

类 Chen-Qi 四维超混沌系统预定时间自适应同步

王院生[†]

(中国地质大学(武汉)机械与电子信息学院, 武汉 430074)

摘要 本文应用预定时间控制理论,设计了基于正切函数、双曲正切函数、指数函数的三种自适应控制器和参数估计律,以实现类 Chen-Qi 超混沌的驱动系统与同类型的参数未知的响应系统,在预定时间内达到同步,完成理论证明.应用数值仿真,考察了同步误差曲线、控制输入曲线图等,对比了三种控制器的效果.结果表明:当驱动系统为混沌运动时,设计的控制器能使响应系统在预定时间内同步到混沌运动,四个状态的同步误差收敛时间相差较小.当驱动系统为周期运动时,设计的控制器能使响应系统同步到周期运动,但四个状态的同步误差收敛时间相差较大.其根本原因是三次非线性项带来的不平衡、不匹配.同时也表明:基于正切函数的自适应控制器和参数校正律,相比其余两种控制器和参数自适应律,对状态初值和系统参数有更大的适应范围,普适性更好.

关键词 类 Chen-Qi 超混沌系统, 预定时间同步, 自适应控制器, 数值仿真

中图分类号:TP311

文献标志码:A

Pre-Defined-Time Adaptive Synchronization of the 4-D Hyper-Chaotic Chen-Qi-Like System^{*}

Wang Yuansheng[†]

(School of Mechanics and Electrical Information, China University of Geo-Science, Wuhan 430074, China)

Abstract Applying pre-defined-time stability theory, three controllers were designed to achieve synchronization between Chen-Qi-like four-dimension hyper-chaotic driving systems and response systems of the same type with unknown parameters within a pre-defined time based on tangent function, hyperbolic tangent function, or exponential function. Theoretical proofs were provided. Its' effectiveness were testified with state time history diagrams and synchronous error curves via numerical simulation. The results indicated that controllers designed can achieve to synchronize to chaotic motion while the driving system in chaotic motion, and with a small convergence time difference among the four state synchronization errors. But there was a significant convergence time difference in the four state synchronization errors while driving system in periodic motion. That was induced by the imbalance and mismatch of the state cubic nonlinear term essentially. The results also indicated that adaptive controller and parameter correction law based on tangent function had a larger range of adaptability to initial state values and system parameters comparing to the other two controllers and parameter adaptive laws, thus it hold a better universality.

Key words Chen-Qi-like four-dimension hyper-chaotic system, pre-defined-time synchronization, adaptive controller, numerical simulation

引言

类 Chen-Qi 四维系统是一种典型的非线性系统,它在不同的参数组合或初值条件下,可产生混沌运动、周期运动等^[1-4].在两个同类型的类 Chen-Qi 四维系统的同步控制研究中,若系统参数未知,通常采用自适应控制器^[2-6].依据 Lyapunov-Krasovsk 泛函理论设计的渐近稳定控制器,仅能实现渐近同步,同步误差需要很长的时间才能收敛到 0.借助有限时间稳定理论^[3,7,8],设计自适应控制器和参数估计律,但有限时间内同步误差趋近为 0 的效果,仍然与系统的状态初值有关,也与驱动系统的运动状态有关:主系统为周期运动状态时,有限时间内同步误差趋近为 0 的效果较好;驱动系统为混沌运动时,有限时间内同步误差趋近为 0 的效果较差,主要是含三次非线性项的状态的同步误差的收敛状况较差^[3].

采用双幂函数积分技术设计固定时间收敛的自适应控制器和参数估计律^[4,9,10],以实现两个同类型的类 Chen-Qi 四维混沌系统的固定时间同步^[4].但固定时间内同步误差趋近为 0 的效果,仍然与驱动系统的运动状态有关:驱动系统为混沌运动状态时,固定时间内同步误差趋近为 0 的效果较好;驱动系统为周期运动时,固定时间内同步误差趋近为 0 的效果较差,也是因为含有三次非线性项的状态的同步误差的收敛状况较差^[4].

为解决该问题,使得类 Chen-Qi 四维系统的同步误差在固定时间内收敛到 0,本文借助预定时间控制理论^[11-20],设计了基于正切函数、双曲正切函数、指数函数的三种自适应控制器和参数自适应校正律,以实现两个同类型系统的预定时间同步,进行了理论证明,并用数值仿真考察了它的效果.

1 四维混沌系统的预定时间同步

类 Chen-Qi 驱动系统非线性方程如式(1)^[2-4]:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a(y_1 - x_1) + y_1 z_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = (c - a)x_1 + cy_1 - x_1 z_1 \\ \frac{dz_1}{dt} = x_1^2 - y_1 z_1 - bz_1 - w_1 \\ \frac{dw_1}{dt} = x_1 y_1 z_1 - x_1 z_1 - dw_1 \end{cases} \quad (1)$$

其中 a, b, c, d 为正的常数,是驱动系统的未知参数; x_1, y_1, z_1, w_1 为状态变量; $x_{10}, y_{10}, z_{10}, w_{10}$ 为初值.

参照文献[2-4],取初值 $x_{10}, y_{10}, z_{10}, w_{10}$ 分别为 0.1, -0.2, -0.5, 0.3;取 $a = 37, b = 3, d = 38$.根据分岔图,当 $c = 20.5$ 时,解为定态运动;当 $c = 22.5, 24.5, 26.5, 26.28$ 时,解为不同形态的周期运动.当 $c = 26$ 时,解为混沌运动;当 $c = 36$ 时,解又变为周期运动.

同类型的响应系统如式(2)^[2-4]:

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = a_2(y_2 - x_2) + y_2 z_2 + u_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = (c_2 - a_2)x_2 + c_2 y_2 - x_2 z_2 + u_2 \\ \frac{dz_2}{dt} = x_2^2 - y_2 z_2 - b_2 z_2 - w_2 + u_3 \\ \frac{dw_2}{dt} = x_2 y_2 z_2 - x_2 z_2 - d_2 w_2 + u_4 \end{cases} \quad (2)$$

其中 a_2, b_2, c_2, d_2 为响应系统的需要估计的未知参数; u_1, u_2, u_3, u_4 是待设计的同步控制器; x_2, y_2, z_2, w_2 为状态变量; $x_{20}, y_{20}, z_{20}, w_{20}$ 为系统(2)的初值.

误差系统为式(3)^[2-4]:

$$\begin{cases} \frac{de_1}{dt} = \tilde{a}(y_2 - x_2) + a(e_2 - e_1) + e_2 e_3 + e_2 z_1 + e_3 y_1 + u_1 \\ \frac{de_2}{dt} = (\tilde{c} - \tilde{a})x_2 + (c - a)e_1 + \tilde{c}y_2 + ce_2 - e_1 e_3 - e_1 z_1 - e_3 x_1 + u_2 \\ \frac{de_3}{dt} = e_1^2 + 2e_1 x_1 - e_2 e_3 - e_2 z_1 - e_3 y_1 - \tilde{b}z_2 - be_3 - e_4 + u_3 \\ \frac{de_4}{dt} = e_1 e_2 e_3 + x_1 e_2 e_3 + y_1 e_1 e_3 + z_1 e_1 e_2 + x_1 y_1 e_3 + x_1 z_1 e_2 + y_1 z_1 e_1 - z_1 e_1 - x_1 e_3 - e_1 e_3 - \tilde{d}w_2 - de_4 + u_4 \end{cases} \quad (3)$$

其中 $e_1 = x_2 - x_1, e_2 = y_2 - y_1, e_3 = z_2 - z_1, e_4 = w_2 - w_1; \tilde{a} = a_2 - a, \tilde{b} = b_2 - b, \tilde{c} = c_2 - c, \tilde{d} = d_2 - d$.

下面,先给出几个必要的定义和引理.

定义 1^[11,12]: 如果存在预先指定的正常数 $T_c > 0$,使得 $\lim_{t \rightarrow T_{cc}} |e_i| = 0$,且 $\forall t > T_{cc}$ 有 $|e_i| = 0$,其中 $i = 1, 2, 3, 4$.则称非线性系统(1)和(2)在 T_{cc} 内实现了预定时间同步.

引理 1^[12-14]: 对非线性系统 $\dot{x} = f[x(t)]$, $x \in \mathbf{R}^n$, 考虑候选 Lyapunov 函数 $V(x)$, 若满足:

$$\frac{d}{dt}V(x) = \dot{V}(t) \leq -\frac{\pi}{\theta T_{cc}}(V^{1+\theta/2} + V^{1-\theta/2}) \quad (4)$$

其中 $V_0 = V(t=0) \geq 0$, V_0 为 $V(x)$ 的初值; 常数 θ 满足 $0 < \theta < 1$, 常数 T_{cc} 称为预定时间. 则系统 $\dot{x} = f[x(t)]$, $x \in \mathbf{R}^n$ 在预定时间 T_{cc} 内全局稳定.

进而有:

$$T \leq T_{cc} \times \frac{2}{\pi} \arctan(V_0^{\theta/2}) \quad (5)$$

其中 T 为 $V(x)$ 实际收敛到 0 的时间.

将有界函数 $\arctan(\cdot)$ 换成 $\tanh(\cdot)$, 可得引理 2.

引理 2: 对非线性系统 $\dot{x} = f[x(t)]$, $x \in \mathbf{R}^n$, 考虑候选 Lyapunov 函数 $V(x)$, 若满足:

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{1}{\theta T_{cc}} \frac{[\exp(V^{\theta/2}) + 1]^2}{\exp(V^{\theta/2})} V^{1-\theta/2} \quad (6)$$

其中 $V_0 = V(t=0) \geq 0$, V_0 为 $V(x)$ 的初值; 常数 θ 满足 $0 < \theta < 1$, 常数 T_{cc} 称为预定时间. 则系统 $\dot{x} = f[x(t)]$, $x \in \mathbf{R}^n$ 在预定时间 T_{cc} 内全局稳定.

进而有:

$$T \leq T_{cc} \times \tanh(V_0^{\theta/2}) \quad (7)$$

引理 3^[15-17]: 对非线性系统 $\dot{x} = f[x(t)]$, $x \in \mathbf{R}^n$, 考虑候选 Lyapunov 函数 $V(x)$, 若满足:

$$\dot{V}(t) = -\frac{1}{\theta T_{cc}} \exp(V^\theta) V^{1-\theta} \quad (8)$$

其中 $V_0 = V(t=0) \geq 0$, V_0 为 $V(x)$ 的初值; 常数 θ 满足 $0 < \theta \leq 1$, 常数 $T_{cc} > 0$ 称为预定时间. 则系统 $\dot{x} = f[x(t)]$, $x \in \mathbf{R}^n$ 在预定时间 T_{cc} 内全局稳定.

进而有:

$$T = T_{cc} \times [1 - \exp(-V_0^\theta)] \quad (9)$$

控制目标是构造控制器和参数估计校正律, 使得驱动系统(1)和响应系统(2)的状态达到预定时间同步.

1.1 基于正切函数的预定时间同步

定理 1: 构造自适应控制器和参数估计校正律如式(10)、式(11):

$$\begin{aligned} u_1 &= ae_1 - e_3 y_1 - \frac{\pi e_1}{2\rho T_c} (V^{\frac{\rho}{2}} + V^{-\frac{\rho}{2}}) \\ u_2 &= -ce_1 - ce_2 + e_3 x_1 - \frac{\pi e_2}{2\rho T_c} (V^{\frac{\rho}{2}} + V^{-\frac{\rho}{2}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= -e_1^2 - 2e_1 x_1 + e_2 e_3 + e_2 z_1 + e_3 y_1 + \\ & be_3 + e_4 - \frac{\pi e_3}{2\rho T_c} (V^{\frac{\rho}{2}} + V^{-\frac{\rho}{2}}) \\ u_4 &= -e_1 e_2 e_3 - x_1 e_2 e_3 - y_1 e_1 e_3 - z_1 e_1 e_2 - \\ & x_1 y_1 e_3 - x_1 z_1 e_2 - y_1 z_1 e_1 + z_1 e_1 + \\ & x_1 e_3 + e_1 e_3 + de_4 - \frac{\pi e_4}{2\rho T_c} (V^{\frac{\rho}{2}} + V^{-\frac{\rho}{2}}) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \dot{a}_2 = -(y_2 - x_2)e_1 + x_2 e_2 - \frac{\pi \tilde{a}}{2\rho T_c} (V^{\frac{\rho}{2}} + V^{-\frac{\rho}{2}}) \\ \dot{b}_2 = z_2 e_3 - \frac{\pi \tilde{b}}{2\rho T_c} (V^{\frac{\rho}{2}} + V^{-\frac{\rho}{2}}) \\ \dot{c}_2 = -x_2 e_2 - y_2 e_2 - \frac{\pi \tilde{c}}{2\rho T_c} (V^{\frac{\rho}{2}} + V^{-\frac{\rho}{2}}) \\ \dot{d}_2 = \omega_2 e_4 - \frac{\pi \tilde{d}}{2\rho T_c} (V^{\frac{\rho}{2}} + V^{-\frac{\rho}{2}}) \end{cases} \quad (11)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{c}^2 + \tilde{d}^2) \quad (12)$$

其中常数 $0 < \rho < 1$, 常数 $T_c > 0$ 为预定时间参数. 则在控制器(10)和参数估计校正律(11)作用下, 驱动系统(1)和响应系统(2)的状态可实现预定时间同步.

证明: 对误差系统(3), 试取 Lyapunov 函数为式(12), 则 $V(t)$ 是正定的、径向无界的、可微的函数, 且 $V(t_0) \geq 0$.

$V(t)$ 沿着轨迹(3)的导数为:

$$\dot{V} = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + e_4 \dot{e}_4 + \tilde{a} \dot{\tilde{a}} + \tilde{b} \dot{\tilde{b}} + \tilde{c} \dot{\tilde{c}} + \tilde{d} \dot{\tilde{d}} \quad (13)$$

式(13)中代入式(10)和式(11), 再代入式(12), 有:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + e_4 \dot{e}_4 + \tilde{a} \dot{\tilde{a}} + \tilde{b} \dot{\tilde{b}} + \tilde{c} \dot{\tilde{c}} + \tilde{d} \dot{\tilde{d}} \\ &= -\frac{\pi}{2\rho T_c} (V^{\frac{\rho}{2}} + V^{-\frac{\rho}{2}}) (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + \\ & \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{c}^2 + \tilde{d}^2) \\ &= -\frac{\pi}{2\rho T_c} (V^{\frac{\rho}{2}} + V^{-\frac{\rho}{2}}) (2V) \leq -\frac{\pi}{\rho T_c} (V^{1+\frac{\rho}{2}} + V^{1-\frac{\rho}{2}}) \end{aligned}$$

由引理 1 可得: 驱动系统(1)和响应系统(2)的状态可实现预定时间同步, 同步时间 T_1 为:

$$T_1 \leq T_c \times \frac{2}{\pi} \arctan(V_0^{\rho/2}) < T_c \quad (14)$$

证毕.

1.2 基于双曲正切函数的预定时间同步

定理 2: 构造自适应控制器和参数估计校正律如式(15)、式(16):

$$\begin{cases} u_1 = ae_1 - e_3 y_1 - \frac{e_1}{2\rho T_c} W(\rho) \\ u_2 = -ce_1 - ce_2 + e_3 x_1 - \frac{e_2}{2\rho T_c} W(\rho) \\ u_3 = -e_1^2 - 2e_1 x_1 + e_2 e_3 + e_2 z_1 + \\ e_3 y_1 + be_3 + e_4 - \frac{e_3}{2\rho T_c} W(\rho) \\ u_4 = -e_1 e_2 e_3 - x_1 e_2 e_3 - y_1 e_1 e_3 - \\ z_1 e_1 e_2 - x_1 y_1 e_3 - x_1 z_1 e_2 - y_1 z_1 e_1 + \\ z_1 e_1 + x_1 e_3 + e_1 e_3 + de_4 - \frac{e_4}{2\rho T_c} W(\rho) \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \dot{a}_2 = -(y_2 - x_2)e_1 + x_2 e_2 - \frac{\tilde{a}}{2\rho T_c} W(\rho) \\ \dot{b}_2 = z_2 e_3 - \frac{\tilde{b}}{2\rho T_c} W(\rho) \\ \dot{c}_2 = -x_2 e_2 - y_2 e_2 - \frac{\tilde{c}}{2\rho T_c} W(\rho) \\ \dot{d}_2 = w_2 e_4 - \frac{\tilde{d}}{2\rho T_c} W(\rho) \end{cases} \quad (16)$$

$$W(\rho) = \frac{[\exp(V^{\rho/2}) + 1]^2}{\exp(V^{\rho/2})} V^{-\rho/2} \quad (17)$$

其中常数 $0 < \rho < 1$, 常数 $T_c > 0$ 为预定时间参数, V 为式(12). 则在控制器(15)和参数估计校正律(16)作用下, 驱动系统(1)和响应系统(2)的状态可实现预定时间同步.

证明: 对误差系统(3), 试取 Lyapunov 函数为式(12), 则 $V(t)$ 是正定的、径向无界的、可微的函数, 且 $V(t_0) \geq 0$.

$V(t)$ 沿着轨迹(3)的导数为式(13), 式(13)中代入式(15)、式(16), 再代入式(17)、式(12), 有:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + e_4 \dot{e}_4 + \tilde{a} \dot{\tilde{a}} + \tilde{b} \dot{\tilde{b}} + \tilde{c} \dot{\tilde{c}} + \tilde{d} \dot{\tilde{d}} \\ &= -\frac{1}{2\rho T_c} W(\rho) (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{c}^2 + \tilde{d}^2) \\ &= -\frac{1}{2\rho T_c} W(\rho) (2V) \leq -\frac{1}{\rho T_c} \frac{[\exp(V^{\frac{\rho}{2}}) + 1]^2}{\exp(V^{\frac{\rho}{2}})} V^{1-\frac{\rho}{2}} \end{aligned}$$

由引理 2 可得: 驱动系统(1)和响应系统(2)的状态可实现预定时间同步, 同步时间 T_2 为:

$$T_2 \leq T_c \times \tanh(V_0^{\rho/2}) < T_c \quad (18)$$

证毕.

1.3 基于指数函数的预定时间同步

定理 3: 构造自适应控制器和参数估计校正律如式(19)、式(20):

$$\begin{cases} u_1 = ae_1 - e_3 y_1 - \frac{e_1}{2\rho T_{cc}} \exp(V^\rho) V^{-\rho} \\ u_2 = -ce_1 - ce_2 + e_3 x_1 - \frac{e_2}{2\rho T_{cc}} \exp(V^\rho) V^{-\rho} \\ u_3 = -e_1^2 - 2e_1 x_1 + e_2 e_3 + e_2 z_1 + e_3 y_1 + \\ be_3 + e_4 - \frac{e_3}{2\rho T_{cc}} \exp(V^\rho) V^{-\rho} \\ u_4 = -e_1 e_2 e_3 - x_1 e_2 e_3 - y_1 e_1 e_3 - z_1 e_1 e_2 - \\ x_1 y_1 e_3 - x_1 z_1 e_2 - y_1 z_1 e_1 + z_1 e_1 + \\ x_1 e_3 + e_1 e_3 + de_4 - \frac{e_4}{2\rho T_{cc}} \exp(V^\rho) V^{-\rho} \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \dot{a}_2 = -(y_2 - x_2)e_1 + x_2 e_2 - \frac{\tilde{a}}{2\rho T_c} \exp(V^\rho) V^{-\rho} \\ \dot{b}_2 = z_2 e_3 - \frac{\tilde{b}}{2\rho T_c} \exp(V^\rho) V^{-\rho} \\ \dot{c}_2 = -x_2 e_2 - y_2 e_2 - \frac{\tilde{c}}{2\rho T_c} \exp(V^\rho) V^{-\rho} \\ \dot{d}_2 = w_2 e_4 - \frac{\tilde{d}}{2\rho T_c} \exp(V^\rho) V^{-\rho} \end{cases} \quad (20)$$

其中常数 $0 < \rho < 1$, 常数 $T_c > 0$ 为预定时间参数, V 为式(12). 则在控制器(19)和参数估计校正律(20)作用下, 驱动系统(1)和响应系统(2)的状态可实现预定时间同步.

证明: 对误差系统(3), 试取 Lyapunov 函数为式(12), 则 $V(t)$ 是正定的、径向无界的、可微的函数, 且 $V(t_0) \geq 0$.

$V(t)$ 沿着轨迹(3)的导数为式(13), 式(13)中代入式(19)、式(20), 再代入式(12), 有:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + e_4 \dot{e}_4 + \tilde{a} \dot{\tilde{a}} + \tilde{b} \dot{\tilde{b}} + \tilde{c} \dot{\tilde{c}} + \tilde{d} \dot{\tilde{d}} \\ &= -\frac{1}{2\rho T_{cc}} \exp(V^\rho) V^{-\rho} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + \tilde{a}^2 + \\ &\quad \tilde{b}^2 + \tilde{c}^2 + \tilde{d}^2) \\ &= -\frac{1}{2\rho T_{cc}} \exp(V^\rho) V^{-\rho} (2V) \leq -\frac{1}{\rho T_{cc}} \exp(V^\rho) V^{1-\rho} \end{aligned}$$

由引理 3 可得: 驱动系统(1)和响应系统(2)的

状态可实现预定时间同步,同步时间 T_3 为:

$$T_3 \leq T_{cc} \times [1 - \exp(-V_0^e)] \quad (21)$$

证毕.

2 数值仿真

数值仿真条件与文献[4]相同,以便比较,即如表 1.

表 1 中初值 1 为:系统(1)初值 $x_{10}, y_{10}, z_{10}, w_{10}$ 分别取 $-10.1, 20.2, -8.5, -9.3$;系统(2)初值 $x_{20}, y_{20}, z_{20}, w_{20}$ 分别取 $1, -1, -7.5, 3.5$;

表 1 中初值 2 为:系统(1)初值 $x_{10}, y_{10}, z_{10}, w_{10}$ 分别取 $-0.1, 0.2, -0.5, 0.3$;系统(2)初值 $x_{20}, y_{20}, z_{20}, w_{20}$ 分别取为 $1, -1, 0.5, -0.5$;

混沌运动时:取参数 $a = 37, b = 3, c = 26, d = 38$;参数 $a_2(0) = 30, b_2(0) = 4, c_2(0) = 25, d_2(0) = 40$;

周期运动时:取参数 $a = 37, b = 3, c = 36, d = 38$;参数 $a_2(0) = 30, b_2(0) = 4, c_2(0) = 25, d_2(0) = 40$.

表 1 中收敛时间带 * 的数值为固定时间自适应控制的仿真结果^[4].

表 1 仿真结果汇总

Table 1 Summary of simulation results

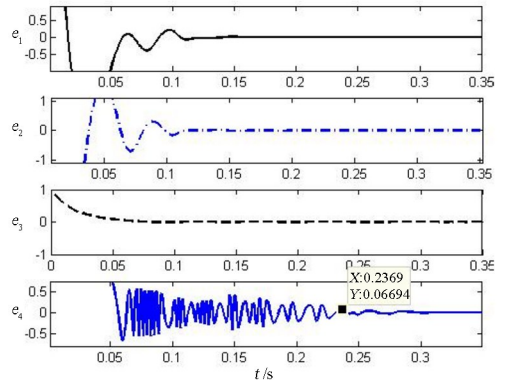
序号	运动模式	初值 ρ, T_{cc}	e_1, e_2, e_3 收敛时间/s	e_4 收敛时间/s
例 1	混沌 $c=26$	初值 1	0.224 7*	0.3*
		$\rho=0.324 0$	0.172 8(1)	0.23(1)
		$T_{cc}=0.224 7$	0.222 4(2)	0.24(2)
例 2	周期 $c=36$	初值 1	0.224 7*	1.5*
		$\rho=0.324 0$	0.173 9(1)	1.6(1)
		$T_{cc}=0.224 7$	0.222 7(2)	1.8(2)
例 3	混沌 $c=26$	初值 2	0.224 7*	0.224 7*
		$\rho=0.324 0$	0.172 8(1)	0.4(1)
		$T_{cc}=0.224 7$	0.211 0(2)	0.211 0(2)
例 4	周期 $c=36$	初值 2	0.224 7*	1.5*
		$\rho=0.324 0$	0.160 4(1)	3.0(1)
		$T_{cc}=0.224 7$	0.217 7(2)	3.2(2)

例 1: 取预定同步时间 $T_{cc} = 0.2247$ s, 取 $\rho = 0.324 0$, 取初值 1, 取混沌运动时的系统常数, 根据定理 1, 由式(5)算得 $T_1 \leq 0.172 8$ s. 用 Matlab 编写程序, 调用 ode45 函数进行计算, 得两个系统的状态变量的同步误差的情况如图 1(a) 所示、控制输入的情况如图 1(b) 所示. 然后改变 ρ , 经试验 $0.000 1 \leq \rho \leq 0.999 9$ 程序可行.

同理, 根据定理 2 算法, 由式(7)算得 $T_2 \leq 0.222 4$ s. 用 Matlab 编写程序计算得状态变量的同步误差情况和控制输入情况, 分别如图 1(c)、(d) 所示. 经试验, 此时 $0.000 1 \leq \rho \leq 0.701$ 程序可行.

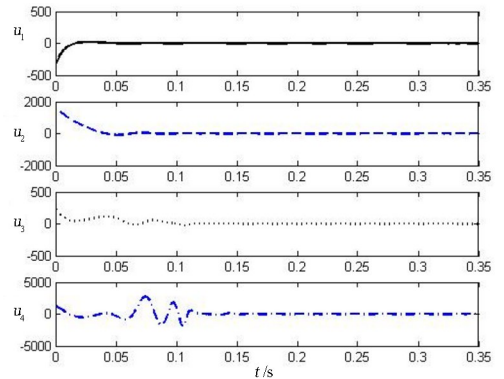
根据定理 3 算法, 由式(9)算得 $T_3 \leq 0.224 5$ s. 类似可得状态变量同步误差的情况和控制输入的情况, 分别如图 1(e)、(f) 所示. 经试验 $0.000 1 \leq \rho \leq 0.324 0$ 程序可行.

由图 1(a)、(c)、(e) 可见: 类 Chen-Qi 四维驱动系统作混沌运动时, 同步误差 e_1, e_2, e_3 衰减到 0 的时间, 与同步误差 e_4 衰减到 0 的时间, 虽然略有差别, 但基本符合设计指定的同步时间.



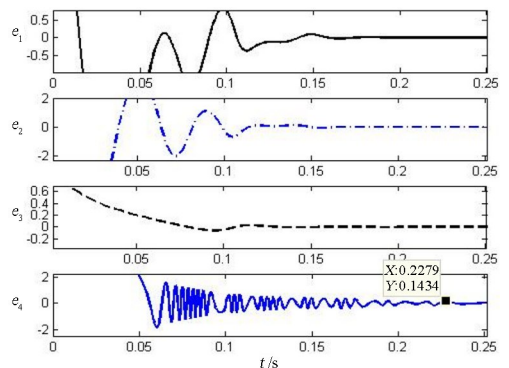
(a) 同步误差曲线图($c=26$ 混沌运动)

(a) Synchronization error curve with $c=26$



(b) 控制量曲线图($c=26$ 混沌运动)

(b) Control variable curve with $c=26$



(c) 同步误差曲线图($c=26$ 混沌运动)

(c) Synchronization error curve with $c=26$

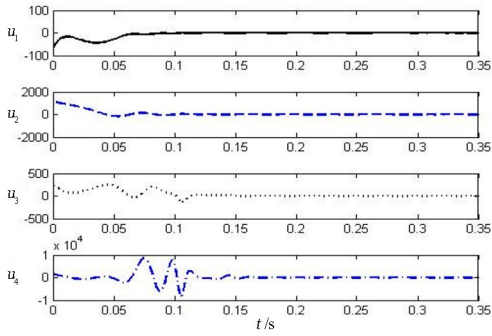
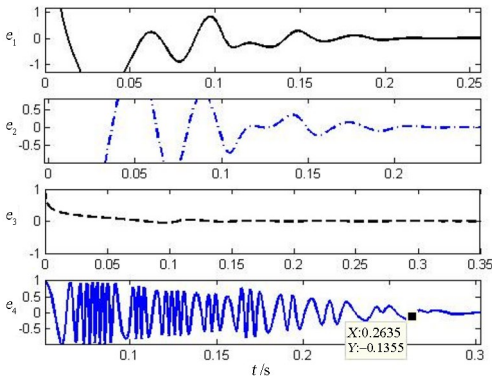
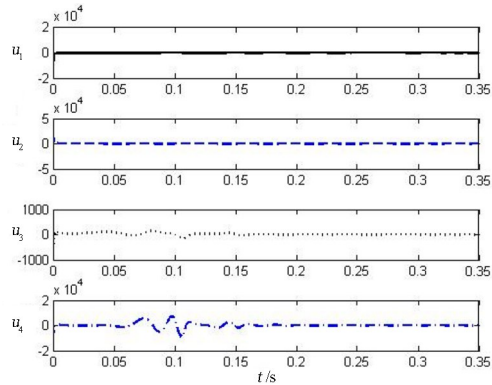
(d) 控制量曲线图($c=26$ 混沌运动)(d) Control variable curve with $c=26$ (e) 同步误差曲线图($c=26$ 混沌运动)(e) Synchronization error curve with $c=26$ (f) 控制量曲线图($c=26$ 混沌运动)(f) Control variable curve with $c=26$

图1 例1的仿真曲线图

Fig.1 Curve of example 1

由图1(b)、(d)、(f)可见:从控制量的大小范围来看,同等条件下,定理1基于正切函数的控制器的取值范围最小,其参数 ρ 的可取范围也最大.因此,定理1的控制器的适用范围好于其他两种.

例2: 改取周期运动时的参数,即 $c=36$,其余参数同例1.由式(5)算得 $T_1 \leq 0.1739$ s.再仿真得到两个系统的状态变量的同步误差的情况如图2(a)所示,控制输入的情况如图2(b)所示.然后改变 ρ ,经试验,此时 $0.0001 \leq \rho \leq 0.9999$ 程序可行.

由图2(a)可见:类Chen-Qi四维驱动系统做周期运动时,同步误差 e_1, e_2, e_3 在约0.1739 s基本衰减到0,同步误差 e_4 在约1.6 s才衰减到0.

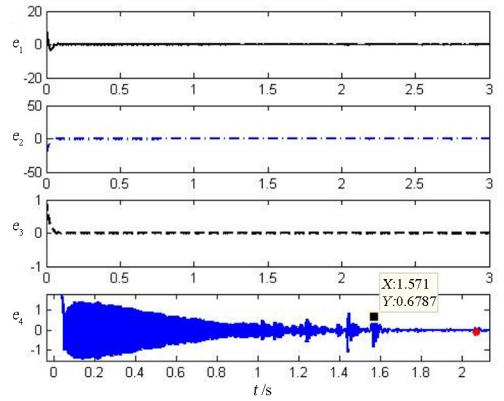
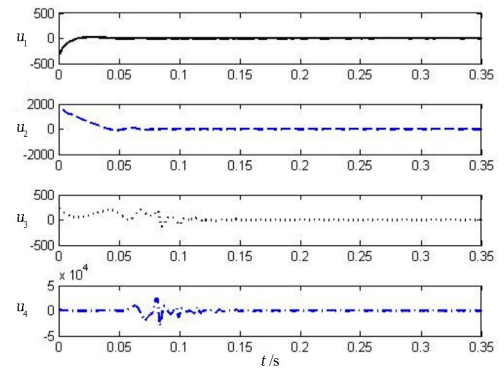
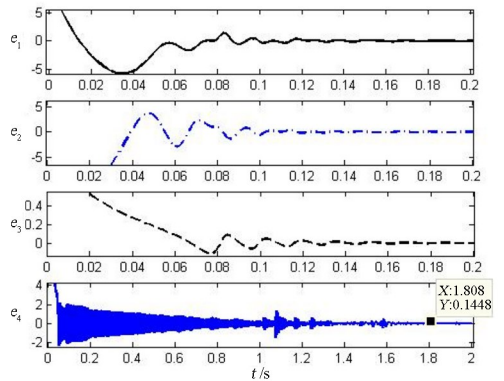
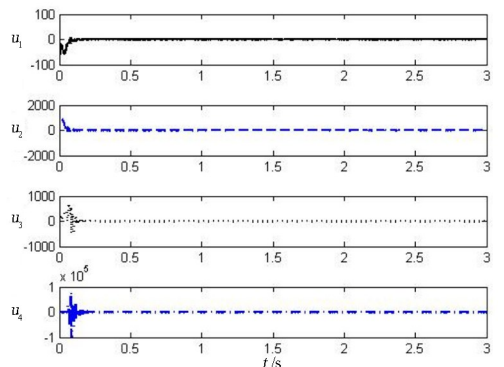
(a) 同步误差曲线图($c=36$ 周期运动)(a) Synchronization error curve with $c=36$ (b) 控制量曲线图($c=36$ 周期运动)(b) Control variable curve with $c=36$ (c) 同步误差曲线图($c=36$ 周期运动)(c) Synchronization error curve with $c=36$ (d) 控制量曲线图($c=36$ 周期运动)(d) Control variable curve with $c=36$

图2 例2的仿真曲线图

Fig.2 Curve of example 2

同理,根据定理 2,由式(7)算得 $T_2 \leq 0.2227$ s. 用 Matlab 编写程序计算,得到两个系统的状态变量的同步误差的情况和控制输入的情况,分别如图 2 (c)、(d)所示. 经试验,此时 $0.001 \leq \rho \leq 0.450$ 程序可行.

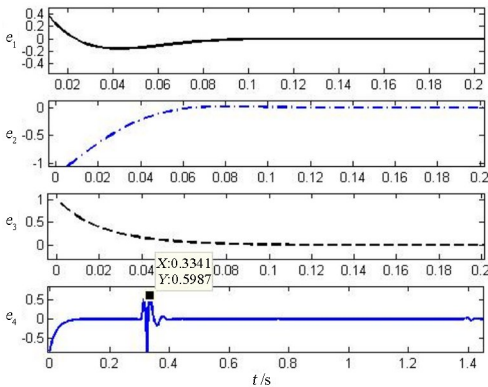
由图 2 (c)可见:类 Chen-Qi 四维驱动系统做周期运动时,此时同步误差 e_1, e_2, e_3 在约 0.2227 s 基本衰减到 0,同步误差 e_4 在约 1.8 s 才衰减到 0.

根据定理 3 算法,用 Matlab 编写程序计算,经试验, $0.0001 \leq \rho \leq 0.2700$ 程序可行.

例 3: 改取系统状态初值为初值 2,其余参数同例 1. 由式(5)算得 $T_1 \leq 0.1728$ s. 用 Matlab 编写程序计算,得到两个系统的状态变量的同步误差的情况如图 3 (a)所示、控制输入的情况如图 3 (b)所示. 然后改变 ρ , 经试验,此时 $0.0001 \leq \rho \leq 0.9999$ 程序可行.

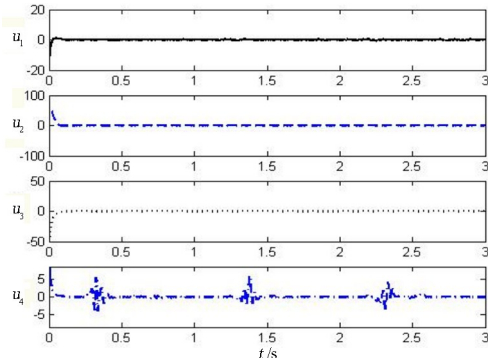
由图 3 (a)可见:类 Chen-Qi 四维驱动系统作混沌运动时, e_1, e_2, e_3 在约 0.1728 s 基本衰减到 0,误差 e_4 在约 0.4 s 衰减到 0.

同理,根据定理 2 算法,由式(7)算得 $T_2 \leq 0.2110$ s. 用 Matlab 编写程序算得两个系统的状态变量的同步误差的情况和控制输入的情况,分别



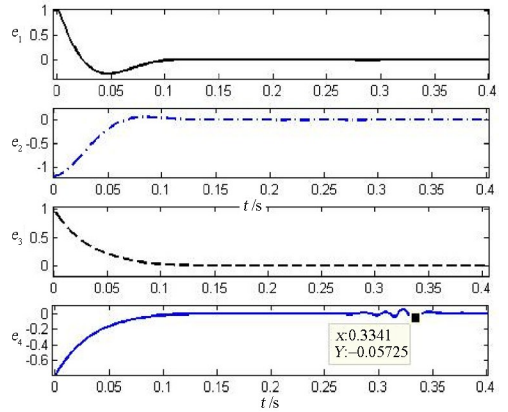
(a) 状态初值 2 时的同步误差曲线 ($c=26$ 混沌运动)

(a) Synchronization error with $c=26$ and 2nd initial values



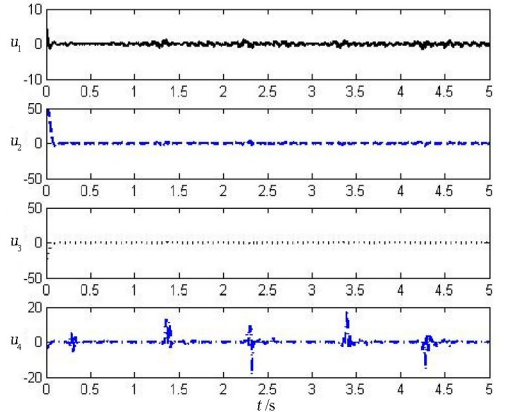
(b) 状态初值 2 时的控制量曲线图 ($c=26$ 混沌运动)

(b) Control variable curve with $c=26$ and 2nd initial values



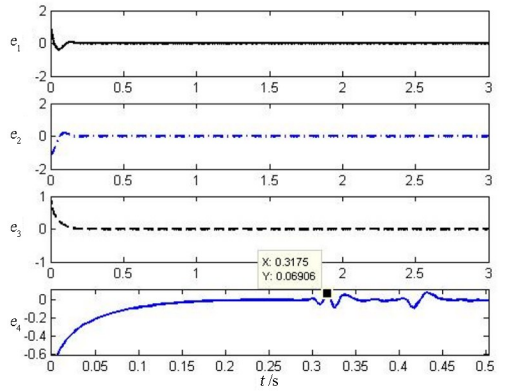
(c) 状态初值 2 时的同步误差曲线 ($c=26$ 混沌运动)

(c) Synchronization error curve with $c=26$ and 2nd initial values



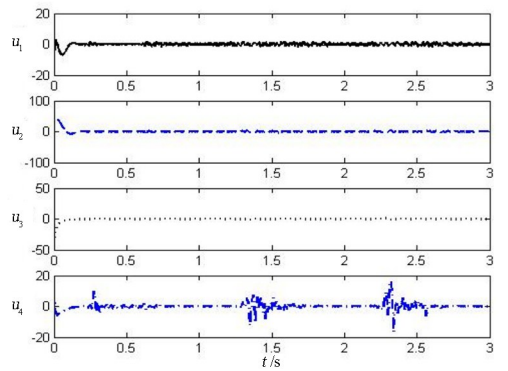
(d) 状态初值 2 时的控制量曲线图 ($c=26$ 混沌运动)

(d) Control variable curve with $c=26$ and 2nd initial values



(e) 状态初值 2 时的同步误差曲线 ($c=26$ 混沌运动)

(e) Synchronization error curve with $c=26$ and 2nd initial values



(f) 状态初值 2 时的控制量曲线图 ($c=26$ 混沌运动)

(f) Control variable curve with $c=26$ and 2nd initial values

图 3 例 3 的仿真曲线图
Fig. 3 Curve of example 3

如图 3(c)、(d)所示. 此时, 经试验, $0.0001 \leq \rho \leq 0.9997$ 程序可行.

由图 3(c)可见: 类 Chen-Qi 驱动系统作混沌运动时, 此时 e_1, e_2, e_3 和 e_4 在约 0.2110 s 衰减到 0, 与设计指定值相符.

根据定理 3 算法, 由式(9)算得 $T_3 \leq 0.2135$ s. 类似可得两个系统的状态变量的同步误差的情况和控制输入的情况, 分别如图 3(e)、3(f)所示. 经试验, 此时 $0.0001 \leq \rho \leq 0.5998$ 程序可行.

由图 3(e)可见: 类 Chen-Qi 驱动系统作混沌运动时, 此时 e_1, e_2, e_3 和 e_4 在约 0.2135 s 衰减到 0, 与设计指定值相符.

例 4: 改取系统状态初值为初值 2, 改取周期运动时的系统参数, 即 $c=36$, 其余参数同例 1.

由定理 1 式(5)算得 $T_3 \leq 0.1604$ s, 再仿真得状态变量的同步误差的情况如图 4(a)所示、控制输入的情况如图 4(b)所示. 然后改变 ρ , 经试验 $0.0001 \leq \rho \leq 0.9999$ 程序可行.

由图 4(a)可见: 类 Chen-Qi 四维驱动系统做周期运动时, 同步误差 e_1, e_2, e_3 在约 0.1604 s 基本衰减到 0, 同步误差 e_4 在约 3.0 s 才衰减到 0, 二者差异较大.

同理, 根据定理 2 算法, 由式(7)算得 $T_2 \leq 0.2177$ s. 用 Matlab 编写程序算得两个系统的状态变量的同步误差的情况和控制输入的情况, 分别如图 4(c)、(d)所示. 此时, 经试验, $0.001 \leq \rho \leq 0.434$ 程序可行.

由图 4(c)可见: 类 Chen-Qi 四维驱动系统做周期运动时, 同步误差 e_1, e_2, e_3 在约 0.2177 s 基本衰减到 0, 同步误差 e_4 在约 3.2 s 才衰减到 0, 二者差异较大.

根据定理 3 算法, 用 Matlab 编写程序, 类似可得两个系统的状态变量的同步误差的情况和控制

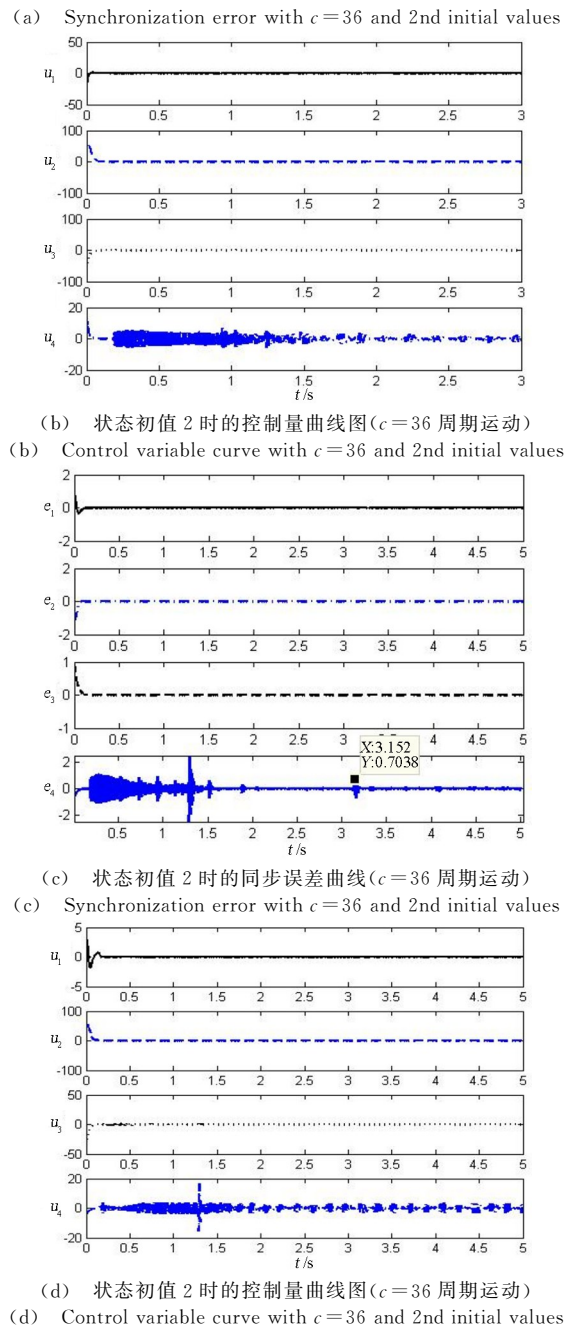


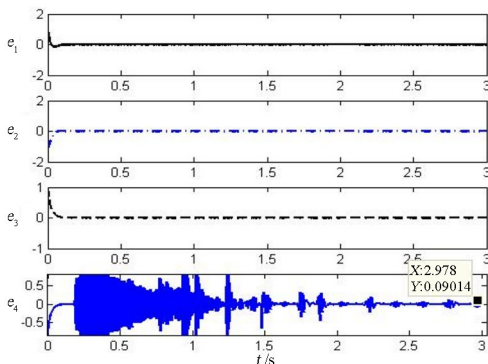
图 4 例 4 的仿真曲线图

Fig. 4 Curve of example 4

输入的情况. 经试验, 此时 $0.001 \leq \rho \leq 0.280$ 程序可行.

综上, 将仿真结果列表如表 1.

可见: 驱动系统做周期运动时, 同步误差 e_1, e_2, e_3 的收敛时间的大小, 与同步误差 e_4 的收敛时间的大小, 相差较大. 驱动系统做混沌运动时, 同步误差 e_1, e_2, e_3 的收敛时间, 与同步误差 e_4 的收敛时间, 相差较小. 这一现象与固定时间自适应同步控制的情况相似. 即: 当类 Chen-Qi 驱动系统处于周期运动时, 只有同步误差 e_1, e_2, e_3 的收敛时间数值符合预定时间稳定理论的规律, 而同步误差



(a) 不同状态初值时的同步误差曲线($c=36$ 周期运动)

e_4 的收敛时间数值不符合,其原因是 e_1 、 e_2 、 e_3 只存在二次非线性, e_4 存在三次非线性项,从而产生不平衡、不匹配,进而导致误差收敛情况的差异.这是系统本身造成的.

3 结论

对两个类 Chen-Qi 四维超混沌系统的同步控制问题,由 Lyapunov 稳定性理论设计的渐近稳定自适应控制器和参数估计律,仅能实现渐近同步控制.应用有限时间稳定理论,同步误差的收敛时间又与初始状态值有关,当初始状态偏离平衡点无穷远时,同步误差的收敛时间为无穷大.应用固定时间稳定理论,同步误差的收敛时间又与系统的参数有关,当驱动系统作混沌运动时,同步误差的收敛时间数值基本一致;当驱动系统做周期运动时,同步误差的收敛时间数值差别较大.为解决这一问题,本文应用预定时间控制理论,设计了自适应控制器和参数估计律,试图实现两个同类型的类 Chen-Qi 四维系统的预定时间同步,完成了理论证明,并用数值仿真考察了它的效果.

数值计算的结果表明:同步误差在预定时间内收敛到 0 的效果,与驱动系统参数 c 有关.当驱动系统作混沌运动时,同步误差的收敛时间的数值差别较小.当驱动系统做周期运动时,由于 e_4 存在三次非线性项,与 e_1 、 e_2 、 e_3 的收敛情况相比, e_4 的收敛速度较慢,收敛时间的数值差别较大.这一现象与固定时间自适应同步控制的状况相似^[4].这是系统本身的不平衡、不匹配导致的.

如何改进算法,消除这种不平衡,使得参数自适应过程中,驱动系统处于混沌运动或周期运动时,四个状态变量的同步误差的收敛时间的数值都趋于一致,这有待深入研究.例如,采用高阶滑模控制或分数阶控制器^[14,18-20],或者将混沌系统转化为积分链形式,从而应用反演控制、或基于时基发生器的滑模控制、或基于 RBF 神经网络的自适应滑模控制^[21-23],或者应用其他的控制方法^[24]等.

本文的研究还表明,基于正切函数的自适应控制器和参数校正律,当 $0.0001 \leq \rho \leq 0.9999$ 时都可适用,相比基于双曲正切函数、基于指数函数的自适应控制器和参数自适应估计律,这意味着它对状态初值和系统参数有更大的适应范围,普适性更好.本文的研究有助于加深理解类 Chen-Qi 系统的

自适应同步控制.

参考文献

- [1] 黄苏海,田立新.一个新的四维超混沌系统的动力学分析及混沌反同步[J].电路与系统学报,2011,16(6):66-74.
- HUANG S H, TIAN L X. Dynamical analysis and anti-synchronization for a new four dimensional hyperchaotic system [J]. Journal of Circuits and Systems, 2011, 16(6): 66-74. (in Chinese)
- [2] WANG Y S, LI B, LU G Y. Synchronization and anti-synchronization for a 4-dimensional hyperchaotic system [J]. Journal of Vibration Testing and System Dynamics, 2020, 4(4): 325-336.
- [3] WANG Y S, LI B, YU X Y. Finite-time synchronization of the 4-D hyper-chaotic Chen-Qi-like system [J]. Journal of Physics: Conference Series, 2023, 2468(1): 012020.
- [4] 王院生.类 Chen-Qi 系统的固定时间自适应同步控制[J].动力学与控制学报,2024,22(7):80-86.
- WANG Y S. Fixed-Time Adaptive Synchronization Control of Chen-Qi-like Chaotic System [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(7): 80-86.
- [5] 陈旭,李明,郑永爱.基于自适应模糊滑模控制的分数阶混沌系统的投影同步[J].动力学与控制学报,2018,16(5):411-417.
- CHEN X, LI M, ZHENG Y A. Projective synchronization of fractional order chaotic system based on adaptive fuzzy sliding mode control [J]. Journal of Dynamics and Control, 2018, 16(5): 411-417. (in Chinese)
- [6] 司辉,郑永爱.分数阶混沌系统的自适应预测同步[J].动力学与控制学报,2021,19(5):8-12.
- SI H, ZHENG Y A. Adaptive predictive synchronization of fractional order chaotic systems [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(5): 8-12. (in Chinese)
- [7] WANG L M, DONG T D, GE M F. Finite-time synchronization of memristor chaotic systems and its application in image encryption [J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 347: 293-305.
- [8] 王荣浩,吴银平,秦霞.分数阶时变切换系统有限时间异步控制[J].动力学与控制学报,2023,21(3):44-52.
- WANG R H, WU Y P, QIN X. Finite time asyn-

- chronous control of fractional order time-varying switched systems [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(3): 44–52. (in Chinese)
- [9] POLYAKOV A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2106–2110.
- [10] PAL A K, KAMAL S, NAGAR S K, et al. Design of controllers with arbitrary convergence time [J]. *Automatica*, 2020, 112: 108710.
- [11] WANG E T, YAN S H, WANG Q Y. A new four-dimensional chaotic system with multistability and its predefined-time synchronization [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2022, 32(14): 2250207.
- [12] ANGUIANO-GIJÓN C A, MUÑOZ-VÁZQUEZ A J, SÁNCHEZ-TORRES J D, et al. On predefined-time synchronisation of chaotic systems [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2019, 122: 172–178.
- [13] YANG X W, FAN X P, LONG F, et al. Predefined-time robust control with formation constraints and saturated controls [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 110(3): 2535–2554.
- [14] MUÑOZ-VÁZQUEZ A J, SÁNCHEZ-TORRES J D, DEFOORT M, et al. Predefined-time convergence in fractional-order systems [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, 143: 110571.
- [15] JIMÉNEZ-RODRÍGUEZ E, SÁNCHEZ-TORRES J D, LOUKIANOV A G. Optimal predefined-time stabilization On Optimal Predefined-Time Stabilization[C]//XVII Latin American Conference of Automatic Control. New York: Wiley, 2016.
- [16] SÁNCHEZ-TORRES J D, GÓMEZ-GUTIÉRREZ D, LÓPEZ E, et al. A class of predefined-time stable dynamical systems [J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2018, 35: 1–29.
- [17] SÁNCHEZ-TORRES J D, SANCHEZ E N, LOUKIANOV A G. Predefined-time stability of dynamical systems with sliding modes [C]//2015 American Control Conference (ACC). New York: IEEE, 2015: 5842–5846.
- [18] 赵占山, 张静, 丁刚, 等. 冠状动脉系统高阶滑模自适应混沌同步设计[J]. *物理学报*, 2015, 64(21): 264–271.
- ZHAO Z S, ZHANG J, DING G, et al. Chaos synchronization of coronary artery system based on higher order sliding mode adaptive control [J]. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(21): 264–271. (in Chinese)
- [19] BHALEKAR S, DAFTARDAR-GEJJI V. Synchronization of different fractional order chaotic systems using active control [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15(11): 3536–3546.
- [20] 毛北行, 王东晓. 不确定分数阶高维混沌系统的自适应滑模同步 [J]. *电子学报*, 2021, 49(4): 775–780.
- MAO B X, WANG D X. Self-adaptive sliding mode synchronization of uncertain fractional-order high-dimension chaotic systems [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2021, 49(4): 775–780. (in Chinese)
- [21] GE S Y, ZHOU Y J, JIANG G P, et al. Prescribed-time leader-following consensus tracking control for second-order multi-agent systems [C]//2019 Chinese Automation Congress (CAC). New York: IEEE, 2019: 945–950.
- [22] ARECHAVALETA G, OBREGÓN J, BECERRA H M, et al. Predefined-time convergence in task-based inverse dynamics using time base generators [J]. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, 51(13): 443–449.
- [23] BECERRA H M, VÁZQUEZ C R, ARECHAVALETA G, et al. Predefined-time convergence control for high-order integrator systems using time base generators [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018, 26(5): 1866–1873.
- [24] ABED ASSALI E. Predefined-time synchronization of chaotic systems with different dimensions and applications [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, 147: 110988.