D^2 \mu)] + \lambda^2 [1 + \gamma - \lambda^2(1 + \gamma + L^2 D^2 \gamma \mu)]\}.$$

系统的固有频率可以令式(9)的分母为0得到

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(1 + D^2 L^2 \mu) \omega_2^2 + (1 + \gamma) \omega_{ai}^2 \pm \sqrt{\varphi}}{2(1 + \gamma + D^2 L^2 \gamma \mu)} \quad (10)$$

其中

$$\varphi = -4(1 + \gamma + D^2 L^2 \gamma \mu) \omega_2^2 \omega_{ai}^2 + [(1 + D^2 L^2 \mu) \omega_2^2 + (1 + \gamma) \omega_{ai}^2]^2$$

1.2 最优参数

采用固定点理论是对动力吸振器参数进行优化的传统方法, 利用 H_∞ 优化能够求得动力吸振器的最优刚度比和最优阻尼比等参数. 通过公式(9)的简单推导可以看出, 其归一化幅频曲线总是会经过三个与阻尼比无关的点, 而这三个点正是该动力吸振器的固定点. 为了更加直观地展示这一结论,

图 2 表示了当动力吸振器阻尼比分别为 0.25、0.3 和 0.35 时的归一化幅频响应曲线。从图中可以明显看出,所有曲线都经过与阻尼比无关的 P 、 Q 和 R 三个点。在幅频响应曲线上,固定点的位置不受阻尼变化的影响。这意味着无论阻尼如何变化,这些点的幅值保持不变。因此,可以通过调整其他参数(如质量比、刚度)来设定这些固定点的高度。 H_∞ 优化的目标是使幅频响应的峰值最小且相等。

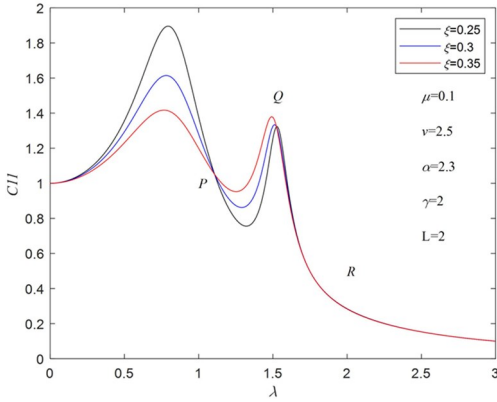


图 2 不同阻尼比下的归一化幅频响应曲线
Fig. 2 Normalized amplitude-frequency response curves under different damping ratios

通过固定点理论,可以首先确定无阻尼或特定阻尼下的固定点高度,然后调整阻尼使得其他峰值与固定点高度一致。这样,所有峰值都相等,实现了等峰状态,从而满足了 H_∞ 优化的目标。

依据固定点理论,实现两固定点的纵坐标值相等的关键在于确保当阻尼比趋近于 0 或无限大时,系统的响应值趋于相同,即满足特定条件:

$$\left| \frac{a_4}{C_2} \right| = \left| \frac{b_4}{D_2} \right|.$$

整理得到

$$q_1 \lambda^6 + q_2 \lambda^4 + q_3 \lambda^2 + q_4 = 0 \quad (11)$$

其中

$$\begin{cases} q_1 = [-2(1+\gamma) - 2\gamma(1+\gamma)(1+D^2L^2\mu)] \\ q_2 = [4v^2 + 2v^2\alpha + 4v^2\gamma + 2v^2\alpha\gamma + 2(1+\gamma) + 2\gamma(1+\gamma) + 2D^2L^2v^2\mu + 4D^2L^2v^2\gamma\mu + 2D^2L^2v^2\mu\alpha\gamma + D^2L^2v^2\mu\alpha\gamma^2] \\ q_3 = \{-4v^2 - 2v^2\alpha - 4v^2\gamma - 2v^2\alpha\gamma - 2v^4(1 + D^2L^2\mu) - 2v^4\alpha[1 + D^2L^2(1+\gamma)\mu]\} \\ q_4 = 2v^4 + 2v^4\alpha + D^2L^2v^6\alpha\mu \end{cases}$$

因为固定点与阻尼比无关,所以当 $\xi=0$ 时满足

$$|C_{1i}| = \left| \frac{H_{1i}}{H_{st}} \right| = \left| \frac{v^2 - (1+\gamma)\lambda^2}{v^2[-1 + \lambda^2(1 + L^2D^2\mu)] + \lambda^2[1 + \gamma - \lambda^2(1 + \gamma + L^2D^2\gamma\mu)]} \right| \quad (12)$$

当 $\xi=\infty$ 时满足

$$|C_{1i}| = \left| \frac{H_{1i}}{H_{st}} \right| = \left| \frac{v^2(1+\alpha) - (1+\gamma)\lambda^2}{(-1 + \lambda^2)[-v^2(1+\alpha) + (1+\gamma)\lambda^2] + L^2D^2(v^2\alpha - \lambda^2)(v^2 - \gamma\lambda^2)\mu} \right| \quad (13)$$

进而得到

$$|C_{1i}| = \left| \frac{H_{1i}}{H_{st}} \right| = \left| \frac{v^2(2+\alpha) - 2(1+\gamma)\lambda^2}{v^2\alpha[1 - \lambda^2 + D^2L^2\mu(v^2 - \gamma\lambda^2)]} \right| \quad (14)$$

设 λ_P^2 、 λ_Q^2 、 λ_R^2 是式(11)的三个根,一旦 λ_P 、 λ_Q 、 λ_R 的值确定,可得到 λ_P 、 λ_Q 、 λ_R 点的纵坐标如下:

$$\begin{cases} \left| \frac{H_{1i}}{H_{st}} \right|_P = \frac{v^2(2+\alpha) - 2(1+\gamma)\lambda_P^2}{v^2\alpha[1 - \lambda_P^2 + D^2L^2\mu(v^2 - \gamma\lambda_P^2)]} \\ \left| \frac{H_{1i}}{H_{st}} \right|_Q = -\frac{v^2(2+\alpha) - 2(1+\gamma)\lambda_Q^2}{v^2\alpha[1 - \lambda_Q^2 + D^2L^2\mu(v^2 - \gamma\lambda_Q^2)]} \\ \left| \frac{H_{1i}}{H_{st}} \right|_R = \frac{v^2(2+\alpha) - 2(1+\gamma)\lambda_R^2}{v^2\alpha[1 - \lambda_R^2 + D^2L^2\mu(v^2 - \gamma\lambda_R^2)]} \end{cases} \quad (15)$$

通过调整三个固定点的纵坐标,可以得到最优的调谐比。这一过程分为两个步骤。第一步,将点 P 和点 R 的纵坐标调整到相同的高度,这样就可以得到

把公式(16)代入公式(11)可以得到

$$\begin{aligned} & -2[1 + \lambda + D^2L^2\mu(-v^2 + \gamma\lambda)]\{v^4(-1 + D^2L^2\mu) - 2v^2(1 + \gamma)(-1 + D^2L^2\lambda\mu) + (1 + \gamma)\lambda[-2 + \lambda + \gamma(-2 + \lambda + D^2L^2\lambda\mu)]\} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

根据公式(17),可以求得三个固定点的横坐标,具体如下所示

$$\begin{cases} \lambda_P^2 = \frac{1 + D^2L^2v^2\mu + \gamma(2 + \gamma + D^2L^2v^2\mu) - \sqrt{\psi}}{(1 + \gamma)(1 + \gamma + D^2L^2\gamma\mu)} \\ \lambda_Q^2 = \frac{1 + D^2L^2v^2\mu}{1 + D^2L^2\gamma\mu} \\ \lambda_R^2 = \frac{1 + D^2L^2v^2\mu + \gamma(2 + \gamma + D^2L^2v^2\mu) + \sqrt{\psi}}{(1 + \gamma)(1 + \gamma + D^2L^2\gamma\mu)} \end{cases} \quad (18)$$

其中

$$\phi = (1 + \gamma)[(1 + \gamma)(1 - v^2 + \gamma)^2 + D^2 L^2 v^2 \mu(2 - v^2 + 2\gamma)] + D^4 L^4 v^4 \mu^2$$

对公式(15)进行整理和化简后得到

$$\begin{cases} \left| \frac{H_{1i}}{H_{st}} \right|_{P,R} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma + v^2(-1 + D^2 L^2 \mu)} \\ \left| \frac{H_{1i}}{H_{st}} \right|_Q = \frac{(1 + D^2 L^2 \gamma \mu)[1 + \gamma + v^2(-1 + D^2 L^2 \mu)]}{D^2 L^2 \mu(v^2 - \gamma)^2} \end{cases} \quad (19)$$

第二步,将 P 点或 R 点的纵坐标与 Q 点的纵坐标调整至一致,进而可以求得最优调谐比

$$v_{opt} = \sqrt{-\frac{(1 + \gamma)(-1 + D^2 L^2 \mu + D^4 L^4 \gamma \mu^2) + \sqrt{D^2 L^2 \mu(1 + \gamma)(1 + D^2 L^2 \gamma \mu)^3}}{1 + D^2 L^2 \mu\{-3 + D^2 L^2 \mu[1 + \gamma(-2 + D^2 L^2 \mu)]\}}} \quad (20)$$

将公式(20)代入到公式(16)中,可以得到最优刚度比

$$\alpha_{opt} = \frac{2(-D^2 L^2 \gamma \mu(1 + D^2 L^2 \gamma \mu) + \sqrt{D^2 L^2 \mu(1 + \gamma)(1 + D^2 L^2 \gamma \mu)^3})}{(1 + D^2 L^2 \gamma \mu)(1 + \gamma + D^2 L^2 \gamma \mu)} \quad (21)$$

此时

$$\left| \frac{H_{1i}}{H_{st}} \right| = \frac{\sqrt{\beta} + D^2 L^2 \mu[1 + \gamma + D^2 L^2 \mu \gamma(1 + \gamma) - \sqrt{\beta}]}{\mu(DL + D^3 L^3 \mu \gamma)^2} \quad (22)$$

其中

$$\beta = D^2 L^2 \mu(1 + \gamma)(1 + D^2 L^2 \gamma \mu)^3$$

当固定点被调节到同样的高度时,见图 3. 在这种情况下,通过调整两个共振峰的高度使其一致,便能够获得最优的阻尼比。

要想计算出最优阻尼比,需知道两个共振峰的横坐标,即 $\lambda_{1,2}$. 令

$$\frac{\partial C_{1i}}{\partial \lambda_1} = 0, \frac{\partial C_{1i}}{\partial \lambda_2} = 0 \quad (23)$$

由上式可以得到 ξ_1 和 ξ_2 的值,继而得到 $\xi_{opt} = (\xi_1 + \xi_2)/2$, 不过想要得到解析结果是相当困难的。

从图 3 可以看出,当两个谐振峰的高度相同时,幅频曲线在 Q 点附近斜率为 0. 由于 Q 点的横坐标已经确定,因此可以根据 Q 点在横轴上的位置求出近似的最优阻尼比. 根据

$$\begin{cases} \frac{\partial C_{1i}}{\partial \lambda^2} = 0 \\ \alpha = \frac{2[-D^2 L^2 \gamma \mu(1 + D^2 L^2 \gamma \mu) + \sqrt{D^2 L^2 \mu(1 + \gamma)(1 + D^2 L^2 \gamma \mu)^3}]}{(1 + D^2 L^2 \gamma \mu)(1 + \gamma + D^2 L^2 \gamma \mu)} \\ v = \sqrt{-\frac{(1 + \gamma)\{-1 + D^2 L^2 \mu + D^4 L^4 \gamma \mu^2\} + \sqrt{D^2 L^2 \mu(1 + \gamma)(1 + D^2 L^2 \gamma \mu)^3}}{1 + D^2 L^2 \mu\{-3 + D^2 L^2 \mu[1 + \gamma(-2 + D^2 L^2 \mu)]\}}} \\ \lambda_p^2 = \frac{1 + D^2 L^2 v^2 \mu}{1 + D^2 L^2 \gamma \mu} \end{cases} \quad (24)$$

从而得到近似最优阻尼比

$$\xi_{opt} = \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad (25)$$

其中 a, b, c, R, S, K 具体表述见附录.

此时通过 Q 点求出的阻尼比为近似值. 理论

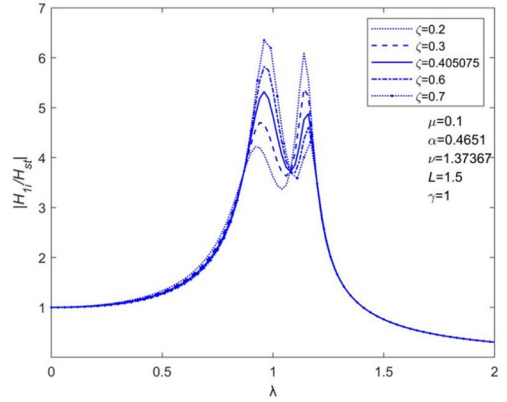


图 3 不同阻尼比下幅频曲线(1 阶模态)
Fig. 3 Amplitude-frequency curves under different damping ratios (first-order mode)

上可以求得最优的精确值,但是解析计算难度太大,甚至无法解析地求解。

1.3 惯容最佳工作范围

需要注意的是,为了保证系统在任何情况下都

能稳定地工作,就必须确定惯性系数的适用范围. 对于其他带惯容的吸振器中,惯容系数的适用范围通过以下方式确定^[17]:在筛选最优接地刚度比 α_{opt} 时,已经验证过其满足系统的固有频率大于 0 的条件. 结合每一个最优参数及其计算过程来看,惯容的适用范围应同时满足各最优参数公式中分母不为 0,根号内的部分大于 0,同时最优频率比 v_{opt} 和最优阻尼比 ξ_{opt}^2 均大于 0.

但是在本文模型中接地刚度并不与吸振器质量块相连接,而是接地式三要素,接地刚度与阻尼相连接,在固有频率项中并不含有刚度项,并且固有频率大于 0. 在最优频率比中也不含有刚度项,所以本文惯容系数的工作范围是通过以下方式确定:满足各表达式分母不等于 0,根号下部分大于 0,最优频率比 v_{opt} 和最优阻尼比 ξ_{opt}^2 大于 0

$$\begin{cases} v_{\text{opt}} > 0 \\ D^2 L^2 \mu (1 + \gamma) (1 + D^2 L^2 \gamma \mu) > 0 \\ \mu > 0 \\ L \neq 0 \end{cases} \quad (26)$$

采用 MATHEMATICA 软件计算上述公式,能够确定惯容比的最佳工作区间

$$-\frac{1}{1 + D^2 L^2 \mu} < \gamma < \frac{-1 + 3D^2 L^2 \mu - D^4 L^4 \mu^2}{-2D^4 L^4 \mu^2 + D^6 L^6 \mu^3} \quad (27)$$

如果惯容比取负值,这可能会引起系统失稳,从而影响吸振效果. 因此此时惯容比的最佳工作范围为

$$0 < \gamma < \frac{-1 + 3D^2 L^2 \mu - D^4 L^4 \mu^2}{-2D^4 L^4 \mu^2 + D^6 L^6 \mu^3} \quad (28)$$

由以上分析可以得出结论:要想使动力吸振器充分发挥减振作用,应该优先选取放大比和最佳质量比的大小,再依据系统放大比、质量比、简支梁的阶次得到惯容的适用工作范围,从适用工作范围中选取适用的惯容系数. 在实际应用中,应避免惯容系数取过大或过小的值,以免影响吸振器的性能. 因此惯容比在实际中应大于 0.

通过进一步对公式(28)进行分析,取简支梁的 1 阶模态,质量比 $\mu = 0.1$,此时惯容比的最佳工作范围受到放大比 L 的影响,当放大比取如下范围时,惯容比的最佳工作范围 $\gamma > 0$.

$$\begin{cases} 0 < L < 1.9543 \\ 4.7214 < L < 5.1166 \end{cases} \quad (29)$$

在进行的数值验证以及探究动力吸振器各项参数对其减振性能影响的数值仿真研究中,本文选取了简支梁结构的第 1 阶振动模态作为主要研究对象,以此为基础开展数值验证及仿真分析工作. 这一选择旨在通过聚焦于简支梁最基本的振动特性:简支梁本身是一个连续系统,其振动特性可以通过模态分析来描述. 在研究 1 阶振动模态时,可以将简支梁简化为一个单自由度系统,其固有频率和振型主要由梁的物理参数(如长度、弹性模量、截面惯性矩等)决定. 当动力吸振器安装在简支梁中点时,主系统(简支梁)和吸振器之间会产生耦合. 这种耦合使得整个系统可以被视为一个二自由度系统,在此基础上进行数值仿真. 此时,系统的振动特性由主系统和吸振器的参数共同决定.

2 数值验算

利用 MATLAB 软件进行了仿真数值求解并将所有结果与解析解对比分析,以此来验证整个求解过程的正确性. 选取放大比 $L = 1.5$,质量比 $\mu = 0.1$,惯容比 $\gamma = 1$,输入的激励振幅 $F_0 = 1000$ N,经计算得到的最优参数依次是 $v = 1.373\ 67$, $\xi = 0.405\ 075$, $\alpha = 0.465\ 134$. 采用有限差分法,选择中心差分格式、二阶中心差分格式、四阶五点中心差分格式,并对初始条件和边界条件下的迭代格式进行分析. 在计算时间为 500 s 的条件下,针对特定的简谐激励求得了数值解. 略去瞬态数值后,以稳态响应的峰值作为幅值基准,经过归一化处理,从而可以得到归一化幅频响应曲线,得到幅频响应曲线并与解析解对比. 该解析解在图 4 中以黑色实线的形式表示出来. 通过图 4 进行对比分析,发现该模型的数值解与解析解之间存在良好的一致性,这证实了求解流程是准确无误的.

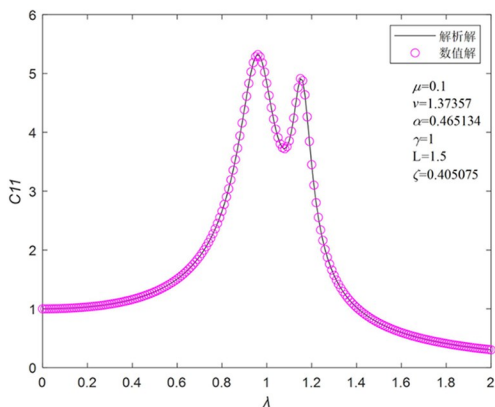


图 4 解析解与数值解对比

Fig. 4 Comparison between analytical and numerical solutions

2.1 频率响应曲线

基于建立的模型和优化后所得到的参数,绘制了简支梁在安装复合型吸振器后在力作用点处的幅频响应曲线,如图 5 所示.

根据图 5 所示,当在第 1 阶模态固有频率处引入复合型吸振器后,不仅明显降低了谐振峰值,还实现了较宽频率范围内的有效振动抑制.值得注意的是,由于动力吸振器安装于第 2 阶模态振型的节点处,故其安装对弹性梁幅频响应放大系数曲线的第二谐振峰没有产生任何不利影响.

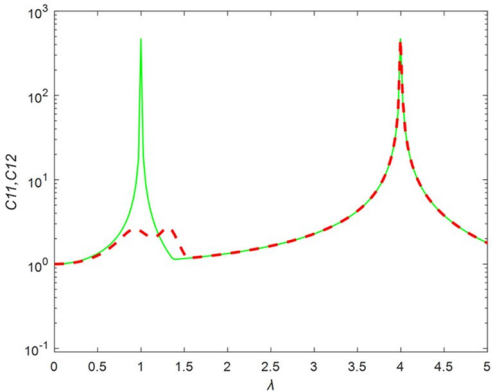


图 5 有无吸振器弹性梁放大系数曲线
Fig. 5 Amplification factor curves of the elastic beam with and without vibration absorber

2.2 放大比对减振性能的影响

设定初始条件质量比为 0.1,惯容比为 2,并选择放大比 L 的值为 1、1.5、1.9,基于上述参数,绘制了不同放大比下主系统的位移幅频响应曲线,如图 6 所示.通过对图 6 进行分析可以发现,在初始参数相同的条件下,随着放大比的增加,主系统的最大振幅呈现减小的趋势;同时两个共振峰之间的距离逐渐拉大,意味着有效的振动抑制频带范围越来越宽.当放大比为 1 时,此时模型退化为含惯容和接地式三要素吸振器的弹性简支梁模型,从图 6 可以发现复合型吸振器要比单一的含惯容和接地式三要素吸振器减振性能更好.

当质量比为 0.1,放大比大于 1.9543 时,惯容不再产生正向作用.在这里令惯容比等于 0,此时系统模型退化为具有放大机构和接地三要素动力吸振器的弹性简支梁模型.基于上述参数,选择放大比的值为 2、2.5、3,绘制了不同放大比下主系统的位移幅频响应曲线,如图 7 所示.通过对图 7 进行分析可以发现,在初始参数相同的条件下,随着

放大比的增加,主系统的最大振幅呈现减小的趋势,同时两个共振峰之间的距离逐渐拉大,意味着有效的振动抑制频带范围越来越宽.

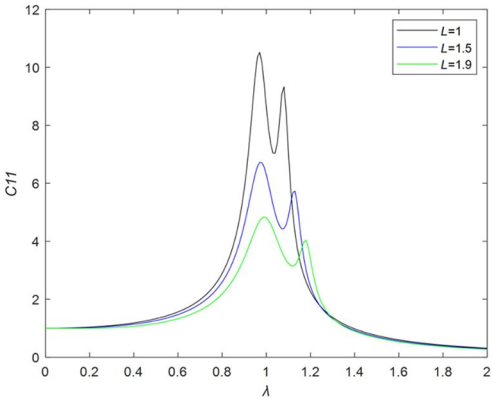


图 6 放大比对归一化位移振幅放大因子的影响
Fig. 6 Effect of amplification ratio on the normalized displacement amplification factor

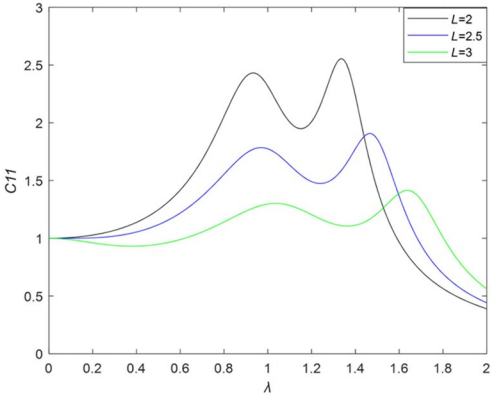


图 7 更大的放大比对归一化位移振幅放大因子的影响
Fig. 7 Effect of larger amplification ratio on the normalized displacement amplification factor

2.3 惯容对主系统的影响

选取放大比为 1.5,质量比为 0.1,将上述参数代入公式(28)得到惯容比的最佳工作范围为(0, 4.180 14),选取惯容比为 1、2、3、4,绘制主系统的幅频响应曲线,如图 8 所示.

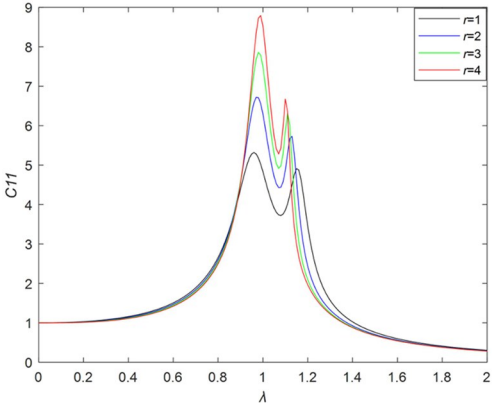


图 8 惯容比对归一化位移振幅放大因子的影响
Fig. 8 Effect of inerter ratio on the normalized displacement amplification factor

通过对图 8 进行分析可以明显发现,在最佳工作范围内,随着惯容比的增加,主系统的最大振幅呈现增大的趋势,同时两个共振峰之间的距离逐渐减小,意味着有效的振动抑制频带范围越来越窄.可以得到的结论是:在主系统与子系统之间加入惯容并没有提升系统的减振性能.

实际上类似的结论最早由 Hu^[29]发现,Hu 的研究结果表明,仅在传统动力吸振器中添加一个惯容(无论与阻尼并联还是串联),系统的性能均没有得到改善.其解决方法需要在传统动力吸振器中同时引入惯容和弹簧,通过改进方案,动力吸振器在性能上取得了显著提升.Wang^[30]等提出一种新型的基于惯容的动力吸振器,以提升被动式动力吸振器的性能.通过将惯容与动力吸振器在不同位置进行匹配,设计了几种新型的动力吸振器.然后,基于

经典固定点理论,得到了六种动力吸振器的最优参数.这些参数表明,所有连接在主系统和吸振器系统之间的惯容并不能提升动力吸振器(DVA)的性能,而所有连接到地面的惯容则可以改善动力吸振器的性能.

通过上述学者的研究可以得到结论,在本文动力学模型中也是将惯容连接于主子系统之间,并不能提升动力吸振器的性能,建议后续研究者研究惯容接地对动力吸振器性能的改善效果.

通过与其他模型的对比,来验证复合型动力吸振器模型的减振效果.表 1(见附录)列出了两种模型的最优参数配置.当质量比为 0.1 时,相应的幅频响应曲线如图 9 所示.分析结果表明,本研究设计的吸振器在减振性能上具有显著优势,不仅有效降低了振动峰值,同时扩展了有效工作频带范围.

表 1 吸振器模型参数最优设计公式
Table 1 Optimal design formulas for vibration absorber model parameters

吸振器模型	v_{opt}	α_{opt}	ξ_{opt}
文献[31]模型	$v_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{u} - u}}$	$\alpha_{\text{opt}} = 2\sqrt{u}$	$\xi_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{u}}}$
本文模型	公式(20)	公式(21)	公式(25)

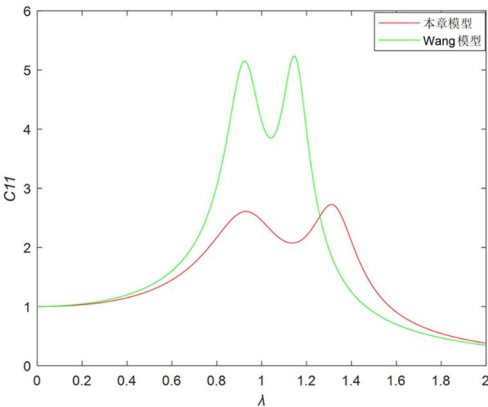


图 9 与传统形式动力吸振器对比
Fig. 9 Comparison with conventional dynamic vibration absorber

3 结论

本文介绍了一种复合型动力吸振器与弹性简支梁耦合构成的系统模型.在此基础上,选择弹性梁的第 1 阶振动模态作为控制对象,并运用固定点理论来优化动力吸振器—简支弹性梁系统的设计参数,进而通过幅频响应分析来评估动力吸振器的减振效果.

复合型动力吸振器相较于其他三要素动力吸

振器,对弹性简支梁的振动抑制效果更为突出.在第 1 阶模态固有频率处,通过引入复合型动力吸振器,在显著降低谐振峰值的同时,实现了更广的有效振动抑制频率范围;随着放大比的增加,主系统的最大振幅会呈现下降趋势,同时两个共振峰之间的距离逐渐扩大,导致有效的振动抑制频带范围变得更宽,较大的放大比使系统具有更好的减振性能;在该动力吸振器中加入惯容将增加整个系统的质量却不能充分发挥它良好的减振性能.

在简谐激励条件下,对比验证了动力吸振器(DVA)的减振效能.结果表明,通过合理配置放大机构、惯容和接地三要素动力吸振器,可以显著减小主系统的振幅,并有效拓宽减振频率范围,这为新型吸振器的设计与实践应用提供了有价值的理论参考.

参考文献

[1] FRAHM H. Device for damping vibrations of bodies: US089958 [P]. 1909-10-30.
[2] ORMONDROYD J, DEN HARTOG J P. The

- theory of the dynamic vibration absorber [J]. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1928, 49/50(2): 021007.
- [3] DEN HARTOG J P. Mechanical vibrations [M]. New York: McGraw-Hall Book Company, 1947: 112—132.
- [4] 李艳. 基于颗粒阻尼机理的钢轨动力吸振器设计研究[J]. 铁道建筑技术, 2022(4): 41—45.
LI Y. Design of rail dynamic vibration absorber based on particle damping mechanism [J]. Railway Construction Technology, 2022(4): 41—45. (in Chinese)
- [5] 赵存生, 李海峰, 朱石坚. 悬臂梁动力吸振器的理论分析与试验[J]. 噪声与振动控制, 2015, 35(4): 175—178.
ZHAO C S, LI H F, ZHU S J. Theoretical analysis and experimental study of cantilever beam type dynamic vibration absorbers [J]. Noise and Vibration Control, 2015, 35(4): 175—178. (in Chinese)
- [6] 姚伍平, 彭旭, 唐文兵, 等. 基于欧拉梁的管路吸振器振动特性研究[J]. 舰船科学技术, 2020, 42(15): 48—54.
YAO W P, PENG X, TANG W B, et al. Research on vibrational characteristics of pipe DVA system based on Euler beam [J]. Ship Science and Technology, 2020, 42(15): 48—54. (in Chinese)
- [7] 赵迪, 毛崎波, 何帆, 等. 中间支撑梁式动力吸振器的设计与实验研究[J]. 噪声与振动控制, 2023, 43(4): 243—247, 287.
ZHAO D, MAO Q B, HE F, et al. Design and experimental study on multi-DOF dynamic vibration absorbers with intermediately supported beam structures [J]. Noise and Vibration Control, 2023, 43(4): 243—247, 287. (in Chinese)
- [8] 刘海平, 黄志锋, 边新孝. 负刚度吸振器对有限长弹性梁的抑振效果研究[J]. 振动与冲击, 2022, 41(4): 134—141, 184.
LIU H P, HUANG Z F, BIAN X X. A study on vibration suppression effect of a finite elastic beam with a negative stiffness vibration absorber [J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(4): 134—141, 184. (in Chinese)
- [9] 陈杰, 孙维光, 吴杨俊, 等. 基于惯容负刚度动力吸振器的梁响应最小化[J]. 振动与冲击, 2020, 39(8): 15—22.
CHEN J, SUN W G, WU Y J, et al. Minimization of beam response using inerter-based dynamic vibration absorber with negative stiffness [J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(8): 15—22. (in Chinese)
- [10] 代晗, 赵艳影. 负刚度时滞反馈控制动力吸振器的等峰优化[J]. 力学学报, 2021, 53(6): 1720—1732.
DAI H, ZHAO Y Y. Equal-peak optimization of dynamic vibration absorber with negative stiffness and delay feedback control [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(6): 1720—1732. (in Chinese)
- [11] HAO Y, SHEN Y J, LI X H, et al. H_∞ optimization of Maxwell dynamic vibration absorber with multiple negative stiffness springs [J]. Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, 2021, 40(3): 1558—1570.
- [12] MANTAKAS A G, KAPASAKALIS K A, ALVERTOS A E, et al. A negative stiffness dynamic base absorber for seismic retrofitting of residential buildings [J]. Structural Control and Health Monitoring, 2022, 29(12): 1—22.
- [13] HAROUNI P, ATTARI N K A, ROFOOEI F R. Evaluation of a robust dynamic vibration absorber based on negative stiffness and internal resonance against seismic excitation [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2022, 146: 104130.
- [14] 邢昭阳, 申永军, 邢海军, 等. 一种含放大机构的负刚度动力吸振器的参数优化[J]. 力学学报, 2019, 51(3): 894—903.
XING Z Y, SHEN Y J, XING H J, et al. Parameters optimization of a dynamic vibration absorber with amplifying mechanism and negative stiffness [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2019, 51(3): 894—903. (in Chinese)
- [15] 周子博, 申永军, 杨绍普. 含放大机构的三要素型动力吸振器的 H_∞ 优化[J]. 振动与冲击, 2022, 41(5): 158—165.
ZHOU Z B, SHEN Y J, YANG S P. H_∞ optimization of 3-factor type dynamic vibration absorber with amplification mechanism [J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(5): 158—165. (in Chinese)
- [16] 周子博, 申永军, 邢海军, 等. 含惯容和杠杆元件的减振系统参数优化及性能分析[J]. 振动工程学报, 2022, 35(2): 407—416.
ZHOU Z B, SHEN Y J, XING H J, et al. Parameter optimization and performance analysis of vibration mitigation systems with inertia and lever com-

- ponents [J]. Journal of Vibration Engineering, 2022, 35(2): 407—416. (in Chinese)
- [17] 杨晓彤, 申永军, 王俊锋. 一种含放大机构、惯容和接地刚度的动力吸振器的参数优化[J]. 振动与冲击, 2022, 41(21): 308—315.
- YANG X T, SHEN Y J, WANG J F. Parametric optimization of a DVA with amplifying mechanism, inerter and grounded stiffness [J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(21): 308—315. (in Chinese)
- [18] SHEN Y J, XING Z Y, YANG S P, et al. Parameters optimization for a novel dynamic vibration absorber [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 133: 106282.
- [19] 邢子康, 申永军, 邢海军, 等. 一种含有杠杆元件的动力吸振器参数优化[J]. 振动工程学报, 2020, 33(2): 347—355.
- XING Z K, SHEN Y J, XING H J, et al. Parameters optimization for a type of dynamic vibration absorber with lever component [J]. Journal of Vibration Engineering, 2020, 33(2): 347—355. (in Chinese)
- [20] FLANNELLY. Dynamic antiresonant vibration isolator: US3322379 [P]. 1967—05-30.
- [21] 李春祥, 熊学玉. 杠杆式调谐质量阻尼器(LT-TMD)新模型策略的动力特性[J]. 四川建筑科学研究, 2003, 29(4): 73—75.
- LI C X, XIONG X Y. Dynamic characteristics of new modeling strategy of lever-type tuned mass damper(LT-TMD) [J]. Building Science Research of Sichuan, 2003, 29(4): 73—75. (in Chinese)
- [22] 汪正兴, 任文敏, 陈开利. 斜拉索杠杆质量减振器的减振分析[J]. 工程力学, 2007, 24(11): 153—157.
- WANG Z X, REN W M, CHEN K L. Analysis on inclined cable vibration suppression using lever mass damper [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(11): 153—157. (in Chinese)
- [23] ZANG J, YUAN T C, LU Z Q, et al. A lever-type nonlinear energy sink [J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 437: 119—134.
- [24] 刘建武, 叶茂, 谢秋林. 基于杠杆原理阻尼器关键机理和有限元分析[J]. 华南地震, 2019, 39(4): 98—103.
- LIU J W, YE M, XIE Q L. Key mechanism and finite element analysis of damper based on lever principle [J]. South China Journal of Seismology, 2019, 39(4): 98—103. (in Chinese)
- [25] 凌彬. 扇形铅黏弹性阻尼器加固节点设计方法研究[D]. 广州: 广州大学, 2023.
- LING B. Research on the design method of reinforced nodes with fan-shaped lead viscoelastic dampers[D]. Guangzhou: Guangzhou University, 2023. (in Chinese)
- [26] 游浩. 磁流变阻尼器的分数阶建模及其在汽车悬架中的应用研究[D]. 石家庄: 石家庄铁道大学, 2017.
- YOU H. Study on Fractional-order models and application of magneto-rheological damper in vehicle suspension [D]. Shijiazhuang: Shijiazhuang Tiedao University, 2017. (in Chinese)
- [27] 常宇健, 田沃沃, 陈恩利, 等. 基于分数阶微分的金属橡胶迟滞非线性动力学模型[J]. 振动与冲击, 2020, 39(14): 233—241.
- CHANG Y J, TIAN W W, CHEN E L, et al. Dynamic model for the nonlinear hysteresis of metal rubber based on the fractional-order derivative [J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(14): 233—241. (in Chinese)
- [28] 戚壮, 王晓雷, 莫荣利, 等. 高速列车空气弹簧横向特性动力学建模与应用[J]. 振动测试与诊断, 2021, 41(5): 904—912, 1032.
- QI Z, WANG X L, MO R L, et al. Dynamic modeling and application of lateral characteristics for high speed train air spring [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2021, 41(5): 904—912, 1032. (in Chinese)
- [29] HU Y L, CHEN M Z Q. Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2015, 99: 297—307.
- [30] WANG X R, LIU X D, SHAN Y C, et al. Analysis and optimization of the novel inerter-based dynamic vibration absorbers [J]. IEEE Access, 2018, 6: 33169—33182.
- [31] 王孝然, 申永军, 杨绍普. 接地式三要素型动力吸振器的 H_∞ 优化 [J]. 动力学与控制学报, 2016, 14(5): 448—453.
- WANG X R, SHEN Y J, YANG S P. H_∞ optimization of the grounded three-element type dynamic vibration absorber [J]. Journal of Dynamics and Control, 2016, 14(5): 448—453. (in Chinese)

附录：

$$\begin{aligned} a &= 4RD^2L^2(1+\gamma)(1+S\gamma)^8(1+\gamma+S\gamma)^4 \times \{S^{10}\gamma^4(11+\gamma)+S^{11}\gamma^5-K+S^9\gamma^3(34-11\gamma+K) \\ &+S(3+4\gamma+4K-8\gamma K)+S^8\gamma^2[46+3K+\gamma(-34+40\gamma+K)]+S^7\gamma[29+3K+\gamma(-26+85\gamma-70\gamma^2+ \\ &18K)]+S^5\{5+16K-\gamma\{53+75K+\gamma[73+3\gamma(-53+12\gamma)-70K]\}\}+S^4\{-29-30K+\gamma\{45+91K+ \\ &\gamma[99+\gamma(-87+8\gamma)-68K]\}\}+S^6\{7+K+\gamma\{1+33K+\gamma[21+\gamma(-157+68\gamma)-45K]\}\}-S^2\{15+ \\ &10K+\gamma[9-37K+8\gamma(-2+K)]\}+S^3\{31+22K+\gamma[-7-75K+\gamma(-63+20\gamma+36K)]\}\} \\ b &= 8RD^6L^6\mu^2\gamma(1+\gamma)(1+S\gamma)^8(1+\gamma+S\gamma)^3\{-1+4K+S^4\gamma^5\{-16+S\{56+S\{-80S[60+ \\ &S(-25+6S)]\}\}\}+S^3\gamma^4\{-44+S\{136+S\{-162+S\{90+S[-20+S(-1+6S)]\}\}\}\}+S\{-15K+ \\ &S\{5+26K+S\{-4-25K+S[-5+10K+S(6+K)]\}\}\}+\gamma\{-1+5K+S\{-14-3K+S\{45-22K+ \\ &S\{-52+45K+S\{37-40K+S[-34+15K+3S(8+K)]\}\}\}\}\}+S\gamma^2\{-14+20K+S\{-1-60K+ \\ &S\{88+70K+S\{-149-40K+S\{116+10K+3S[-22+S(12+K)]\}\}\}\}+S^2\gamma^3\{-41+16K+S\{92- \\ &56K+S\{-39+80K+S\{-62-60K+S\{80+25K+S[-44-5K+S(24+K)]\}\}\}\}\} \\ c &= 2RS^2(1+\gamma)(1+S\gamma)^2(DL+D^3L^3\gamma\mu)^2\{1+\gamma-2\gamma K+S\gamma[2+3\gamma+S\gamma(1+2\gamma)]\}^2[K+(1+ \\ &\gamma)(-1+S+S^2\gamma)]^2\{K-S[1+\gamma+S\gamma(1+\gamma)+K]\}\{-1+K+S[1+\gamma(-1+S)(2+S\gamma)]\}^2+2\mu(DL+ \\ &D^3L^3\gamma\mu)^4[1+\gamma-2\gamma K+S\gamma(1+2\gamma)]\}^2[K+(1+\gamma)(-1+S+S^2\mu)]^2(K-S[1+\gamma+S\gamma(1+\gamma)+ \\ &K])^2\{K-S\{1+K+\gamma\{-1+K+S\{4+K+\gamma\{-2+S[5+\gamma(-1+2S)]\}\}\}\}\} \\ R &= 16D^2L^2\mu^2\{\gamma-[(1+\gamma)(1+\gamma+S\gamma)/[1+\gamma-S(1+\gamma)-S^2\gamma(1+\gamma)+K]]^2 \\ S &= D^2L^2\mu \\ K &= \sqrt{S(1+\gamma)(1+S\gamma)^3} \end{aligned}$$