

拉簧构造正、负刚度并联机制的准零刚度隔振器设计^{*}

赵峰^{1,2,3} 魏士清¹ 杜文辽¹ 王才东^{1†} 曹树谦^{2,3}

(1. 郑州轻工业大学 机电工程学院, 郑州 450002)

(2. 天津大学 机械工程学院, 天津 300350)

(3. 车用动力系统全国重点实验室, 天津 300350)

摘要 准零刚度(QZS)隔振器因优越的低频隔振能力获得广泛关注,但低频激励时实验装置中较大的阻尼将引起隔振质量无相对运动,导致低频隔振失效.为解决这一问题,采用拉伸弹簧替代压缩弹簧以减小实验装置中的阻尼,拉簧构造正、负刚度结构且并联,设计全拉簧准零刚度隔振器.静态分析推导了准零刚度条件,分析了参数影响下的准零刚度特性,可实现静态平衡点附近宽范围的准零刚度.动态分析中,采用谐波平衡法验证基于增量谐波平衡法和连续算法计算的位移传递率,在隔振频域具有较好的一致性.通过设计、装配隔振器样机,开展了动态隔振实验,同时采用 ADAMS 仿真分析了隔振样机的动态特性,样机实验和仿真分析的位移传递率与理论预测值具有较好的一致性.结果表明,准零刚度隔振器的起始隔振频率可达到 1.5 Hz,而对应无负刚度拉伸弹簧的线性隔振器起始隔振频率为 6 Hz,验证了拉伸弹簧构造正、负刚度并联机制的准零刚度隔振器具有优良的隔振性能.

关键词 准零刚度, 增量谐波平衡法, 隔振, 传递率, 实验

中图分类号: O328; TB535+.1

文献标志码: A

Design of Quasi-Zero Stiffness Isolator Based on Positive and Negative Stiffness Parallel Mechanism Realized by Tension Springs^{*}

Zhao Feng^{1,2,3} Wei Shiqing¹ Du Wenliao¹ Wang Caidong^{1†} Cao Shuqian^{2,3}

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450002, China)

(2. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300350, China)

(3. National Key Laboratory of Vehicle Power System, Tianjin 300350, China)

Abstract Quasi-zero stiffness (QZS) isolators have been widely studied owing to their superior low-frequency vibration isolation performance. However, the heavy damping in prototypes will lead to no relative motions between the isolated mass and the excitation at low frequencies, thus the vibration isolation is of failure at low frequencies. To address this limitation, compression springs are replaced with tension springs to reduce system damping in the prototype. These tension springs are configured to form both positive and negative stiffness structures arranged in parallel, thereby enabling the design of a QZS isolator utilizing exclusively tension springs. The QZS condition is derived from the static analysis, and the influence of key parameters on QZS features is analyzed. Wide QZS ranges around the static equilibrium position can be achieved. For dynamic analysis, the harmonic balance method is employed to validate the

2025-03-19 收到第 1 稿, 2025-05-02 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12202405, 52275138), 河南省高校科技人才支持计划资助项目(22HASTIT023), National Natural Science Foundation of China(12202405, 52275138), Henan Province University Science and Technology Talent Support Program(22HASTIT023).

[†] 通信作者 E-mail: vwangcaidong@163.com

displacement transmissibility results calculated by the incremental harmonic balance method combined with a continuation algorithm. Theoretical predictions calculated by both methods demonstrate close agreement within the effective isolation frequency band. Finally, a prototype had been designed, fabricated and dynamically tested. Meanwhile, a corresponding simulation model was analyzed using ADAMS. Both the tested and simulated displacement transmissibility exhibit strong consistency with theoretical predictions. The findings demonstrate that the proposed QZS isolator achieves the initial frequency of 1.5 Hz for vibration isolation and the corresponding linear isolator without negative stiffness is 6 Hz. The results verify the superior performance of the vibration isolation of the QZS isolator based on the parallel mechanism of the positive and negative stiffness structures constructed by tension springs.

Key words quasi-zero stiffness, incremental harmonic balance method, vibration isolation, transmissibility, experiment

引言

准零刚度(QZS)隔振器一般由正、负刚度结构并联实现,具有大承载的高静态刚度和低频隔振的准零动态刚度特性,是振动控制领域的研究热点之一^[1]. QZS 隔振系统具有较低的固有频率,能够在低频范围内有效地隔离振动,拓宽隔振频带,同时可承载较高的隔振质量,解决了传统线性隔振器低频隔振需求与高承载的矛盾. 依据负刚度形成机制 QZS 隔振器的结构形式主要有仿生结构^[2-5]、弹性梁结构^[6-9]、折纸结构^[10-12]、斜弹簧结构^[13,14]、凸轮-滚子结构^[15-17]、X 型结构^[18-20]、磁体结构^[21,22]等.

现有文献采用多种动力学分析方法研究了不同 QZS 结构的隔振性能. 这些研究不仅展示了各种动力学分析方法在隔振器设计和分析中的应用,还强调了非线性特性在提高隔振性能方面的重要性. Sun 等^[23,24]设计了剪刀式结构的隔振平台,采用拉格朗日原理推导了系统的动力学方程,使用泰勒级数展开系统的非线性刚度和阻尼,通过谐波平衡法求解系统的动态响应. Zhou 等^[25]设计了一种凸轮-滚子机构的 QZS 支撑,使用多个支撑构建了一个六自由度隔振平台,利用谐波平衡法求解了动力学方程,得到了系统的幅频关系. Cao 等^[26]提出了一种具有高阶 QZS 特性的新型非线性机械振子,基于牛顿定律、基尔霍夫定律和欧拉-拉格朗日方程,建立了新型振子的理论模型,采用平均法研究了高阶 QZS 振子在随机和谐波激励下的动态响应. 孟令帅等^[27]研究了一种负刚度碟形弹簧与线性正刚度弹簧并联的 QZS 隔振器,建立了简谐

力和位移激励下的非线性动力学方程,用平均法分析了参数和激励幅值对传递率的影响特性. 严博等^[28]提出了一种新型永磁式非线性隔振器,利用永磁力构建等效负刚度,基于非线性软弹簧实现隔振,使用谐波平衡法推导了非线性隔振器的传递率表达式,分析了系统的非线性动力学特性. 王文林等^[29]设计了一种具有可变液压阻尼和二级可变刚度的流体减振支柱,通过对系统的非线性动力学方程进行数值求解和仿真分析,得到系统在不同工况下的响应位移、速度、加速度等关键参数的时频特性. 周春燕等^[30]设计了一种灵活可调式的 QZS 隔振器,采用模糊控制方法对直接扰动进行反馈控制,建立 QZS 隔振器的物理模型,考虑了系统的黏性线性阻尼,给出无量纲的动力学方程,并通过谐波平衡法求解非线性振动方程,分析系统的幅频特性.

对于负刚度结构设计,采用全拉簧结构是一种简单、低阻尼的实现方式. 前期研究中,采用压缩弹簧构造单对斜杆 QZS 隔振器,在实验中发现,压缩弹簧受压屈曲变形后与导向杆之间产生较大的阻尼,低频激励时引起隔振质量与位移激励无相对位移,致使低频隔振失效. 为了解决这个问题,赵峰等提出拉伸弹簧构造正、负刚度结构且并联的方式实现 QZS 隔振器,降低隔振样机中的阻尼,拓宽隔振质量发生相对位移的频带和降低起始隔振频率,提升 QZS 隔振器的性能. 所提的拉伸弹簧模型与前期的压缩弹簧模型在结构、力和刚度表达式,以及 QZS 条件方面显著不同^[31].

此外,就动力学分析方法来讲,谐波平衡法可采用无穷多个谐波求解非线性系统响应,但在具有

如恒力项的方程中将导致推导过程及结果极其复杂,难以获得理想效果^[32]。而增量谐波平衡法结合了增量过程牛顿迭代、谐波平衡过程和连续算法,能够高效求解强非线性动力学方程。

针对全拉伸弹簧构造的 QZS 隔振器,通过静态分析推导 QZS 参数条件,分析参数对 QZS 特性的影响;然后建立隔振系统的非线性动力学方程,谐波平衡法计算的位移传递率与增量谐波平衡法计算的结果在强、弱非线性工况时一致;最后建立实验样机,采用激光测振系统获得位移传递率,同时对样机进行仿真分析,实验和仿真分析获得的位移传递率与计算结果在隔振频域具有较好的一致性,验证了拉伸弹簧构造、正负刚度并联机制 QZS 隔振器的可行性。

1 准零刚度模型与静态分析

1.1 准零刚度模型

研究的 QZS 隔振器如图 1 所示,两根刚度为 k 的拉伸弹簧实现正刚度,用于支撑被隔振体的质量;两个斜杆与两根刚度为 k_1 的拉伸弹簧提供负刚度,用于抵消正刚度,实现接近零的动态刚度特性。隔振器的弹性元件均为拉伸弹簧,相比压缩弹簧隔振器具有低阻尼特性,可获得更宽范围隔振频带。选择合适的参数,系统将达到 QZS 状态,可实现

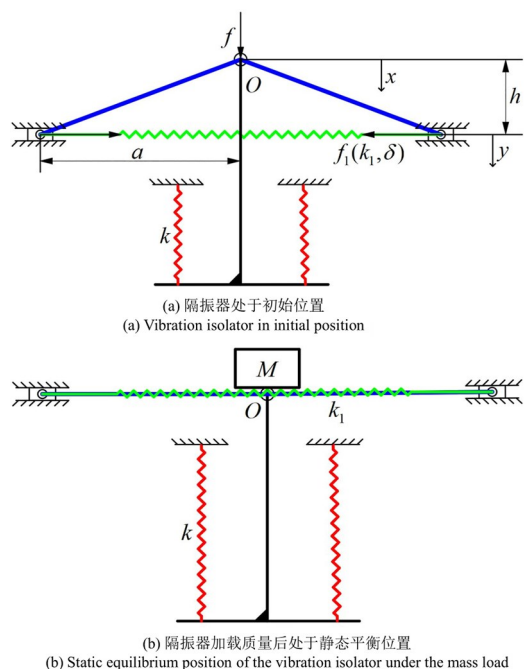


图 1 准零刚度隔振器的两种状态
Fig. 1 Two positions of the QZS isolator

高静—低动刚度的力学特性。 f 是作用在隔振器上的力; x 和 y 分别是初始位置和静态平衡位置开始的位移;静态平衡位置是斜杆处于水平的状态; h 是从初始位置到静态平衡位置的距离; δ 表示初始状态下负刚度机构拉伸弹簧的预拉伸量; a 是初始状态下斜杆在水平方向上的投影长度。

1.2 准零刚度参数条件

在图 1(a)所示状态下,负刚度机构拉伸弹簧的预拉力为

$$f_1 = k_1 \delta \quad (1)$$

当隔振器初始位置 O 向下移动 x 距离后,负刚度机构拉伸弹簧的拉力为

$$f_{1h} = k_1 [2\sqrt{a^2 + h^2 - (h-x)^2} - 2a + \delta] \quad (2)$$

在竖直方向上采用虚功原理建立方程如下

$$(f + f_l + 2f_{1x})\Delta x = 0 \quad (3)$$

其中, f_l 是正刚度拉簧的拉力, f_{1x} 是斜杆在竖直方向的分力;则 f 表示为

$$f = -f_l - 2f_{1x} \quad (4)$$

其中

$$\begin{cases} f_{1x} = -2f_{1h} \frac{h-x}{\sqrt{a^2 + h^2 - (h-x)^2}} \\ f_l = -2kx \end{cases} \quad (5)$$

联合方程(2)和(5)可得出 f 的表达式

$$f = 2kx + 4k_1 [2\sqrt{a^2 + h^2 - (h-x)^2} - 2a + \delta] \frac{h-x}{\sqrt{a^2 + h^2 - (h-x)^2}} \quad (6)$$

隔振器处于静平衡位置时, $x = y + h$,则 f 也可表示为

$$f = 2k(y+h) - 4k_1 [2\sqrt{a^2 + h^2 - y^2} - 2a + \delta] \frac{y}{\sqrt{a^2 + h^2 - y^2}} \quad (7)$$

将公式(6)和(7)除以 $k\sqrt{a^2 + h^2}$ 得到 f 的无量纲表达式

$$\begin{aligned} \hat{f} &= 2\hat{x} + 4\alpha(\sqrt{1-\hat{a}^2} - \hat{x}) \cdot \\ &\frac{2\sqrt{1-(1-\hat{a}^2-2\sqrt{1-\hat{a}^2}\hat{x}+\hat{x}^2)}+\hat{\delta}-2\hat{a}}{\sqrt{1-(1-\hat{a}^2-2\sqrt{1-\hat{a}^2}\hat{x}+\hat{x}^2)}} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\hat{f} = 2(\hat{y} + \hat{h}) - 4\alpha \left(2 + \frac{\hat{\delta} - 2\hat{a}}{\sqrt{1-\hat{y}^2}} \right) \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha = \frac{k_1}{k} \\ \hat{a} = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + h^2)}} \\ \hat{\delta} = \frac{\delta}{\sqrt{(a^2 + h^2)}} \\ \hat{x} = \frac{x}{\sqrt{(a^2 + h^2)}} \\ \hat{h} = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \\ \hat{y} = \frac{y}{\sqrt{a^2 + h^2}} \end{cases} \quad (10)$$

其中, $\hat{x}$ 是从初始位置开始的无量纲位移; α 是负刚度机构拉簧与正刚度拉簧的刚度比; $\hat{a}$ 是初始位置下斜杆在水平方向上的无量纲投影长度; $\hat{\delta}$ 是负刚度拉簧的无量纲预拉伸长度; $\hat{h}$ 是初始位置下斜杆在竖直方向上的无量纲投影长度; $\hat{y}$ 是从静平衡位置开始的无量纲位移。

引入中间变量, 令 $P_1 = (1 - \hat{a}^2)^{\frac{1}{2}} - \hat{x}$, $P_2 = (1 - P_1^2)^{\frac{1}{2}}$, $P_3 = \hat{\delta} - 2\hat{a}$, 则可将公式(8)改写为

$$\dot{f} = 2\hat{x} + 4\alpha P_1 \frac{2P_2 + P_3}{P_2} \quad (11)$$

公式(11)对 $\hat{x}$ 求导可得无量纲刚度

$$\dot{K} = 2 - 4\alpha[2 + P_3P_2^{-1} + P_1^2P_2^{-2}P_3(1 - P_1^2)^{-\frac{1}{2}}] \quad (12)$$

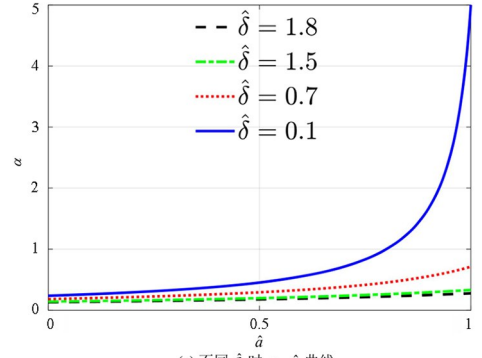
在静态平衡位置, 负刚度拉簧的伸长量达到最大, 此时 $x=h$ 且 $P_1=0$ 。在静态平衡位置, 设 $\dot{K}=0$, 可推导出 QZS 参数条件

$$\alpha = \frac{1}{2(2 + \hat{\delta} - 2\hat{a})} \quad (13)$$

1.3 参数对准零刚度影响

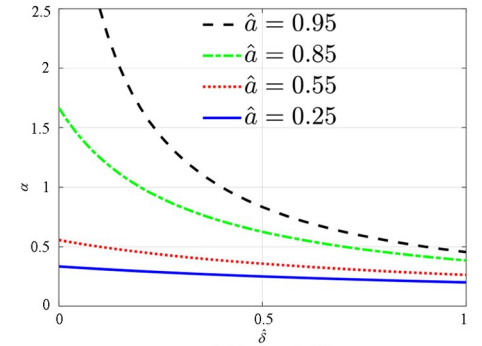
在静态平衡位置, 当参数满足 QZS 条件 $\dot{K}=0$ 时, 可求得包含三个独立参数 α 、 $\hat{\delta}$ 和 $\hat{a}$ 的方程(13), 可消除一个独立参数, 即 α 可通过方程(13)确定。图 2(a)显示了参数 α 和 $\hat{a}$ 之间的关系。随着参数 $\hat{a}$ 增大, 参数 α 也随之单调增大; 图 2(b)表明, 随着参数 $\hat{\delta}$ 增大, 参数 α 单调减小, 当 $\hat{a}$ 增大时, 参数 α 和参数 $\hat{\delta}$ 的关系曲线弯曲程度增大。

两个独立参数 $\hat{a}$ 和 $\hat{\delta}$ 应使隔振器在静态平衡位置附近的动态刚度略大于零, 且为正值。如图 3(a)



(a) 不同 $\hat{\delta}$ 时 $\alpha - \hat{a}$ 曲线

(a) $\alpha - \hat{a}$ curves under different values of $\hat{\delta}$

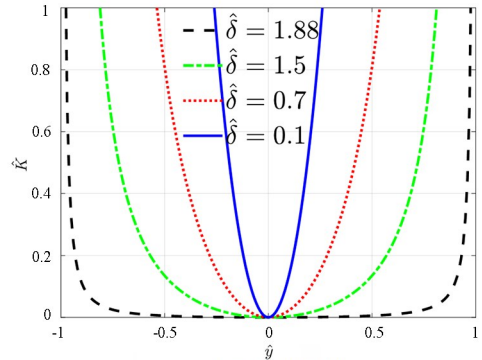


(b) 不同 $\hat{a}$ 时 $\alpha - \hat{\delta}$ 曲线

(b) $\alpha - \hat{\delta}$ curves under different values of $\hat{a}$

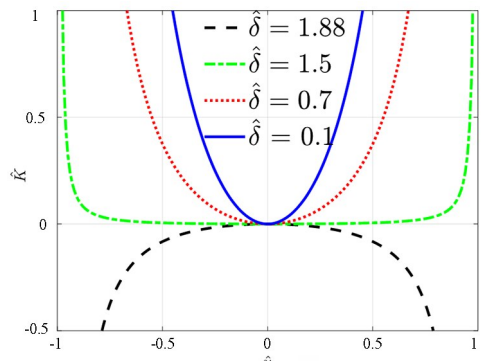
图 2 参数 $\hat{\delta}$ 和 $\hat{a}$ 对参数 α 的影响

Fig. 2 Influence of parameters $\hat{\delta}$ and $\hat{a}$ on parameter α



(a) $\hat{a} = 0.95$ 时刚度曲线

(a) Stiffness curves under $\hat{a} = 0.95$



(b) $\hat{a} = 0.76$ 时刚度曲线

(b) Stiffness curves under $\hat{a} = 0.76$

图 3 无量纲刚度-位移曲线

Fig. 3 Dimensionless stiffness-displacement curves

所示,当 $\hat{a}=0.95$ 和 $\hat{\delta}=1.88$ 时,隔振器具有较宽范围的 QZS. 然而并非所有的 $\hat{a}$ 和 $\hat{\delta}$ 值都能够满足这一条件,如图 3(b)所示,当 $\hat{a}=0.76$ 和 $\hat{\delta}=1.88$ 时,得到负刚度,因不具有承载能力而不能用于隔振. 其他参数的影响,如载荷和激励对隔振器敏感度分析,将在下一阶段中研究^[33].

2 位移传递率

当隔振器处于静态平衡位置时,系统的运动方程如下

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + f = mg \quad (14)$$

其中, $f = k_l y + k_{\text{nonl}} y^3$, k_l 与 k_{nonl} 分别表示系统的线性刚度系数和非线性刚度系数. 承载质量的重力与力泰勒展开的常数项相互抵消,方程(14)改写为

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k_l y + k_{\text{nonl}} y^3 = 0 \quad (15)$$

相对位移 $z = y - y_e$, 则 $y = z + y_e$, y_e 表示位移激励, y 表示被隔振物体的绝对位移. 则(15)改写为

$$m(\ddot{z} + \ddot{y}_e) + c(\dot{z} + \dot{y}_e) + k_l(z + y_e) + k_{\text{nonl}}(z + y_e)^3 = 0 \quad (16)$$

位移激励 y_e 的表达式为

$$y_e = A \cos \omega t \quad (17)$$

其中, A 表示激励幅值, ω 是激励频率. y_e 对 t 的一阶和二阶导数分别为

$$\begin{cases} \dot{y}_e = -A\omega \sin \omega t \\ \ddot{y}_e = -A\omega^2 \cos \omega t \end{cases} \quad (18)$$

将方程(18)代入方程(16),移项得到

$$m\ddot{z} + c(\dot{y} - \dot{y}_e) + k_l(y - y_e) + k_{\text{nonl}}(y - y_e)^3 = mA\omega^2 \cos \omega t \quad (19)$$

改写方程(19)得到

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + k_l z + k_{\text{nonl}} z^3 = mA\omega^2 \cos \omega t \quad (20)$$

2.1 一阶谐波平衡法计算位移传递率

QZS 隔振系统对应线性隔振系统的固有频率

$$\omega_n = \sqrt{k/m}. \text{ 令 } \tau = \omega_n t, \Omega = \omega/\omega_n, z' = \omega_n \frac{dz}{d\tau}, z'' = \omega_n^2 \frac{d^2 z}{d\tau^2}, \text{ 方程(20)改写为}$$

$$m\omega_n^2 z'' + c\omega_n z' + k_l z + k_{\text{nonl}} z^3 = mA\omega^2 \cos \omega t \quad (21)$$

将公式(21)除以 $k \sqrt{a^2 + h^2}$ 进行无量纲化

$$\ddot{z} + 2\zeta \dot{z}' + \mu_1 \dot{z} + \mu_2 \dot{z}^3 = \Omega^2 \dot{A} \cos \Omega \tau \quad (22)$$

$$\text{其中 } \dot{z} = \frac{z}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \dot{z}' = \frac{z'}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \ddot{z} = \frac{z''}{\sqrt{a^2 + h^2}},$$

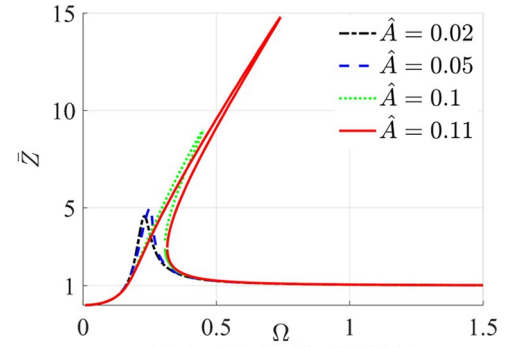
$$\mu_1 = \frac{k_l}{k}, \mu_2 = \frac{k_{\text{nonl}}}{k}, \dot{A} = \frac{A}{\sqrt{a^2 + h^2}}. \text{ 令 } \bar{z} = \frac{\dot{z}'}{\dot{A}}, \bar{z}' = \frac{\ddot{z}'}{\dot{A}}, \bar{z}'' = \frac{\ddot{z}''}{\dot{A}}, \text{ 则(22)可进一步改写为}$$

$$\bar{z}'' + 2\zeta \bar{z}' + \mu_1 \bar{z} + \mu_2 \dot{A}^2 \bar{z}^3 = \Omega^2 \cos \Omega \tau \quad (23)$$

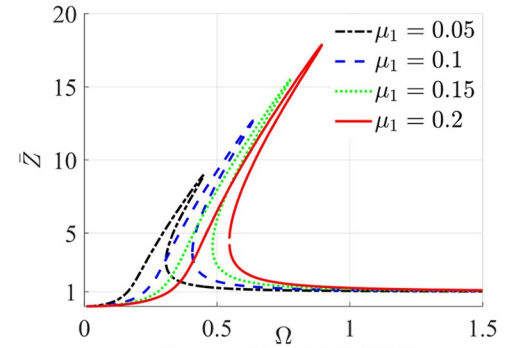
使用谐波平衡法对方程(23)进行求解. 假设解 $\bar{z} = \bar{Z} \cos(\Omega \tau + \theta)$, θ 是响应与激励之间的相位差. 最终得到幅频响应函数

$$\frac{9}{16} \dot{A}^4 \mu_2^2 \bar{Z}^6 + \frac{3}{2} \mu_2 \dot{A}^2 (\mu_1 - \Omega^2) \bar{Z}^4 + [(\mu_1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2 \Omega^2] \bar{Z}^2 - \Omega^4 = 0 \quad (24)$$

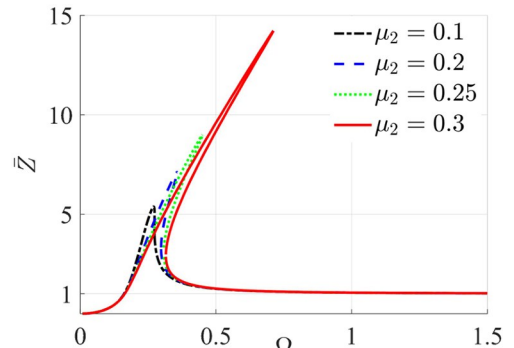
公式(24)中的 $\bar{Z}$ 是相对位移传递率, 图 4 展示了参数对传递率的影响. 如图 4(a)所示, 随着激励幅值的增大, 传递率逐渐展现出非线性硬特性,



(a) Relative displacement transmissibility when $\mu_1 = 0.05$ and $\mu_2 = 0.25$



(b) Relative displacement transmissibility when $\mu_2 = 0.25$ and $\hat{A} = 0.1$



(c) Relative displacement transmissibility when $\mu_1 = 0.05$ and $\hat{A} = 0.1$

图 4 阻尼系数 $\zeta = 0.025$ 时参数对相对位移传递率的影响
Fig. 4 Influence of parameters on the relative displacement transmissibility under damping coefficient $\zeta = 0.025$

引起传递率幅值增大,同时共振峰向高频方向弯曲加重.如图4(b)所示,当系统的线性刚度系数增大时,传递率整体向高频迁移,导致起始隔振频率和传递率幅值增大.图4(c)表明,提高系统的非线性刚度系数会增强系统的非线性行为,同样导致起始隔振频率和传递率幅值的增加.综上所述,激励幅值、线性刚度以及非线性刚度的变化均会影响相对位移传递率,具体表现为增加这些参数值会导致传递率幅值增大和隔振频带变窄.

2.2 一阶增量谐波平衡法计算位移传递率

令 $\tau = \omega t$, $z' = \omega \frac{dz}{d\tau}$, $z'' = \omega^2 \frac{d^2 z}{d\tau^2}$, 其余参数与

前述一致. 方程(20)改写为

$$m\omega^2 z'' + c\omega z' + k_l z + k_{\text{nonl}} z^3 = mA\omega^2 \cos\omega t \quad (25)$$

方程(25)不同于方程(21),虽然两个方程均来源于方程(20),但两个方程采用了不同的无量纲时间变量.将方程(25)除以 $k\sqrt{a^2 + h^2}$ 进行无量纲化

$$\Omega^2 \bar{z}'' + 2\zeta\Omega \bar{z}' + \mu_1 \bar{z} + \mu_2 \bar{z}^3 = \Omega^2 \bar{A} \cos\tau \quad (26)$$

方程(26)可进一步改写为

$$\Omega^2 \bar{z}'' + 2\zeta\Omega \bar{z}' + \mu_1 \bar{z} + \mu_2 \bar{A}^2 \bar{z}^3 = \Omega^2 \cos\tau \quad (27)$$

2.2.1 验证一阶谐波平衡法结果

使用一阶谐波平衡法对方程(27)进行求解.假设解 $\bar{z} = \bar{Z} \cos(\tau + \theta)$, 求解后得到的幅频响应函数与式(24)一致,结果表明:采用两种不同的无量纲形式,一阶谐波平衡法获得的幅频方程相同.因此两种无量纲形式获得的位移激励运动方程,具有相同的幅频方程和位移传递率.

2.2.2 一阶增量谐波平衡法与连续算法

设方程(27)有解 $\bar{z}$ 、 Ω_0 和 $\bar{A}_0$, 在其邻域内有一增量解为

$$\begin{cases} \bar{z} = \bar{z}_0 + \Delta\bar{z} \\ \Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega \\ \bar{A} = \bar{A}_0 + \Delta\bar{A} \end{cases} \quad (28)$$

其中, $\Delta\bar{z}$ 、 $\Delta\Omega$ 、 $\Delta\bar{A}$ 是解的微小增量,将方程(28)代入方程(27),保留增量的一次项,忽略增量的高阶

$$\mathbf{C} = \begin{cases} C_{11} = \int_0^{2\pi} [(-\Omega_0^2 \sin\tau + 2\zeta\Omega_0 \cos\tau + \mu_1 \sin\tau + 3\mu_2 \bar{A}_0^2 (\mathbf{B}\mathbf{a})^2 \sin\tau)] \sin\tau d\tau \\ C_{21} = \int_0^{2\pi} [(-\Omega_0^2 \sin\tau + 2\zeta\Omega_0 \cos\tau + \mu_1 \sin\tau + 3\mu_2 \bar{A}_0^2 (\mathbf{B}\mathbf{a})^2 \sin\tau)] \cos\tau d\tau \\ C_{12} = \int_0^{2\pi} [(-\Omega_0^2 \cos\tau + 2\zeta\Omega_0 \sin\tau + \mu_1 \cos\tau + 3\mu_2 \bar{A}_0^2 (\mathbf{B}\mathbf{a})^2 \cos\tau)] \sin\tau d\tau \\ C_{22} = \int_0^{2\pi} [(-\Omega_0^2 \cos\tau + 2\zeta\Omega_0 \sin\tau + \mu_1 \cos\tau + 3\mu_2 \bar{A}_0^2 (\mathbf{B}\mathbf{a})^2 \cos\tau)] \cos\tau d\tau \end{cases} \quad (37)$$

项得到

$$\begin{aligned} & \Omega_0^2 \Delta\bar{z}'' + 2\zeta\Omega_0 \Delta\bar{z}' + \mu_1 \Delta\bar{z} + 3\mu_2 \bar{z}_0 \bar{A}_0^2 \Delta\bar{z} \\ & = R - 2\mu_2 \bar{z}_0^3 \bar{A}_0 \Delta\bar{A} - (2\Omega_0 \bar{z}_0'' + 2\zeta\bar{z}_0' - 2\Omega_0 \cos\tau) \Delta\Omega \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$R = -(\Omega_0^2 \bar{z}_0 + 2\zeta\Omega_0 \bar{z}_0' + \mu_1 \bar{z}_0 + \mu_2 \bar{z}_0^3 \bar{A}_0^2 - \Omega_0^2 \cos\tau) \quad (30)$$

当 $\bar{z}_0$ 、 Ω_0 、 $\bar{A}_0$ 接近精确解时, R 趋近于 0. 方程的解可表示为

$$\begin{cases} \bar{z}_0 = a_1 \sin\tau + b_1 \cos\tau \\ \Delta\bar{z} = \Delta a_1 \sin\tau + \Delta b_1 \cos\tau \end{cases} \quad (31)$$

其中, a_1 、 b_1 表示解的一阶谐波系数,对式(31)求一阶与二阶导数,改写成矩阵形式

$$\begin{cases} \bar{z}_0 = \mathbf{B}\mathbf{a} \\ \bar{z}_0' = \dot{\mathbf{B}}\mathbf{a} \\ \bar{z}_0'' = \ddot{\mathbf{B}}\mathbf{a} \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} \Delta\bar{z} = \mathbf{B}\Delta\mathbf{a} \\ \Delta\bar{z}' = \dot{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{a} \\ \Delta\bar{z}'' = \ddot{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{a} \end{cases} \quad (33)$$

其中

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \Delta\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta b_1 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \cos\tau \\ -\sin\tau \end{bmatrix}^T, \ddot{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -\sin\tau \\ -\cos\tau \end{bmatrix}^T$$

将式(32)和(33)代入式(29)和(30),得到

$$\begin{aligned} & \Omega_0^2 \ddot{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{a} + 2\zeta\Omega_0 \dot{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{a} + \mu_1 \mathbf{B}\Delta\mathbf{a} + 3\mu_2 \bar{A}_0^2 (\mathbf{B}\mathbf{a})^2 \mathbf{B}\Delta\mathbf{a} \\ & = R - 2\mu_2 \bar{A}_0 \dot{\mathbf{A}} \Delta\bar{A} (\mathbf{B}\mathbf{a})^3 - (2\Omega_0 \ddot{\mathbf{B}}\mathbf{a} + 2\zeta\dot{\mathbf{B}}\mathbf{a} - \end{aligned} \quad (34)$$

$$R = \Omega_0^2 \cos\tau - \Omega_0^2 \ddot{\mathbf{B}}\mathbf{a} - 2\zeta\Omega_0 \dot{\mathbf{B}}\mathbf{a} - \mu_1 \mathbf{B}\mathbf{a} - \mu_2 \bar{A}_0^2 (\mathbf{B}\mathbf{a})^3 \quad (35)$$

在计算传递率曲线时,公式(34)中的激励振幅增量 $\Delta\bar{A}$ 设为 0, 因此增量方程改写为

$$\mathbf{C}\Delta\mathbf{a} = \mathbf{R} + \mathbf{Q}\Delta\Omega \quad (36)$$

其中, $\mathbf{C}$ 是 2×2 的矩阵, $\Delta\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{Q}$ 是 2×1 的向量; $\Delta\Omega$ 是频率增量,为实数. 它们分别表示为

$$\mathbf{R} = \begin{cases} R_{11} = \int_0^{2\pi} -(\Omega_0^2 \bar{z}_0'' + 2\zeta \Omega_0 \bar{z}_0' + \mu_1 \bar{z}_0 + \mu_2 \dot{A}_0^2 \bar{z}_0^3 - \Omega_0^2 \cos \tau) \sin \tau \, d\tau \\ R_{21} = \int_0^{2\pi} -(\Omega_0^2 \bar{z}_0'' + 2\zeta \Omega_0 \bar{z}_0' + \mu_1 \bar{z}_0 + \mu_2 \dot{A}_0^2 \bar{z}_0^3 - \Omega_0^2 \cos \tau) \cos \tau \, d\tau \end{cases}$$
$$\mathbf{Q} = \begin{cases} Q_{11} = \int_0^{2\pi} -(2\Omega_0 \dot{\mathbf{B}}\mathbf{a} + 2\zeta \mathbf{B}\mathbf{a} - 2\Omega_0 \cos \tau) \sin \tau \, d\tau \\ Q_{21} = \int_0^{2\pi} -(2\Omega_0 \dot{\mathbf{B}}\mathbf{a} + 2\zeta \mathbf{B}\mathbf{a} - 2\Omega_0 \cos \tau) \cos \tau \, d\tau \end{cases}$$

(39)

在一个频率增量和迭代周期中,确定频率增量后,在 $\mathbf{C}\Delta\mathbf{a} = \mathbf{R}$ 中进行牛顿迭代,最终可得到符合精度的收敛解,即向量 $\mathbf{R}$ 的模小于给定的收敛精度. 在强非线性或大幅值激励下,公式(34)的幅频响应曲线会出现非线性共振峰,因此,在公式(36)中使用了连续算法,以便在计算幅频响应曲线时平滑地跃过非线性共振峰^[34]. 迭代解的预测点如图 5 所示, $\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2$ 和 $\bar{z}_3$ 为已知解, Δs 是计算预测点 $\bar{z}_4$ 的外推弧长, $\bar{z}_4$ 表达式为

$$\bar{z}_4 = \sum_{i=0}^3 \left(\prod_{j=0, j \neq i}^3 \frac{t_4 - t_j}{t_i - t_j} \right) \bar{z}_i$$

(40)

其中

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_1 = s_1 \\ t_2 = t_1 + s_2 \\ t_3 = t_2 + s_3 \\ t_4 = t_3 + \Delta s \\ s_1 = |\bar{z}_1 - \bar{z}_0| = \sqrt{\sum_{j=1}^3 [\bar{z}_1(j) - \bar{z}_0(j)]^2} \\ s_2 = |\bar{z}_2 - \bar{z}_1| = \sqrt{\sum_{j=1}^3 [\bar{z}_2(j) - \bar{z}_1(j)]^2} \\ s_3 = |\bar{z}_3 - \bar{z}_2| = \sqrt{\sum_{j=1}^3 [\bar{z}_3(j) - \bar{z}_2(j)]^2} \end{cases}$$

(41)

其中, $\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2$ 和 $\bar{z}_4$ 是 Ω, a_1, b_1 的函数,用来计算 s_1, s_2 和 s_3 . 当 Δs 值足够小时,可对每个预测点进行精确控制,具体方式为 $\Delta s_j = \Delta s_{j-1} N_d / I_{j-1}$.

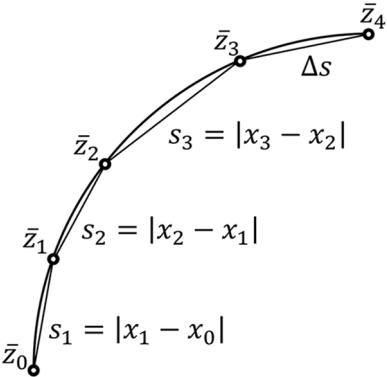


图 5 基于已知解 $\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2$ 和 $\bar{z}_3$ 的预测点 $\bar{z}_4$ ^[34]
Fig. 5 Predicted points $\bar{z}_4$ based on known points $\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2$ and $\bar{z}_3$ ^[34]

Δs_{j-1} 是上一个弧长增量, I_{j-1} 是基于前一个预测点的运算迭代次数. N_d 是牛顿迭代的预期次数,为了达到最佳收敛效果,设定其值略大于 1.

为验证增量谐波平衡法求解传递率的有效性,将谐波平衡法(HBM)与增量谐波平衡法(IHBM)的计算结果对比,如图 6 所示. 在强、弱非线性两组参数下,系统分别呈现线性与强非线性的动力学特性. 两种方法计算的相对位移传递率相同.

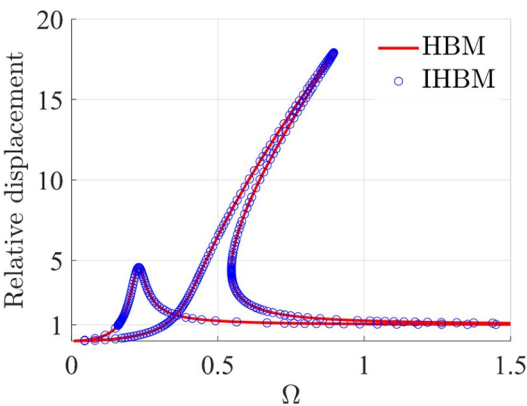


图 6 强、弱非线性参数下谐波平衡法与增量谐波平衡法的相对位移传递率
Fig. 6 The relative displacement transmissibility calculated using HBM and IHBM under the strong and weak nonlinearity

3 仿真与实验

3.1 仿真分析

采用仿真分析验证 QZS 隔振器性能. 首先,使用三维建模软件 SOLIDWORKS 创建隔振器样机的各个零部件,根据隔振器的运动方式,将零部件组装成一个装配体,如图 7 所示. 然后,将 SOLIDWORKS 中的装配体文件转换为 ADAMS 可识别的格式,并导入到 ADAMS 仿真软件中;同时对导入的模型添加拉伸弹簧单元. 随后,根据各零部件之间的相对运动关系,进行布尔操作,并添加固定副、移动副和旋转副,以确保隔振器能够正常运动.

实验样机中,正刚度拉伸弹簧上端连接固定挂板,下端连接活动挂板,为隔振系统提供正刚度. 负刚度机构由水平拉伸弹簧和斜杆等零部件组成,斜杆的两端分别与连接块和水平导杆铰接,负刚度拉簧通过两端的挂钩挂在拉簧挂杆两端. 实验时,隔振质量固定在载物圆盘上,通过竖直导杆传递重

力,带动活动挂板下移,直到斜杆处于水平状态时的静平衡位置,达到可以进行仿真的工作状态. 样机主要参数如表 1 所示.

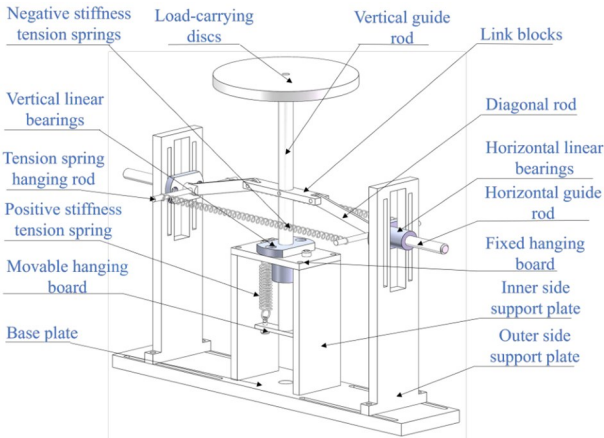


图 7 隔振器的三维模型轴测图
Fig. 7 Axonometric view of the QZS isolator

表 1 实验样机主要参数

Table 1 Main parameters of the experimental prototype

Tension spring stiffness $k/(N/mm)$	Tension spring stiffness $k_1/(N/mm)$	Horizontal projection a/mm	Vertical projection h/mm	Pre-stretch value δ/mm
0.9407	0.228	52.75	15.5	105

3.2 样机实验

设计和装配的拉伸弹簧单对斜杆 QZS 样机及实验仪器如图 8 所示. 样机中正、负刚度结构的弹性元件是拉伸弹簧,与之前压缩弹簧和单对斜杆构造的 QZS 样机相比^[31],不会出现因压缩弹簧屈曲变形后与导向杆滑动产生较大阻尼. 拉伸弹簧构造的样机阻尼更小,更有利于 QZS 隔振器低频隔振性能发挥,同时解决了大阻尼恶化高频隔振效果的问题. 动态实验过程中,振动台提供位移激励;振动控制器设置激励频率与幅值;两个激光位移传感器分别采集隔振质量和振动台的位移,以计算位移传递率.

在加载 2.43 kg 的隔振质量后,QZS 隔振器处于静态平衡位置,对底座施加竖直方向的简谐位移激励,幅值 5 mm,频率范围从 1 Hz 到 7 Hz. 样机动态实验结果、仿真结果与采用谐波平衡法和增量谐波平衡法(仿真与理论计算的阻尼系数均为 0.05)得到的理论预测具有较好的一致性. 若需精确阻尼可通过参数辨识的方法确定等效阻尼^[35-37]. 如图 9 所示,将 QZS 隔振器与对应的线性隔振器(去掉产生负刚度的水平拉伸弹簧)的传递率对比,QZS 隔

振器的起始隔振频率约 1.5 Hz,而对应线性隔振器的起始隔振频率为 6 Hz. QZS 隔振器的隔振效果明显优于线性隔振器,传递率更小,起始隔振频率更低,在低频领域具有更强的隔振优势. 线性隔振器的承载质量与 QZS 隔振器一致. 因此,通过实验和仿真分析验证了基于拉伸弹簧设计 QZS 隔振器的超低频隔振效果和理论.

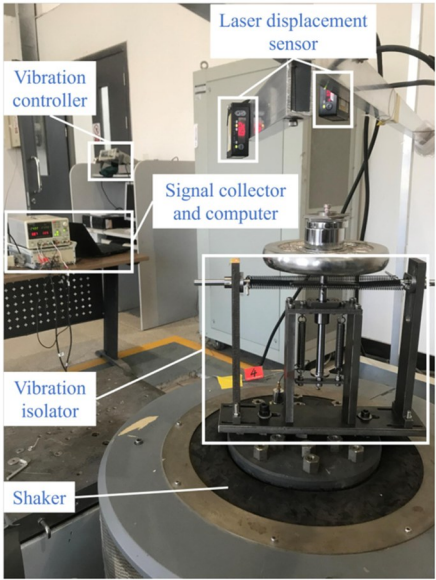


图 8 动态实验的 QZS 样机和实验设备
Fig. 8 QZS prototype and experimental setup in dynamic experiments

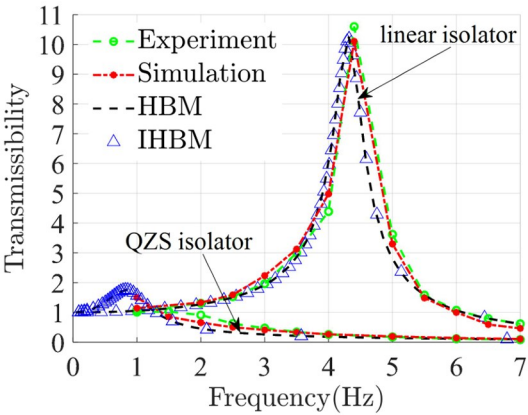


图 9 样机实验、仿真分析与两种理论传递率对比
Fig. 9 Transmissibility comparison of prototype experiment, dynamics simulation and two theoretical predictions

4 结论

(1)通过将拉伸弹簧替代压缩弹簧的方式,提出了一对拉伸弹簧和单对斜杆负刚度机制的 QZS 隔振器,以解决压缩弹簧实验模型中阻尼较大的问题. 静态分析推导了隔振器的 QZS 参数条件,分析了参数影响下的 QZS 特性,可实现静态平衡点附近宽范围的 QZS.

(2)建立了 QZS 隔振器的位移激励运动方程,分别采用谐波平衡法和增量谐波平衡法求解运动方程,获得了相同的位移传递率,验证了增量谐波平衡法求解 QZS 隔振器位移传递率的有效性.在进行谐波平衡法求解时,对运动方程进行了两种不同形式的无量纲化,得到了相同的幅频方程,表明无量纲不影响运动方程解的特性.

(3)依据 QZS 隔振器的理论设计和研究结果,装配了 QZS 隔振器的实验样机,开展了动态实验和仿真分析验证.结果表明,实验、仿真和理论传递率具有较好的一致性,QZS 隔振器的起始隔振频率达到 1.5 Hz,而对应线性系统的起始隔振频率为 6 Hz.验证了 QZS 隔振器理论分析的正确性及其所具有宽隔振频带和低传递率幅值的优良隔振性能.

参考文献

[1] 彭献,黎大志,陈树年.准零刚度隔振器及其弹性特性设计[J].振动测试与诊断,1997,17(4):44—46.
PENG X, LI D Z, CHEN S N. Quasi-zero stiffness vibration isolators and design for their elastic characteristics [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 1997, 17(4): 44—46. (in Chinese)

[2] LING P, MIAO L L, YE B L, et al. Ultra-low frequency vibration isolation of a novel click-beetle-inspired structure with large quasi-zero stiffness region [J]. Journal of Sound and Vibration, 2023, 558: 117756.

[3] 肖国栋,孙秀婷.仿生隔振器设计方法研究进展[J].动力学与控制学报,2024,22(2):4—22.
XIAO G D, SUN X T. Advances in design methods for bio-inspired isolators [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(2): 4—22. (in Chinese)

[4] ZENG R, WEN G L, ZHOU J X, et al. Limb-inspired bionic quasi-zero stiffness vibration isolator [J]. Acta Mechanica Sinica, 2021, 37(7): 1152—1167.

[5] 张伟,石沐辰,柳超然.仿猫类落地姿态的准零刚度隔振器[J].动力学与控制学报,2024,22(2):85—93.
ZHANG W, SHI M C, LIU C R. Quasi-zero-stiffness vibration isolator inspired by the cat landing attitude [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024,

22(2): 85—93. (in Chinese)

[6] DALELA S, BALAJI P S, JENA D P. Design of a metastructure for vibration isolation with quasi-zero-stiffness characteristics using bistable curved beam [J]. Nonlinear Dynamics, 2022, 108(3): 1931—1971.

[7] LIU X T, HUANG X C, HUA H X. On the characteristics of a quasi-zero stiffness isolator using Euler buckled beam as negative stiffness corrector [J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(14): 3359—3376.

[8] HUANG X C, LIU X T, HUA H X. On the characteristics of an ultra-low frequency nonlinear isolator using sliding beam as negative stiffness [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2014, 28(3): 813—822.

[9] QI W H, YAN G, LU J J, et al. Magnetically modulated sliding structure for low frequency vibration isolation [J]. Journal of Sound and Vibration, 2022, 526: 116819.

[10] 孙秀婷,孙英超,钱佳伟,等.低频大幅隔振器设计及实验[J].动力学与控制学报,2024,22(2):59—67.
SUN X T, SUN Y C, QIAN J W, et al. Design and experiment of a vibration isolator for low frequency and large amplitude excitation [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(2): 59—67. (in Chinese)

[11] 樊东芝,凌鹏,马洪业,等.堆叠三浦折纸隔振器理论模型及低频隔振特性[J].力学学报,2024,56(6):1775—1783.
FAN D Z, LING P, MA H Y, et al. Theoretical model and low-frequency vibration isolation characteristics of stacked miura-ori vibration isolators [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2024, 56(6): 1775—1783. (in Chinese)

[12] 周雅,蒙格尔,叶震,等.折纸型准零刚度系统的隔振性能研究[J].工程力学,2024,41(6):246—256.
ZHOU Y, MENG G E, YE Z, et al. Vibration isolation performance of origami inspired quasi-zero-stiffness system [J]. Engineering Mechanics, 2024, 41(6): 246—256. (in Chinese)

[13] CARRELLA A, BRENNAN M J, KOVACIC I, et al. On the force transmissibility of a vibration isolator with quasi-zero-stiffness [J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 322(4/5): 707—717.

- [14] 赵峰, 吕善文, 陈鹿民, 等. 准零刚度隔振座椅的理论及实验研究[J]. 噪声与振动控制, 2024, 44(1): 44—51.
ZHAO F, LV S W, CHEN L M, et al. Theoretical and experimental research on quasi-zero stiffness vibration isolation seats [J]. Noise and Vibration Control, 2024, 44(1): 44—51. (in Chinese)
- [15] LI M, CHENG W, XIE R L. A quasi-zero-stiffness vibration isolator using a cam mechanism with user-defined profile [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2021, 189: 105938.
- [16] YE K, JI J C, BROWN T. Design of a quasi-zero stiffness isolation system for supporting different loads [J]. Journal of Sound and Vibration, 2020, 471: 115198.
- [17] 田海洋, 张万福, 薛聪聪, 等. 基于凸轮—滚子结构的多自由度准零刚度系统设计[J]. 振动与冲击, 2024, 43(13): 172—179.
TIAN H Y, ZHANG W F, XUE C C, et al. Design of multi-DOF quasi-zero stiffness low frequency vibration isolation system based on cam-roller structure [J]. Journal of Vibration and Shock, 2024, 43(13): 172—179. (in Chinese)
- [18] 尹蒙蒙, 丁虎, 陈立群. X型准零刚度隔振器动力学设计及分析[J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(5): 46—52.
YIN M M, DING H, CHEN L Q. Dynamic design and analysis of X-shaped quasi-zero stiffness isolator [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(5): 46—52. (in Chinese)
- [19] BIAN J, JING X J. Superior nonlinear passive damping characteristics of the bio-inspired limb-like or X-shaped structure [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 125: 21—51.
- [20] WANG Y, JING X J. Nonlinear stiffness and dynamical response characteristics of an asymmetric X-shaped structure [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 125: 142—169.
- [21] SU P, WU J C, LIU S Y, et al. A study of a nonlinear magnetic vibration isolator with quasi-zero-stiffness [J]. Journal of Vibroengineering, 2018, 20(1): 310—320.
- [22] WU J L, ZENG L Z, HAN B, et al. Analysis and design of a novel arrayed magnetic spring with high negative stiffness for low-frequency vibration isolation [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2022, 216: 106980.
- [23] SUN X T, JING X J. A nonlinear vibration isolator achieving high-static-low-dynamic stiffness and tunable anti-resonance frequency band [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2016, 80: 166—188.
- [24] SUN X T, JING X J. Analysis and design of a nonlinear stiffness and damping system with a scissor-like structure [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2016, 66: 723—742.
- [25] ZHOU J X, XIAO Q Y, XU D L, et al. A novel quasi-zero-stiffness strut and its applications in six-degree-of-freedom vibration isolation platform [J]. Journal of Sound and Vibration, 2017, 394: 59—74.
- [26] YANG T, CAO Q J, HAO Z F. A novel nonlinear mechanical oscillator and its application in vibration isolation and energy harvesting [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 155: 107636.
- [27] 孟令帅, 孙景工, 牛福, 等. 新型准零刚度隔振系统的设计与研究[J]. 振动与冲击, 2014, 33(11): 195—199.
MENG L S, SUN J G, NIU F, et al. Design and Analysis of a novel quasi-zero stiffness vibration isolation system [J]. Journal of Vibration and Shock, 2014, 33(11): 195—199. (in Chinese)
- [28] 严博, 马洪业, 韩瑞祥, 等. 可用于大幅值激励的永磁式非线性隔振器[J]. 机械工程学报, 2019, 55(11): 169—175.
YAN B, MA H Y, HAN R X, et al. Permanent magnets based nonlinear vibration isolator subjected to large amplitude acceleration excitations [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(11): 169—175. (in Chinese)
- [29] 王文林, 陈汝星, 丁洋, 等. 航天器宽频带流体减振支柱设计及特性仿真[J]. 动力学与控制学报, 2025, 23(2): 1—9.
WANG W L, CHEN R X, DING Y, et al. Design and characteristics simulation of a broadband fluid damping strut for spacecraft vibration reduction [J]. Journal of Dynamics and Control, 2025, 23(2): 1—9. (in Chinese)
- [30] 周春燕, 赵彪. 基于准零刚度隔振器的自适应模糊控制[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(9): 74—82.
ZHOU C Y, ZHAO B. Adaptive fuzzy control based on quasi-zero stiffness vibration isolator memristive hindmarsh-rose neuronal network [J]. Jour-

- nal of Dynamics and Control, 2023, 21(9): 74–82. (in Chinese)
- [31] ZHAO F, CAO S Q, LUO Q T, et al. Practical design of the QZS isolator with one pair of oblique bars by considering pre-compression and low-dynamic stiffness [J]. Nonlinear Dynamics, 2022, 108(4): 3313–3330.
- [32] 刘南, 白俊强, 华俊, 等. 高阶谐波平衡方法中非物理解来源分析及改进方法研究[J]. 力学学报, 2016, 48(4): 897–906.
- LIU N, BAI J Q, HUA J, et al. Investigation of the source and improvement of non-physical solutions in high-order harmonic balance [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2016, 48(4): 897–906. (in Chinese)
- [33] 王刚锋, 王万汀, 索雪峰, 等. 矿用自卸车液压互联悬架参数灵敏度分析与优化[J]. 振动与冲击, 2024, 43(19): 232–241.
- WANG G F, WANG W T, SUO X F, et al. Sensitivity analysis and optimization of hydraulically interconnected suspension parameters of mining dump trucks [J]. Journal of Vibration and Shock, 2024, 43(19): 232–241. (in Chinese)
- [34] CHEUNG Y K, CHEN S H, LAU S L. Application of the incremental harmonic balance method to cubic non-linearity systems [J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 140(2): 273–286.
- [35] 邬明宇, 李雪冰, 尹航, 等. 空气弹簧动态刚度模型关键非线性参数辨识及动态特性研究[J]. 机械工程学报, 2022, 58(1): 88–96.
- WU M Y, LI X B, YIN H, et al. Identification of key nonlinear parameters and research on dynamic characteristics of air spring dynamic stiffness model [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022, 58(1): 88–96. (in Chinese)
- [36] 杨坤鹏, 樊文欣, 曹存存, 等. 金属橡胶材料的动态力学建模及参数辨识[J]. 机械科学与技术, 2017, 36(12): 1830–1833.
- YANG K P, FAN W X, CAO C C, et al. Dynamic mechanical modeling and parameter identification of metal-rubber materials [J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2017, 36(12): 1830–1833. (in Chinese)
- [37] 李玲, 蔡安江, 蔡力钢, 等. 栓接结合部动态特性参数辨识新方法[J]. 振动与冲击, 2014, 33(14): 15–19, 32.
- LI L, CAI A J, CAI L G, et al. New method to identify dynamic characteristics of bolted joints [J]. Journal of Vibration and Shock, 2014, 33(14): 15–19, 32. (in Chinese)