

# 基于数据驱动的平面铰接多刚体系统动力学建模

艾之误 王康昊 刘晓峰<sup>†</sup>

(上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240)

**摘要** 动力学模型是模拟物理系统的一种有效工具,能够帮助人们深入理解物理系统的运行规律,为物理系统的预测、优化设计以及控制系统的开发提供理论支持.近年来,基于数据驱动的动力学建模方法引起了学界的广泛关注.已有研究虽然取得了一定成果,但仍存在一些不足之处.本文深入研究了基于数据驱动的平面铰接多刚体系统动力学建模问题,并在拉格朗日神经网络(LNN)的基础上提出了一种改进的数据驱动建模方法——拓扑拉格朗日神经网络(TLNN).相较于LNN,TLNN通过嵌入多体系统的拓扑信息,实现了神经网络学习性能的提高.预测结果显示,使用相同训练数据集,相较LNN、HNN以及神经微分方程(NODE)三种数据驱动建模方法,TLNN可以建立精度更高的铰接多刚体动力学代理模型.另外,本文对数据驱动建模过程所涉及广义坐标选择问题进行讨论.训练和预测结果均显示,相较于选择关节相对角度进行数据驱动建模,采用刚体绝对姿态角进行建模可以获得精度更高的动力学代理模型.

**关键词** 动力学建模, 铰接刚体, 拓扑拉格朗日神经网络, 拉格朗日力学

中图分类号:O313.3

文献标志码:A

## Dynamic Modeling of Planar Articulated Multi-Rigid Body Systems Based on Data Drive

Ai Zhihao Wang Kanghao Liu Xiaofeng<sup>†</sup>

(School of Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract** Dynamic models serve as effective tools for simulating physical systems, facilitating a deeper understanding of the operational principles governing systems. They provide theoretical underpinnings for prediction, optimization, and control system development. In recent years, data-driven approaches for dynamic modeling have garnered widespread attention in academia. While significant progress has been made, there remain limitations. This paper delves into the data-driven modeling of planar articulated multibody systems and proposes an improved neural network framework, termed Topological Lagrangian Neural Network (TLNN), building upon the foundation of Lagrangian Neural Networks (LNN). Compared to LNN, TLNN leverages topological information embedded within multibody systems, enhancing the learning performance of neural networks. Prediction results demonstrate that TLNN establishes higher-precision dynamic proxy models for articulated multibody dynamics compared to LNN, Hamiltonian Neural Networks (HNN), and Neural Ordinary Differential Equations (NODE) when trained on the same dataset. Furthermore, this paper discusses the generalized coordinate selection issue in the data-driven modeling process. Both training and prediction results indicate that utilizing rigid body absolute angles for modeling yields dynamic proxy models with higher precision compared to modeling based on joint relative angles in data-driven modeling of articulated multibody systems.

**Key words** dynamic modeling, articulated rigid body, topological Lagrange neural network, Lagrange mechanics

## 引言

经过多年发展,神经网络已经广泛地应用于计算机科学领域的研究中,在图像分类<sup>[1]</sup>、语音识别<sup>[2]</sup>和自然语言处理<sup>[3]</sup>等问题的解决中取得了巨大的突破和成功.然而,神经网络在处理机械系统动力学建模等传统工程学科的问题时依然面临着许多挑战.近年来,学者们通过将已知的先验物理信息嵌入神经网络<sup>[4]</sup>,改善神经网络对机械系统动力学模型的学习能力.学术界将此类神经网络命名为基于物理信息的神经网络<sup>[5]</sup>.尽管基于物理信息的神经网络在解决物理系统动力学数据驱动建模问题上展现了巨大潜力,但其在建模精度上仍有很多不足,尚不具备完成复杂物理系统的动力学建模任务的能力,如常见的铰接多刚体机械系统.进一步提升基于物理信息的神经网络的学习能力对于将数据驱动技术应用于机械系统动力学建模问题意义重大.

到目前为止,国外学者对基于数据驱动的机械系统动力学建模问题进行了深入的研究,提出了一些有效的机器学习方法.这些方法按原理不同可分为:基于观测偏差的学习方法、基于引导偏差的学习方法和基于学习偏差的学习方法<sup>[6]</sup>.

观测偏差类方法是一种类似于纯数据驱动的学习方法,通过构建蕴含物理特征的数据集,如机械系统的运动轨迹数据或流场的图像数据,实现神经网络学习性能的提升. Godwin 等<sup>[7]</sup>提出的基于图网络的模拟器 (graph network-based simulators, GNS) 框架,其使用图神经网络学习粒子的运动轨迹以此预测流体系统未来的状态. Raissi 等人提出的隐藏流体力学 (hidden fluid mechanics, HFM)<sup>[8]</sup>方法,其从流场图像中挖掘速度场和压力场的信息.

引导偏差类方法可视为神经网络方法与传统建模方法的结合.通过设计特定的网络结构嵌入先验物理定律,例如守恒定律、牛顿第二定律,进而提升神经网络模型学习性能.在引导偏差类方法中,哈密顿神经网络 (Hamiltonian neural network, HNN)<sup>[9]</sup>和拉格朗日神经网络 (Lagrangian neural

network, LNN)<sup>[10]</sup>是最具代表性的,它们利用微分操作分别实现了哈密顿正则方程和第二类拉格朗日方程的嵌入.基于这两种神经网络, Finzi 等提出了约束哈密顿网络 (CHNN) 和约束拉格朗日网络 (CLNN)<sup>[11]</sup>.此种改进方法最大的不同是选用物体的笛卡尔坐标作为数据驱动建模的广义变量,并基于带拉格朗日乘子的第二类拉格朗日方程建立系统的动力学模型.类似的, Bhatoo 等基于图神经网络方法对 LNN 和 HNN 进行改进.他们提出的方法分别称为拉格朗日图神经网络 (LGNN) 和哈密顿图神经网络 (HGNN)<sup>[12]</sup>. 相较之前的工作, LGNN 最大的改进是实现了系统拓扑关系的嵌入.训练和预测结果显示,拓扑信息的嵌入有助于网络学习性能的提升.

学习偏差类方法可视为一种基于多目标优化思想的数据驱动方法,通过在训练过程中引入含有物理信息的损失函数实现对网络优化方向的限制,进而提升神经网络的学习能力.在学习偏差类方法中,含有物理信息的损失函数一般被称为软约束. Raissi 等提出的物理信息神经网络 (physics-informed neural network, PINN)<sup>[13]</sup> 是此类型方法的代表性工作,该网络使用来自控制方程的残差项构造损失函数,实现将预测结果限制在可行解空间内的目标.类似的,机械系统中遵循的守恒律,如能量守恒定律,动量守恒定律,也可以作为软约束,提升数据驱动方法的建模精度.例如, Hermann 等将 Noether 定理嵌入神经网络中,构造软约束,以此提升了神经网络的学习能力<sup>[14]</sup>. 在 Kasim 等提出的运动常数网络 (constants of motion network, COMET)<sup>[15]</sup> 中,其利用 QR 分解及正则化方法挖掘学习对象所蕴含的运动常数,如物体长度、质量等,并以此构造软约束,提升数据驱动模型的学习能力.

在上述介绍的三类数据驱动方法中,虽然以 LNN 和 HNN 为代表的基于引导偏差的方法建模性能更优,更具应用潜力<sup>[16-20]</sup>,但是,该类型方法仍有明显不足,主要表现为对二自由度及以上的机械系统动力学行为的预测精度较低.由 LNN 发展而来的 LGNN,尝试通过嵌入系统的拓扑关系提升

建模精度.虽然测试结果显示 LGNN 的建模精度有了显著提升,但由于该方法需要借助精确测量的几何约束,实现拓扑关系的嵌入,这大大降低方法的通用性.另外,相较 LNN 建模所使用物体姿态角, LGNN 建模所采用物体的笛卡尔坐标存在以下缺点:(1) 需要测量的信息量大且精确测量难度大;(2) 建模过程需要引入约束方程,增加了计算复杂度.

为克服当前建模方法的不足,本文针对平面铰接多刚体数据驱动建模,提出了一种新的神经网络,其被命名为拓扑拉格朗日神经网络(topological Lagrangian neural network, TLNN).与 LGNNs 不同, TLNN 仍采用物体的绝对姿态角进行数据驱动建模,并利用神经网络的微分运算实现系统拓扑关系的嵌入.由于嵌入过程无需任何需要测量的先验信息,因此 TLNN 相较 LGNNs 具有更好的通用性.另外,本文对数据驱动建模蕴含的广义坐标选择问题进行了研究.

## 1 拓扑拉格朗日神经网络

针对基于数据驱动的平面铰接多刚体系统动力学建模问题,本文在拉格朗日神经网络(LNN)基础之上提出了一种改进的数据驱动建模方法—拓扑拉格朗日神经网络方法(TLNN).相较 LNN, TLNN 最大的不同是利用神经网络的自动微分机制实现了多体系统拓扑信息的嵌入,提升了动力学建模能力.为更清晰地介绍 TLNN 的网络结构,本节首先简要回顾了拉格朗日神经网络,然后再详细介绍 TLNN 的网络细节.

### 1.1 拉格朗日神经网络回顾

拉格朗日神经网络是一种基于物理信息的数据驱动的动力学建模方法,其在建模准确性、训练速度等方面均优于纯数据驱动的建模方法.如图1所示, LNN 由能量转化层和微分层两部组成,其中能量转化层为一个多层感知器(multilayer perceptron, MLP),它的输入为物理系统的广义坐标  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in \mathbf{R}^n$  和广义速度  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T \in \mathbf{R}^n$ , 输出为系统拉格朗日量的估计  $\hat{L}$ . 微分层的输入是  $\hat{L}$ , 利用神经网络的自动微分功能建立第二类拉格朗日方程, 进而获得对系统广义加速的估计  $\hat{\ddot{\mathbf{q}}}$ .

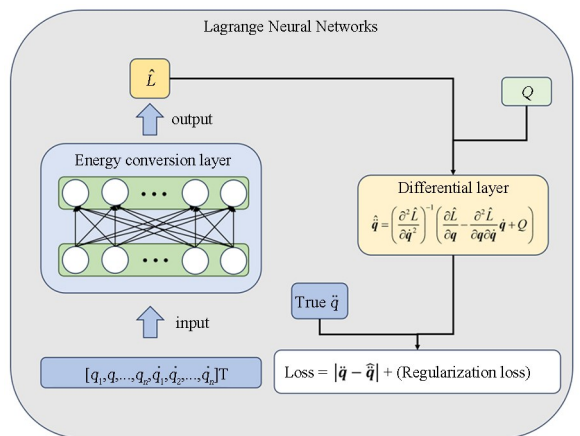


图1 LNN 的结构  
Fig. 1 The Structure of LNN

估计加速度  $\ddot{\mathbf{q}}$  的计算过程如下:根据第二类拉格朗日方程,可得

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (1)$$

其中,  $L = T - V$ ,  $T$  为系统总动能,  $V$  为系统总势能,  $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^n$  为广义力向量.

展开式(1),可得

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{Q} \quad (2)$$

其中,

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2} \quad (3)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{q} \partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} \quad (4)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{M}$  是广义质量矩阵,  $\mathbf{h}$  是与广义速度有关的广义惯性力,  $\mathbf{f}$  是广义重力. 公式(2)为系统的动力学方程.

公式(2)等式两端同乘广义质量阵的逆矩阵,可得

$$\ddot{\mathbf{q}} = \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2} \right)^{-1} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{q} \partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q} \right) \quad (6)$$

将公式(6)中的  $L$  替换为对其的估计  $\hat{L}$ , 便可获得对系统广义加速的估计  $\hat{\ddot{\mathbf{q}}}$ , 其表达式为:

$$\hat{\ddot{\mathbf{q}}} = \left( \frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2} \right)^{-1} \left( \frac{\partial \hat{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial \mathbf{q} \partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q} \right) \quad (7)$$

如图1所示, LNN 的损失函数为:

$$\text{Loss} = |\hat{\ddot{\mathbf{q}}} - \ddot{\mathbf{q}}| + \text{Regularization loss} \quad (8)$$

其中, Regularization loss 为对多层感知器(MLP)权重参数的欧几里得范数,防止模型过拟合.

## 1.2 拓扑拉格朗日神经网络 (TLNN)

LNN 虽然具有远超传统纯数据驱动方法的建模能力,但其建模精度仍有很大的提升空间.引入更多的先验物理信息是提升其建模精度的有效途径之一. LGNN 是 LNN 的重要改进形式之一,其设计者利用图神经网络的特殊结构完成了拓扑信息的嵌入,有效提升了神经网络代理模型对系统动力学行为的预测能力.这一研究表明,拓扑信息的嵌入对提升数据驱动方法的建模能力确实是十分有帮助的.尽管如此, LGNN 也有一些不足.例如,在 LGNN 中,拓扑信息的嵌入需要引入几何测量信息.如果在几何信息测量信息不准确的情况下,拓扑信息的嵌入势必将起到反效果.如何在引入几何测量信息条件下,实现系统拓扑信息的嵌入是一个值得深入探讨的问题.

在本文的研究中,我们在 LNN 基础之上,设计了一种新的拓扑信息嵌入机制.本文将含有这种新机制的网络命名为拓扑拉格朗日神经网络,该网络的框架如图 2 所示.观察图 2 可知,TLNN 由正余弦层、能量转换层与微分层构成.正余弦层的作用在于当网络输入的变量为广义坐标的角度信息时,该层将会对输入信息进行坐标变换,因为在平面铰接多刚体动力学系统的动能和势能表达式中,广义坐标  $\mathbf{q}$  都以正余弦的形式存在,所以将广义坐标经过正余弦变换可以帮助神经网络的学习,可以获得精度更高的代理模型,具体操作如下:

$$\mathbf{q} \Rightarrow [\sin \mathbf{q}, \cos \mathbf{q}] \quad (9)$$

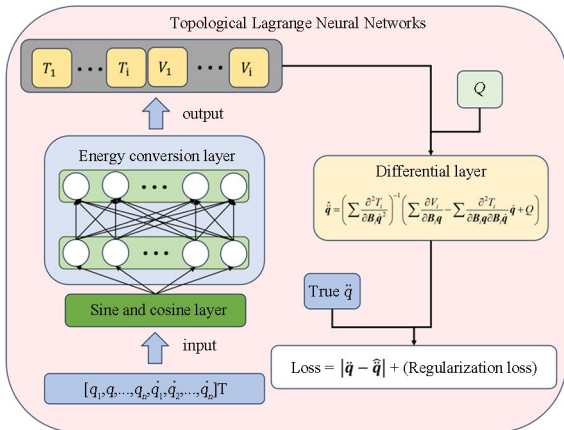


图 2 TLNN 的结构

Fig. 2 The Structure of TLNN

与 LNN 不同,经过正余弦层变换后,TLNN 中能量转化层的输入将包含广义坐标的正余弦  $\sin\_cos\_q = [\sin(q_1), \cos(q_1), \sin(q_2), \cos(q_2), \dots, \sin(q_n), \cos(q_n)]^T \in \mathbf{R}^n$  和广义速度  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T$ .

与 LNN 的能量转换层相比,TLNN 中的能量转化层不直接估计系统的拉格朗日量,而是变为估计系统中每个物体的动能和势能.这有助于微分层利用自动微分操作实现系统拓扑信息的嵌入.下面,将对 TLNN 微分层的具体运算进行介绍.

根据拉格朗日量的定义,可得

$$L = \sum T_i - \sum V_i \quad (10)$$

将上式代入公式(1),可得

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \sum T_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \sum V_i}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (11)$$

上式经进一步简化,可得

$$\sum \frac{\partial^2 T_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2} \ddot{\mathbf{q}} + \sum \frac{\partial^2 T_i}{\partial \mathbf{q} \partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} - \sum \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (12)$$

由于  $T_i$  和  $V_i$  只与系统中部分状态信息有关,因此上式中求偏导运算可只对有关联信息进行操作,对于无关的状态信息可直接取 0.如果令系统中每个物体的拓扑关系向量为  $\mathbf{B}_i$ ,其中拓扑关系向量  $\mathbf{B}_i$  为先验知识,根据动力学系统中已知的刚体数量,刚体与刚体之间的相对关系及邻接关系直接获得,其表达式为:

$$\mathbf{B}_i = [\gamma_i^1, \dots, \gamma_i^n]^T \quad (13)$$

其中,

$$\gamma_i^j = \begin{cases} 1, & \text{如果 } T_i \text{ 与 } q_j \text{ 有关} \\ 0, & \text{如果 } T_i \text{ 与 } q_j \text{ 无关} \end{cases} \quad j = 1, \dots, n \quad (14)$$

引入  $\mathbf{B}_i$  后,公式(12)可改写为:

$$\sum \frac{\partial^2 T_i}{\partial (\mathbf{B}_i \odot \dot{\mathbf{q}})^2} \ddot{\mathbf{q}} + \sum \frac{\partial^2 T_i}{\partial (\mathbf{B}_i \odot \dot{\mathbf{q}}) \partial (\mathbf{B}_i \odot \dot{\mathbf{q}})} \dot{\mathbf{q}} + \sum \frac{\partial T_i}{\partial (\mathbf{B}_i \odot \mathbf{q})} - \sum \frac{\partial V_i}{\partial (\mathbf{B}_i \odot \mathbf{q})} = \mathbf{Q} \quad (15)$$

式中,运算符号“ $\odot$ ”代表向量或矩阵之间的对应位置元素相乘即 Hadamard 积.

上式经进一步变换,可得

$$\ddot{\mathbf{q}} = \left[ \sum \frac{\partial^2 T_i}{\partial (\mathbf{B}_i \odot \dot{\mathbf{q}})^2} \right]^{-2} \left[ \mathbf{Q} - \sum \frac{\partial T_i}{\partial (\mathbf{B}_i \odot \dot{\mathbf{q}})} \right] +$$



$$\left[ \sum \frac{\partial V_i}{\partial (\mathbf{B}_i \odot \mathbf{q})} - \sum \frac{\partial^2 T_i}{\partial (\mathbf{B}_i \odot \mathbf{q}) \partial (\mathbf{B}_i \odot \dot{\mathbf{q}})} \dot{\mathbf{q}} \right] \quad (16)$$

将能量转化层对系统中每个物体动能的估计  $\hat{T}_i$  和势能的估计  $\hat{V}_i$  代入公式(16), 可得 TLNN 对系统广义加速度的估计  $\hat{\ddot{\mathbf{q}}}$ .

观察上述的计算过程可知, TLNN 利用拓扑关系向量为  $\mathbf{B}_i$  实现了系统拓扑信息的嵌入. 由于  $\mathbf{B}_i$  无需测量, 因此不会将测量误差代入的数据驱动建模过程中, 影响建模精度. 本文的第2节将会对 TLNN 的性能进行全面评估.

## 2 仿真实验与结果

本节将使用 TLNN、LNN、HNN 和 NODE 四种数据驱动方法建立多种平面铰接多刚体系统的动力学代理模型, 通过比较代理模型的精度, 验证 TLNN 方法性能的优越性.

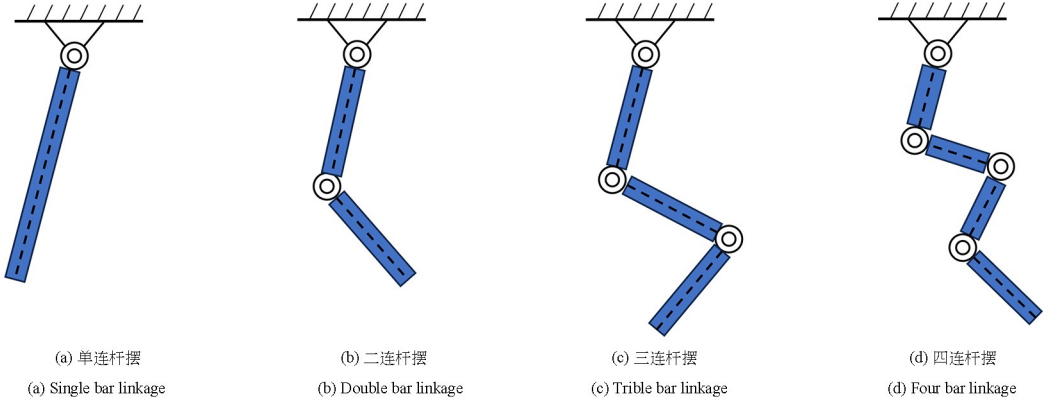


图3 平面铰接多刚体系统  
Fig. 3 Planar hinged multi-rigid body system

### 2.2 TLNN 建模性能评估

使用2.1节生成的数据集进行训练, 我们可以获得图3所列系统的动力学代理模型. 本文将分别使用代理模型与数学模型进行数值仿真, 通过比较仿真结果的差异, 检验代理模型的精度, 评估不同数据驱动方法的建模能力. 在评估环节, 每个代理模型与其对应的数学模型都会进行100次数值仿真, 这些仿真的初始条件是随机选择的, 且包含在训练集和测试集中. 每次数值仿真生成的关节轨迹曲线时长为10 s, 采样频率为100 Hz. 为便于讨论分析, 令基于代理模型生成的轨迹曲线为预测曲线, 基于数学模型生成的轨迹曲线为真实曲线. 定义每次数值仿真中代理模型预测误差为:

### 2.1 仿真实验设置

本章将以图3中的平面铰接多刚体系统为对象, 使用 Matlab 构建平面铰接多刚体系统的动力学方程, 再利用数值仿真生成数据驱动建模所需的数据集. 数据集生成过程如下: 首先, 对于每一个对象, 随机选择250组初始条件. 初始条件包括系统运动状态  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  和广义外力  $\mathbf{Q}$ . 然后, 利用数值积分获得系统状态在100 s内的变化, 并以25 Hz的频率进行采样, 生成由50万个数据组成的数据集. 训练过程, 该数据按7:3的比例划分训练集和测试集, 训练集包含35万个数据, 测试集包含15万个数据. 本研究所采用的硬件与软件配置如下: 硬件配置: 64 GiB 系统内存, Intel(R) Core(TM) i9-14 900K CPU @ 5.60 GHz, Nvidia Geforce 4080 GPU; 软件配置: Python-3.11.8, jax-0.2.24, jaxlib-0.1.73, Cuda-12.1, Cudnn-9.0.

$$E(t) = \frac{\|\hat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{z}(t)\|_2}{\|\mathbf{z}(t)\|_2} \quad (17)$$

其中,  $\hat{\mathbf{z}}(t) = [\hat{\mathbf{q}}(t); \hat{\dot{\mathbf{q}}}(t)]$  为采样点的估计值,  $\mathbf{z}(t) = [\mathbf{q}(t); \dot{\mathbf{q}}(t)]$  为采样点的真实值. 本文采用100次数值仿真获得的代理模型预测误差的中位数曲线、95%置信区间曲线、5%置信区间曲线表征代理模型的精度.

如图4所示, 本文绘制了四种代理模型在100次数值仿真中预测误差的中位数时历曲线, 阴影区域为预测误差的95%置信区间到5%置信区间. 由图4可知, 随着系统自由度的增加, 四种代理模型的预测误差均呈现上升趋势. 对于相同的动力学系统而言, TLNN 方法训练得到的代理模型预测误差最小, 精度最高, 显著优于其他三种代理模型.

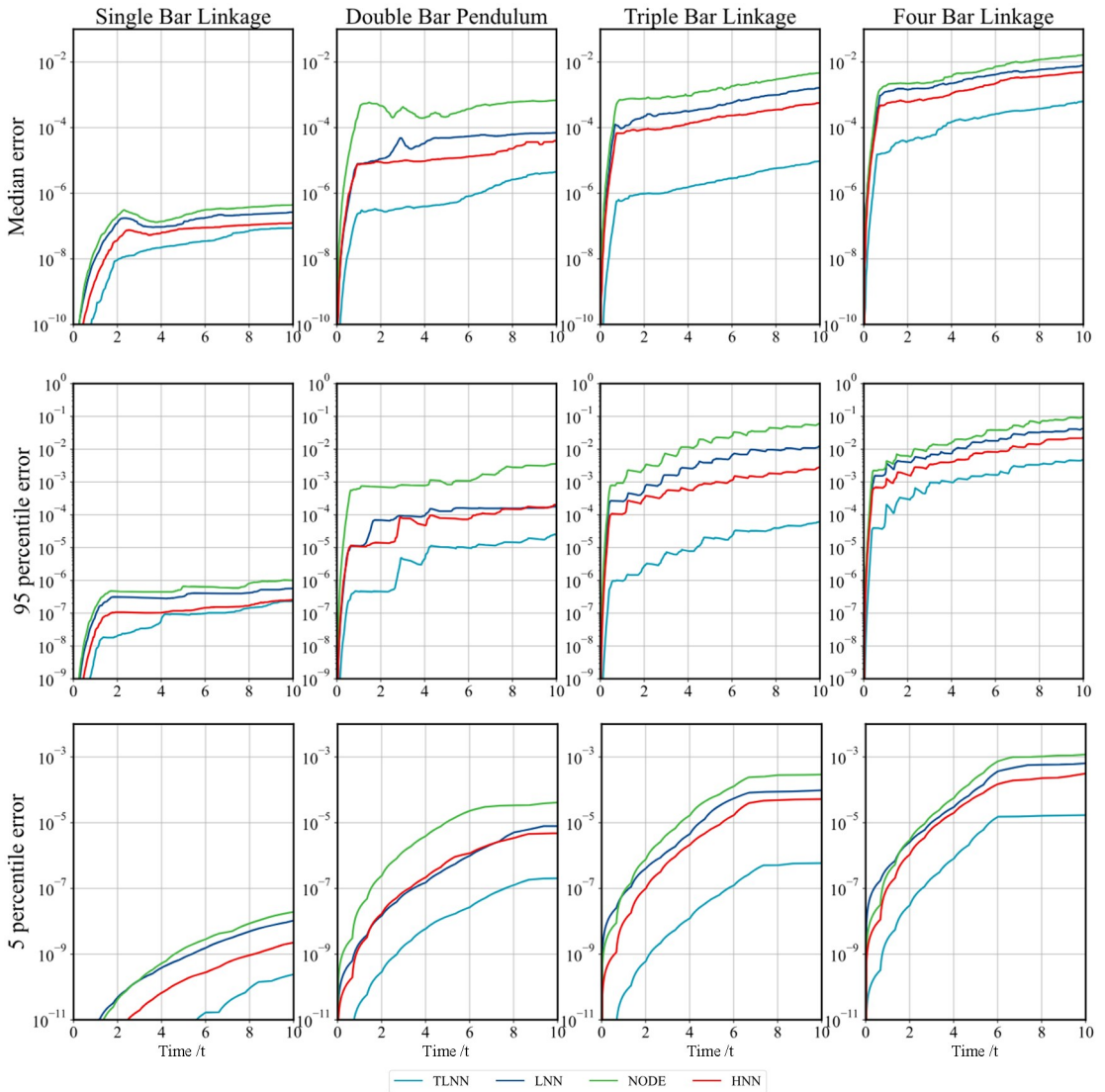


图4 100组  $E(t)$  中位数的相对误差时历曲线  
Fig. 4 The rollout error time curve of 100 groups of  $E(t)$  median

本文针对如图5所示的四连杆系统,使用了不同的数据驱动方法对四连杆系统建立了代理模型并且在未学习过的初始条件下对其进行仿真.其中仿真实验的系统状态初值为  $[\theta, \dot{\theta}] = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4; \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4] = [-2.06, -0.08, 0.12, -0.36; -0.14, 0.017, -0.019, 0.095]^T$ . 其中,  $\theta$  表示四连杆中各刚体的广义角度,单位为 rad,  $\dot{\theta}$  表示四连杆中各刚体的广义角速度,单位为 rad/s. 关节驱动力阵为  $Q = [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4] = [0.05, 0.05, 0.05, 0.05]^T$ ,  $Q$  表示为四连杆中各刚体关节上的广义力,单位为 N/m.

仿真结果如图6所示,基于 TLNN 的代理模型可以更为准确预测关节角度的变化. 相较基于 TLNN 的代理模型,基于另外三种方法的代理模型只能进行短期预测. 当预测时间操作5s后,预测

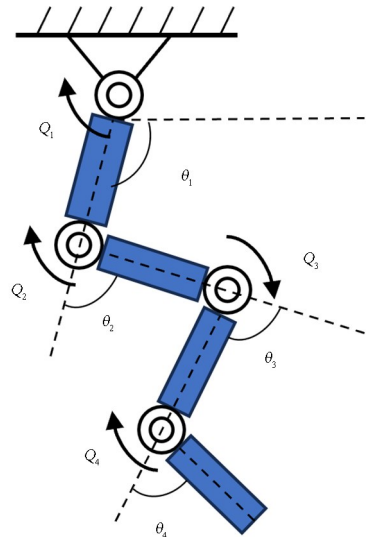


图5 四连杆系统示意图  
Fig. 5 Diagram of the four bar linkage system

结果与真实值开始出现明显偏差,且偏差随着时间的增加而增大。

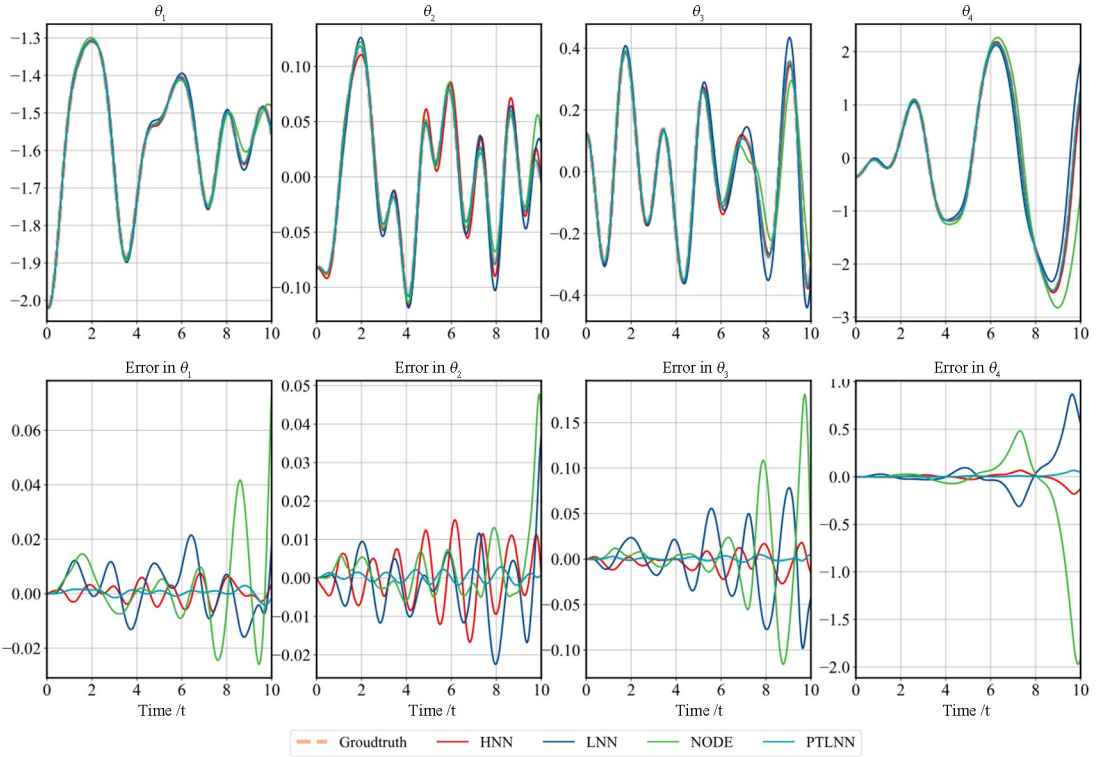


图 6 四连杆系统关节角度预测时程曲线和误差曲线  
Fig. 6 Time curve and error curve of each joint angle prediction for four bar linkage system

### 3 不同广义坐标的选择和讨论

拉格朗日力学对广义坐标的选择是多样的,没有明确的限制.不同的坐标选择虽然会造成动力模型的数学表达式存在区别,但不会影响模型的准确性.因此,研究人员可以根据习惯和研究对象的特点选择不同的广义坐标进行建模.以平面铰接多刚体系统为例,建模时常采用的广义坐标包括:物体质心的笛卡尔坐标、铰接关节坐标、物体绝对姿态角等.然而,我们的研究表明,相较传统建模方法,数据驱动建模方法并不具备该特点.以本文的研究对象,四种平面铰接多刚体为例,如果系统的广义坐标由刚体的绝对姿态角变为关节角度(如图 7 所示),那么数据驱动代理模型的训练误差和预测误差将明显提高.我们在使用神经网络进行训练时保存了每一轮训练的训练损失,训练结果和预测性能对比展示结果如图 8 所示.在两组不同的训练结果曲线中可以发现,在平面铰接多刚体系统下,使用关节角度为广义坐标表示的动力学方程相对于使用刚体的绝对姿态角表示的动力学方程更容易训练且训练损失的收敛值更低.

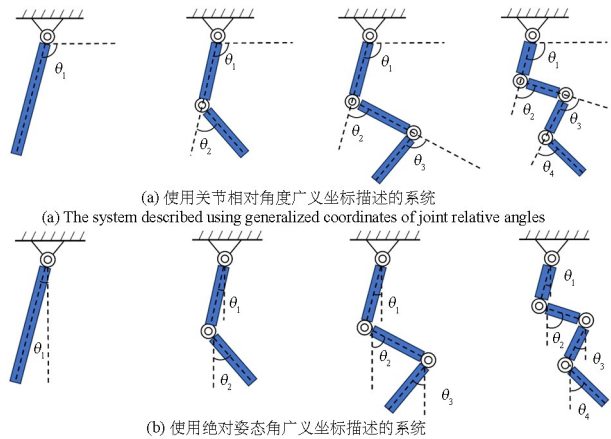


图 7 两种不同广义坐标表示的系统  
Fig. 7 Two different generalized coordinate representation systems

从图 8 展示的结果可以看出,基于不同广义坐标建立的数据代理模型在预测精度和训练精度上是有明显差异的.经过研究,认为导致这一现象的主要原因是代理模型所学习的动力学模型数学表达式存在明显的差异.以二连杆为例(如图 9 所示),分别采用刚体绝对姿态角和关角度为广义坐标,系统的动能表达式分别为:

$$T_{abs} = (J_1 \dot{q}_1^2 + J_2 \dot{q}_2^2)/2 + (m_1 l_1^2 \dot{q}_1^2)/8 + [m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2)]/2 \quad (18)$$

$$T_{rel} = [J_1 \dot{q}_1^2 + J_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 / 2 + (m_1 l_1^2 \dot{q}_1^2) / 8 + [m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2)] / 2] / 2 \quad (19)$$

$$V_{abs} = -3m_1 g l_1 \cos(q_1) / 2 - m_2 g l_2 \cos(q_2) / 2 \quad (20)$$

$$V_{rel} = -3m_1 g l_1 \cos(q_1) / 2 - m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2) / 2 \quad (21)$$

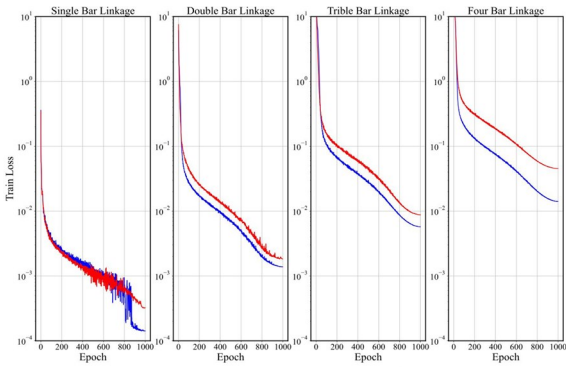
其中,  $g$  为重力加速度,  $m_1, m_2$  分别为两杆件的质量,  $l_1, l_2$  分别为两杆件的长度,  $J_1, J_2$  分别为两杆件的转动惯量, 广义坐标  $q = [q_1, q_2]^T$  和广义速度

$\dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2]^T$ ,  $T_{abs}, V_{abs}$  分别为刚体绝对角度法下的系统动能和势能,  $T_{rel}, V_{rel}$  分别为关节相对角度法下的系统动能和势能. 观察式(18)~(21)可以发现, 基于绝对姿态角的动能表达式和势能表达式更为简单. 从机器学习的角度来看, 更简单的表达式意味着更低的学习成本. 在网络结构、网络参数相同的情况下, 学习对象简单无疑意味着代理模型具有更高的精度.

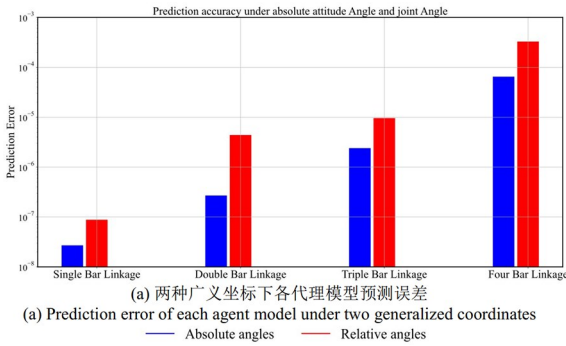
## 4 结论与展望

本文对基于数据驱动的平面铰接多刚体系统动力学建模问题进行研究, 并在 LNN 方法基础之上提出了一种改进的数据驱动建模方法—拓扑拉格朗日神经网络(TLNN). 相较已有数据驱动建模方法, TLNN 可以更好地从数据中挖掘出系统的动力学特征. 因此, 由其训练的动力学代理模型拥有更高的精度. 数值仿真结果验证了这一点. 另外, 本文通过研究发现: 广义坐标的选择对动力学代理模型精度有很大影响. 仿真结果显示: 如果广义坐标对应的动力学模型拥有更简单的数学表示式, 那么其对应的数据驱动代理模型将会有更高的精度.

由于当前数据驱动方法实现动力学建模仍局限在一些简单的理想算例下, 且学习得到的动力学方程仍有局限, 当系统中物理参数发生变化时则需重新学习模型. 在今后的工作中, 数据驱动的动力学建模方法可以结合迁移学习等方法, 并结合视觉测量采集真实世界中的物理模型数据并实时或离线地学习真实的物理模型并预测.



(a) 两种广义坐标下各算例训练损失变化  
(a) Training loss changes of each example under two generalized coordinates



(a) 两种广义坐标下各代理模型预测误差  
(a) Prediction error of each agent model under two generalized coordinates  
— Absolute angles — Relative angles

图8 数据驱动代理模型的训练误差和预测误差

Fig. 8 Train loss and prediction error of data-driven agent model

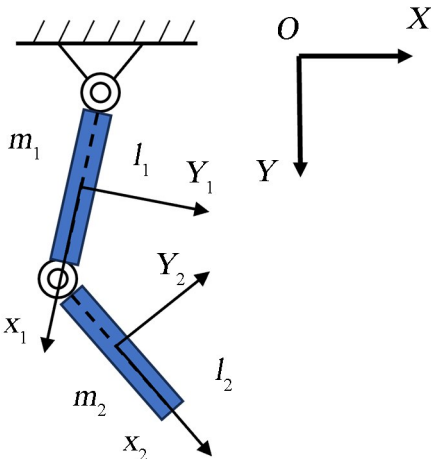


图9 平面二连杆系统

Fig. 9 Planar double bar linkage

## 参考文献

- [1] SENGUPTA A, YE Y T, WANG R, et al. Going deeper in spiking neural networks; VGG and residual architectures [J]. *Frontiers in Neuroscience*, 2019, 13: 95.
- [2] BAEVSKI A, ZHOU Y H, MOHAMED A, et al. wav2vec 2. 0: A framework for self-supervised learning of speech representations [C]//34th Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS 2020). Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2020.
- [3] Goldberg, Y. *Neural network methods for natural language processing* [M]. Cham, Switzerland: Springer, 2017.



- [4] KARNIADAKIS G E, KEVREKIDIS I G, LU L, et al. Physics-informed machine learning [J]. *Nature Reviews Physics*, 2021, 3(6): 422–440.
- [5] MENG C Z, SEO S, CAO D F, et al. When physics meets machine learning: a survey of physics-informed machine learning [EB/OL]. 2022; arXiv: 2203.16797. <http://arxiv.org/abs/2203.16797>.
- [6] BISHNOI S, BHATTOO R, JAYADEVA, et al. Discovering symbolic laws directly from trajectories with Hamiltonian graph neural networks [EB/OL]. 2023; arXiv: 2307.05299. <http://arxiv.org/abs/2307.05299>.
- [7] SANCHEZ-GONZALEZ A, GODWIN J, PFAFF T, et al. Learning to simulate complex physics with graph networks [EB/OL]. 2020; arXiv: 2002.09405. <http://arxiv.org/abs/2002.09405>.
- [8] RAISSI M, YAZDANI A, KARNIADAKIS G E. Hidden fluid mechanics: learning velocity and pressure fields from flow visualizations [J]. *Science*, 2020, 367(6481): 1026–1030.
- [9] GREYDANUS S, DZAMBA M, YOSINSKI J. Hamiltonian neural networks [C]// 33rd Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS 2019). Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2019.
- [10] CRANMER M, GREYDANUS S, HOYER S, et al. Lagrangian neural networks [EB/OL]. 2020; arXiv: 2003.04630. <http://arxiv.org/abs/2003.04630>.
- [11] FINZI M, WANG K A, WILSON A G. Simplifying Hamiltonian and Lagrangian neural networks via explicit constraints [EB/OL]. 2020; arXiv: 2010.13581. <http://arxiv.org/abs/2010.13581>.
- [12] BHATTOO R, RANU S, ANOOP KRISHNAN N M. Learning the dynamics of particle-based systems with Lagrangian graph neural networks [J]. *Machine Learning: Science and Technology*, 2023, 4(1): 015003.
- [13] RAISSI M, PERDIKARIS P, KARNIADAKIS G E. Physics-informed neural networks: a deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2019, 378: 686–707.
- [14] MÜLLER E H. Exact conservation laws for neural network integrators of dynamical systems [EB/OL]. 2022; arXiv: 2209.11661. <http://arxiv.org/abs/2209.11661>.
- [15] KASIM M F, LIM Y H. Constants of motion network [EB/OL]. 2022; arXiv: 2208.10387. <http://arxiv.org/abs/2208.10387>.
- [16] TRIPURA T, CHAKRABORTY S. Discovering interpretable Lagrangian of dynamical systems from data [EB/OL]. 2023; arXiv: 2302.04400. <http://arxiv.org/abs/2302.04400>.
- [17] DAEMS R, TAETS J, WYFFELS F, et al. KeyCLD: learning constrained Lagrangian dynamics in keypoint coordinates from images [EB/OL]. 2022; arXiv: 2206.11030. <http://arxiv.org/abs/2206.11030>.
- [18] DESAI S A, MATTHEAKIS M, SONDAK D, et al. Port-Hamiltonian neural networks for learning explicit time-dependent dynamical systems [J]. *Physical Review E*, 2021, 104(3): 034312.
- [19] MILLER S T, LINDNER J F, CHOUDHARY A, et al. Mastering high-dimensional dynamics with Hamiltonian neural networks [EB/OL]. 2020; arXiv: 2008.04214. <http://arxiv.org/abs/2008.04214>.
- [20] NEARY C, TOPCU U. Compositional learning of dynamical system models using port-hamiltonian neural networks [EB/OL]. 2022; arXiv: 2212.00893. <http://arxiv.org/abs/2212.00893>.