

微型双稳态板压电俘能器的仿真研究*

陈丽华^{1,2†} 景浩^{1,2} 陈坦^{1,2} 张伟^{1,2} 常力琦^{1,2} 杨凤红³

(1.北京工业大学 机电学院,北京 100124) (2.机械结构非线性振动与强度北京市重点实验室,北京 100124)

(3.中央财经大学 统计与数学学院,北京 100081)

摘要 基于中间固定、四边自由的微型压电层合板模型,应用应变梯度理论考虑其尺寸效应,借助 ABAQUS 用户自定义子程序(UEL)模块自定义了一种三维八节点的微型压电单元.利用有限元法热-力-电耦合分析对微型双稳态板压电俘能器进行了仿真研究,发现其在不同的激振频率下存在不同的变形状态,非线性动态分析显示该结构在其一阶固有频率之前也能俘获较多电能,且存在多态转换交替出现的现象.针对该微型双稳态压电俘能器,给出了其最佳的工作频率和最大俘获电压.研究成果对微型压电俘能器的设计分析和性能检测具有重要的指导意义.

关键词 微型压电俘能器, 尺寸效应, 应变梯度, UEL, 双稳态

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-012

引言

传统能源如石油、天然气、煤炭等不可再生能源的过量使用对人们赖以生存的环境造成了不可恢复的破坏,新能源的开发和新型材料的利用得到了世界各国的重视.压电俘能器是通过吸收周围的振动来将机械能量转化为电能的装置.双稳态结构具有两个稳定的平衡状态,当系统在温度、外激力等特定的外界因素作用下,两个稳定的状态可以相互转换.双稳态结构这种独一无二的非线性特性常被用在压电俘能器上,以增大其俘能频宽,双稳态板压电俘能器可以在非谐振频率环境下实现宽频振动,提高俘能效率.

2010年,Arrieta等人^[1]把四个压电片非整铺在双稳态压电俘能器上,发现利用稳态之间的跳变行为可以俘获较高的电能.在2012年,Betts等人^[2]提出一种宽频的双稳态压电俘能器结构,研究了长宽比、厚度、铺设方式和压电层面积对俘能效率的影响,并由此得到了最优结构.2013年,Betts等人^[3]将压电层铺设在不均匀的双稳态板上,用实验的方法验证了动态分析结果,实验结果表明,利用双稳态板跳变过程中产生的大变形可以提高压电

俘能器的俘能效率.2016年,A. Syta等人^[5]研究了双稳态压电层合板俘能器的动态响应和俘能效率的关系.

以上文献研究都是针对宏观尺寸的双稳态压电俘能器,而MEMS技术的发展使得微型双稳态压电俘能器得到了广泛的研究.2015年,Prušáková L等人^[7]研究了带ZnO活性层的单悬臂微型压电俘能器,它是通过无线电频率和直流磁控溅射形成的多层系统,产生的最大开路电压为0.975V,输出功率约为20 μ W.2016年,费亚英等人^[8]分析了微型正交铺设的双稳态板发生snap-through行为的规律.研究了板厚,温度和外力等因素对snap-through行为的影响.2017年,陈丽华等人^[10]对带质量块的微型双稳态压电板进行了动力学分析.研究了不同内禀长度和不同压电铺设面积的情况下,温度和电压对其固有频率和稳定性的影响,验证了微型结构考虑尺度效应的必要性.

对于微型结构的研究,不能忽略传统连续介质力学无法解释的尺寸效应.因此传统的宏观理论将不再适用.而应变梯度理论能够引入与材料内部结构的有关的内禀常数,有效解决了微结构的尺度效应问题.20世纪60年代,Toupin^[12],Mindlin^[13]等人

2018-05-07 收到第1稿,2018-10-30 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(11472019,11472315)

† 通讯作者 E-mail: chenlihua@bjut.edu.cn

建立了线弹性偶应力理论. Aifantis 假设屈服应力依赖于塑性应变梯度, 讨论了应变梯度塑性模型的不同模式^[14,15]. 应变梯度理论在微观尺度研究中得到了广泛的应用.

随着有限元分析法在工程上的广泛应用, 研究者们开始借助有限元软件对复杂的压电结构进行分析. 2012年, Ralib 等人^[16], 分析了不同压电材料的俘能效率后, 为探索更加环保的新材料 AZO 在压电俘能器方面的应用, 利用 RF 磁场控制喷涂工艺制作了硅基 AZO 压电板, 并进行了有限元分析, 在响应频率为 7.77MHz 时得到 1.61V 电压. 唐洪祥等人^[17]通过在 ABAQUS 软件中编制三维弹性 cosserat 连续体的 UEL 子程序, 分析了微型悬臂梁自由端的挠度和微杆扭转问题. 2015年, Rezaeisaray 等人^[19]提出了一种低频多自由度的微型压电俘能器结构, 这种新型结构不仅工作频率较低, 而且具有较宽的俘能频响. 并用有限元法对该结构进行了分析.

目前, 基于应变梯度理论的有限元法是解决微纳米结构尺寸效应问题的有效途径之一, 运用有限元法对微型压电俘能器的研究已层出不穷, 但都没有考虑尺寸效应, 基于应变梯度理论的有限元法分析微型压电俘能器的相关文献还未见报道. 因此本文基于 Aifantis 的应变梯度理论, 借助 ABAQUS 的用户自定义子程序 (UEL) 模块自定义了三维八节点的微-压电单元. 利用有限元法对中间固定、四边自由的微型双稳态压电俘能器进行了非线性分析.

1 基于应变梯度理论的微-压电单元的定义

1.1 应变梯度理论的本构关系

广义 Hooke 定律假设每个应力分量与各个应变分量成比例. 对于宏观尺寸的均匀材料, 如经典的线弹性、小变形、各向同性弹性体. 其本构关系满足广义 Hooke 定律, 其张量形式可以表示为:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (1)$$

式中, σ_{ij} 为应力分量; C_{ijkl} 为弹性常数; ε_{kl} 为应变分量.

常用的大型有限元仿真软件 ABAQUS、ANSYS 内置本构方程均为宏观尺寸下的本构方程, 此外, 对于各项同性的线弹性材料, 该本构关系用矩阵形式可表示为:

$$\sigma = C\varepsilon \quad (2)$$

其中, σ, C, ε 的矩阵形式为

$$\sigma^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]$$

$$\varepsilon^T = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]$$

$$C = D_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{对} & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ \text{称} & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中, $D_0 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-\nu)}$; E 为弹性模量; ν 为泊松比.

微纳米结构已具有明显的尺寸效应, 应变梯度理论是一种能够解释微型结构力学性能尺寸效应的有效理论之一. 因此要解决有限元软件对于微型结构计算精度低的难题, 可以借助 ABAQUS 的二次开发功能, 在宏观本构方程的基础上加上应变梯度项. 迄今发展的大部分应变梯度理论都是二阶梯度理论, 其中 Aifantis 的应变梯度理论是通过增强的能量泛函得到, 能避免应变域的奇异性, 且仅含有 1 个细观材料参数, 是较简单的一种应变梯度理论, 具有较强的代表性和稳定性, 便于应用. Aifantis 用这种理论成功解释了有限应变的变形局部化问题、扭转和弯曲问题中的尺寸效应. 引入应变梯度理论后的本构关系为:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - l^2 \nabla^2 \varepsilon_{kl}) \quad (4)$$

式中, C_{ijkl} 为宏观理论的弹性常数; l 为材料长度参数, 它是材料细观结构长度的度量; ∇^2 为拉普拉斯算子.

1.2 微压电单元的定义

本部分针对三维八节点压电单元, 介绍引入应变梯度理论后的本构方程的有限元实现, Aifantis 的应变梯度本构关系可展开为:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - l^2 C_{ijkl} \nabla^2 \varepsilon_{kl} \quad (5)$$

(5) 式可进一步展开为:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - l^2 C_{ijkl} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial y \partial z} + 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial z \partial x} \right) \quad (6)$$

式中, C_{ijkl} 为经典理论的弹性常数; ε_{kl} 为应变张量分

量; l 为内禀长度系数。

将(6)式简化为矩阵表达形式,同时考虑热和电效应,因此微-压电单元的本构关系可以表示为:

$$\bar{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - l^2 \mathbf{C} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial y \partial z} + 2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial z \partial x} \right) + \mathbf{A} \cdot \Delta T + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (7)$$

式中, \mathbf{C} 为弹性矩阵, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变矩阵, \mathbf{A} 为热膨胀系数, ΔT 为温差, \mathbf{D} 为压电常数, \mathbf{E} 为电场强度。

(7)式为微-压电单元本构关系的矩阵表达形式,式中第一项是基于连续介质力学建立的本构关系;第二项为考虑尺寸效应的应变梯度理论,当内禀长度系数 $l \neq 0$ 时,可有效地解释微型结构的尺寸效应;第三项为温度项,第四项为压电项。

针对该三维八节点单元,即六面体单元,利用一次拉格朗日多项式,并引入三个局部坐标 ξ, η, ζ ($-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$),因此三维八节点单元的形函数可构造为:

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_i) (1 + \eta_i) (1 + \zeta_i) \quad (8)$$

式中,

$$\begin{aligned} \xi_i &= \xi_i \xi \\ \eta_i &= \eta_i \eta \\ \zeta_i &= \zeta_i \zeta \end{aligned} \quad (9)$$

其中, ξ_i, η_i, ζ_i 表示第 i 个节点的局部坐标值, ξ, η, ζ 表示单元内任意一点的局部坐标。

三维八节点单元共有 8 个形函数,进一步展开为:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta) \\ N_2 &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta) \\ N_3 &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta) \\ N_4 &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta) \\ N_5 &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta) \\ N_6 &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta) \\ N_7 &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta) \\ N_8 &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta) \end{aligned} \quad (10)$$

图 1 是三维八节点单元局部坐标和整体坐标的变换图,如图 1 所示: (x, y, z) 为整体坐标, (ξ, η, ζ) 为单元局部坐标,在有限元理论中,雅克比矩阵是联系整体坐标和局部坐标转换的重要纽带。本部分利用有限元法中的等参变换、雅克比矩阵等方法来说明形函数对整体坐标与形函数对局部坐标之间的转换。

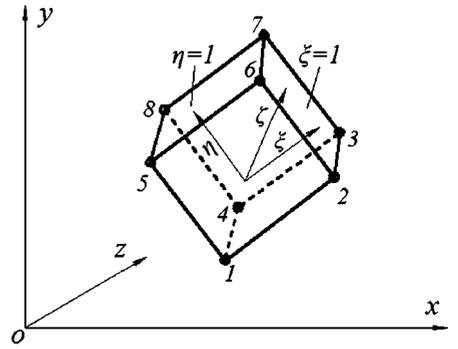


图 1 三维八节点单元局部坐标和整体坐标
Fig.1 Local coordinates and global coordinates

形函数对局部坐标的偏导可表示为:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (i = 1 \sim 8) \quad (11)$$

对于另外两个局部坐标(η, ζ),同理可得同样的表达式,写成矩阵形式为:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (i = 1 \sim 8) \quad (12)$$

式中, \mathbf{J} 为雅克比矩阵,即整体坐标对局部坐标的偏导。

对一般形状求解域进行离散,局部坐标和整体坐标的转换关系为:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^8 N_i x_i \\ y &= \sum_{i=1}^8 N_i y_i \quad (i = 1 \sim 8) \\ z &= \sum_{i=1}^8 N_i z_i \end{aligned} \quad (13)$$

式中, x_i, y_i, z_i 为节点在整体坐标内的坐标值, N_i 为用局部坐标表示的形函数。

利用(13)式, \mathbf{J} 可以表示为局部坐标的函数:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{pmatrix} \quad (14)$$

利用 \mathbf{J} 的逆矩阵, 得到形函数对整体坐标与形函数对局部坐标之间的关系为:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (i=1 \sim 8) \quad (15)$$

对于三维八节点实体单元, 每个单元有 8 个节点, 每个节点有 3 个位移分量, 其单元节点位移列阵 $\mathbf{a}^e = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \cdots \quad u_8 \quad v_8 \quad w_8]^T$, 令

$$\bar{\mathbf{N}}_i = \begin{pmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{pmatrix} \quad (i=1 \sim 8) \quad (16)$$

因此, 单元内任意点的位移向量 \mathbf{u} 可表示为:

$$\mathbf{u} = [\bar{\mathbf{N}}_1 \quad \bar{\mathbf{N}}_2 \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{N}}_8] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_8 \end{pmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a}^e \quad (17)$$

弹性体单元在载荷作用下, 双稳态结构会发生大变形, 利用非线性几何方程给出单元内任意点的应变列阵为:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_L \mathbf{a}^e + \mathbf{B}_{NL} \mathbf{a}^e = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}) \cdot \mathbf{a}^e = \mathbf{B} \mathbf{a}^e \quad (18)$$

式中, \mathbf{B} 为宏观理论的应变矩阵, $\mathbf{B}_L, \mathbf{B}_{NL}$ 分别是线性和非线性的应变矩阵.

将 (17~18) 式代入式(7), 同时考虑温度和电效应, 基于应变梯度理论的本构方程可写为:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{a}^e - l^2 \mathbf{C} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{a}^e + \mathbf{A} \cdot \Delta T + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (19)$$

其中,

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y \partial z} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z \partial x} \quad (20)$$

$\tilde{\mathbf{B}}$ 为基于应变梯度理论的应变矩阵.

$\tilde{\mathbf{B}}_i$ 的矩阵形式可表示为:

$$\tilde{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 N_i}{\partial x^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x^2 \partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x^2 \partial z} \\ \frac{\partial^3 N_i}{\partial x^2 \partial y} & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x^2 \partial z} & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x^2 \partial y} \\ \frac{\partial^3 N_i}{\partial x^2 \partial z} & 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x^3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial y^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial y^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial y^2 \partial z} \\ \frac{\partial^3 N_i}{\partial y^3} & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial y^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial y^2 \partial z} & \frac{\partial^3 N_i}{\partial y^3} \\ \frac{\partial^3 N_i}{\partial y^2 \partial z} & 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial y^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 N_i}{\partial x^2 \partial z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial y \partial z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial z^3} \\ \frac{\partial^3 N_i}{\partial y \partial z^2} & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial z^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial z^3} & \frac{\partial^3 N_i}{\partial y \partial z^2} \\ \frac{\partial^3 N_i}{\partial z^3} & 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial z^2} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 N_i}{\partial x^2 \partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial y \partial z} \\ \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial y^2} & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x^2 \partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial y \partial z} & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial y \partial z} & 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x^2 \partial y} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial y \partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial y^2 \partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial y \partial z^2} \\ \frac{\partial^3 N_i}{\partial y^2 \partial z} & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial y \partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial y \partial z^2} & \frac{\partial^3 N_i}{\partial y^2 \partial z} \\ \frac{\partial^3 N_i}{\partial y \partial z^2} & 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial y \partial z} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 N_i}{\partial x^2 \partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial y \partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial z^2} \\ \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial y \partial z} & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x^2 \partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial z^2} & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial y \partial z} \\ \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial z^2} & 0 & \frac{\partial^3 N_i}{\partial x \partial y \partial z} \end{bmatrix} \quad (i=1 \sim 8) \quad (21)$$

以上是基于应变梯度理论的应变矩阵构造过程. 将(21)式代入到自定义微-压电单元的新本构方程(19)中, 再进行单元和整体单元矩阵的整合,

针对微型压电俘能器的自定义微-压电单元构建完毕.得到针对微型双稳态结构的静力和动力学有限元方程为:

$$(K_L + K_{NL}) \cdot a = F \quad (22a)$$

$$M\ddot{a} + (K_L + K_{NL}) \cdot a = F(t) \quad (22b)$$

1.3 用户自定义微-压电单元的调用

ABAQUS 软件平台中为用户提供了自定义单元二次开发的程序接口-用户单元子程序 UEL (user defined element).本部分以 ABAQUS 内置三维八节点单元为基础,建立了新的微-压电单元,以完成对微型压电俘能器的仿真计算.UEL 子程序由 FORTRAN 语言编制,按照有限元公式的推导进行编译,编译完成后由 ABAQUS 的主程序(input 文件)调用.

针对本文研究的微型双稳态板压电俘能器,输入文件(input 文件)的编写需要与微-压电单元的定义对应:

```
* Userelement,
Nodes = 8, type = U1001, properties = 4, coordinates =
3, variables = 96
```

```
1, 2, 3
* Element, type = U1001, elset = ONE
```

```
.....
* Uel property, elset = ONE
2e5, 3e-1, 5e-7, 1.2e-5
* ELEMENT, TYPE = C3D8, ELSET = dummy
```

其中,命令行 * User element 中, type = U1001 为自定义的用户定义单元编号,该命令行用于调用自定义的微-压电单元子程序. Nodes 表示单元节数.定义材料属性、分析类型和边界条件等,部分命令如下:

```
* Dielectric, type = ORTHO
8e-12, 8e-12, 6.6e-12
* Piezoelectric
0., 0., 0., 0, 10.5e-6, 0., 0., 0.
0., 0., 0., 10.5e-6, -4.1e-6, -4.1e-6, -4.1e-6, 0
0., 0.
.....
```

```
* Boundary
Set-1, ENCASTRE
* Boundary
Set-2, 9, 9
```

```
* Step, nlgeom = YES, inc = 200
* Dynamic, direct
0.005, 1., ..... * End Step
```

其中 * Dielectric 是定义介电常数的命令, * Piezoelectric 是定义压电材料压电常数的命令, * Boundary 为边界条件的命令, Set-1, ENCASTRE 代表名为 Set-1 的节点集合六个方向的自由度完全固定, Set-2, 9, 9 是电势边界的命令,代表名为 Set-2 的节点集合的电势为 0, * Step, nlgeom = YES, inc = 200, * Step 为定义分析类型的命令, nlgeom = YES 代表非线性分析, inc = 200 代表整个分析分为 200 步完成, * Dynamic, direct 代表显示动态分析方法, nlgeom = NO 代表线性分析, * End Step 代表分析结束,程序运行结束.

1.4 数值算例验证

为了验证自定义单元的正确性,本文用自定义的微-压电单元做了微型悬臂薄板的静力弯曲问题.图 2 为左端固定,受均布外载荷作用的正方形悬臂薄板力学模型,板上表面作用的均布荷载 q ,板长 $a=b$,板厚为 h ,宽厚比 $a/h=160$,材料的弹性模量 $E=20\text{GPa}$,泊松比 $\mu=0.3$,悬臂板模型离散后共有 882 个节点,400 个单元.

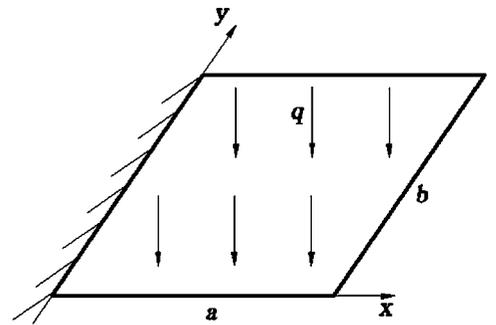


图 2 悬臂薄板模型
Fig.2 Cantilever model

为更好地验证微-压电单元的适用性,不断改变悬臂板的厚度,固定宽厚比,因此,五种厚度代表了悬臂板的五种尺寸,五种悬臂板模型的厚度分别为 $1\mu\text{m}$, $10\mu\text{m}$, $100\mu\text{m}$, 1mm , 10mm , 材料内禀长度 $l=5\times 10^{-7}\text{m}$,分别用 ABAQUS 自带的三维八节点 (C3D8E) 单元和本文自定义开发的微-压电单元对五种尺寸的悬臂板模型进行计算并对比,计算各板在相同均布载荷作用下最右端节点的挠度,如表 1 所示:

表1 两种单元的挠度对比($\times 10^{-4}$ m)Table 1 Comparison of deflection of two elements($\times 10^{-4}$ m)

Thickness	C3D8E	Micro-piezoelectric element	Difference
$h_1 = 1\mu\text{m}$	0.0392	0.0265	32.30%
$h_2 = 10\mu\text{m}$	0.2937	0.2819	4.02%
$h_3 = 100\mu\text{m}$	2.447	2.239	3.19%
$h_4 = 1\text{mm}$	26.43	25.59	3.18%
$h_5 = 10\text{mm}$	254.5	246.4	3.18%

由表1两种单元算法的计算结果对比可以看出:考虑了应变梯度理论的自定义微-压电单元的计算结果小于经典的C3D8E单元。板 h_1 (微型结构)两种单元的差值达到32.30%,此时尺寸效应较为明显,自定义单元的结果更接近于实验的结果^[20],这说明ABAQUS自带单元无法恰当地计算微型结构,所以需要本文中的自定义单元进行微型结构的计算。随着板尺寸的成倍增大,经典C3D8E单元的计算结果与自定义的微-压电单元越来越接近(板 h_4 和板 h_5 的计算结果的数值仅相差3.18%),此时尺寸效应不明显。自定义微-压电单元在微观结构的计算上体现了较好的尺寸效应,在宏观结构的计算上与经典C3D8E单元相近。

2 微型压电俘能器的俘能研究

2.1 微型双稳态压电俘能器的模型

随着机电技术领域朝着微型化方向的根本性变革,微型压电俘能器的设计和研究是必要的。双稳态板的非线性行为,如两个稳态之间的跳变行为,可以引起压电层的大幅振动,常被用在压电俘能器的结构上。

本部分针对中间固定,四边自由的微型双稳态板结构,利用自定义开发的微-压电单元对该结构进行仿真分析,该结构核心部件由基板和压电层组成,基板中间固定于基座上,压电层粘贴在基板中间,结构简图如图3所示。

图3为中间固定、四边自由的微型双稳态板压电俘能器模型。该模型由上下两层构成,上层为压电层,粘贴在基板上,压电层长 $a = b = 96\mu\text{m}$,板厚为 $h = 0.5\mu\text{m}$,压电层材料密度 $\rho_1 = 7500\text{kg}/\text{m}^3$,弹性模量 $E_1 = 1\text{GPa}$,泊松比 $\mu_1 = 0.35$;下层为基层,基层长 $A = B = 200\mu\text{m}$,板厚为 $H = 1\mu\text{m}$,基层材料密度 $\rho_2 = 8900\text{kg}/\text{m}^3$,弹性模量 $E_2 = 10\text{GPa}$,泊松比 $\mu_2 = 0.307$ 。

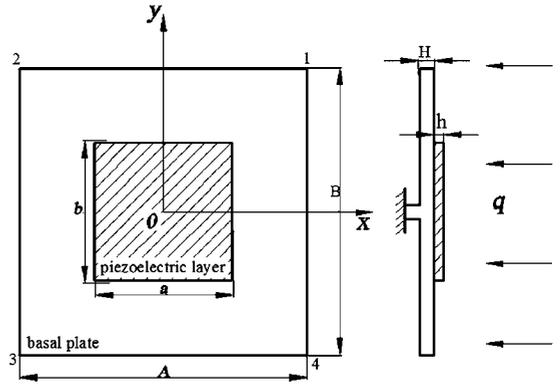


图3 系统模型

Fig.3 The system model

2.2 非线性频宽

当激振频率和压电俘能器的固有频率一致或相近时,由于压电板变形较大,因此,压电俘能器的输出电压较大,通常认为此频率区间是压电俘能器的工作频率。事实上,双稳态压电俘能器由于发生大变形,需要考虑几何非线性,得到的是非线性的动力学方程,所以,在固有频率之前双稳态压电板会出现超谐共振现象,当外激振频率达到俘能器的固有频率的1/3时,也会有电压峰值出现。

压电俘能器在外界振动作用下可俘获能量,其本质是压电板在振动影响下发生变形,把振动能转化为电能,因此,压电板的挠度随激振频率的变化关系是考察压电俘能器俘能效果的重要因素。

利用本文自定义开发的微-压电单元,通过不断改变外激励的频率,对该结构进行非线性动态分析,压电板的挠度与外激振频率的关系如图4所示。

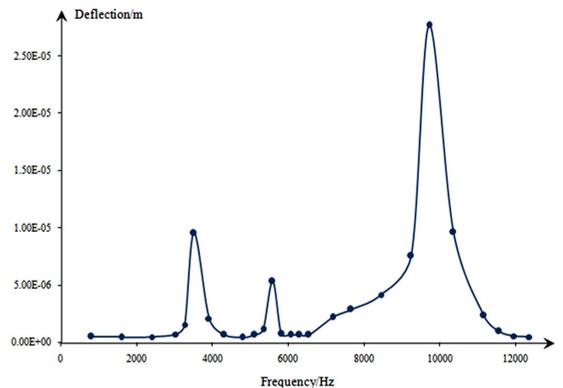


图4 挠度与激振频率之间的关系

Fig.4 Deflection and excitation frequency

图4是利用微-压电单元和有限元法计算所得的非线性动态分析结果绘制的幅频曲线,从图中可以清晰地看到压电板的挠度在压电板固有频率

(9774Hz 附近)处最大,除此之外,由于超谐共振现象的存在,使得压电板在 3500Hz 和 5500Hz 附近也得到了较大的挠度.因此,在微型双稳态板压电俘能器的研究中,要充分考虑超谐共振现象的影响,使俘能器在较低的激励频率下也能俘获较高的电压能量.

2.3 多态现象

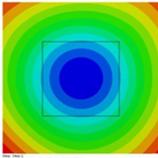
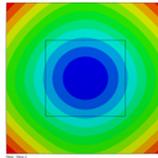
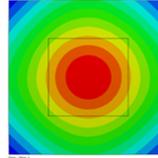
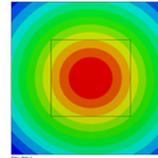
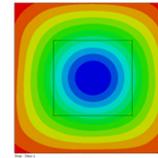
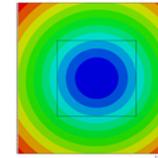
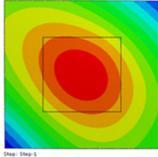
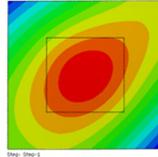
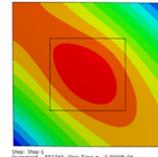
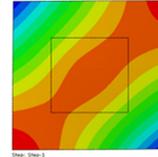
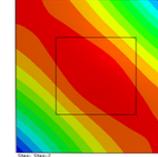
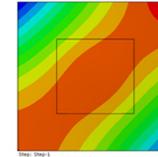
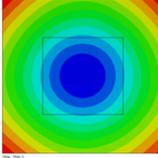
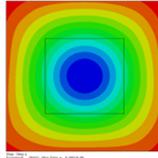
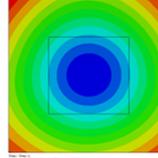
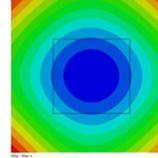
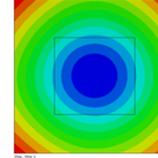
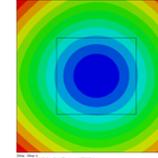
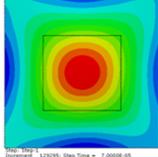
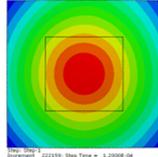
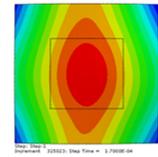
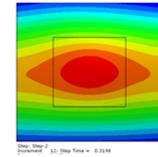
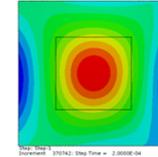
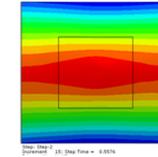
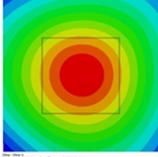
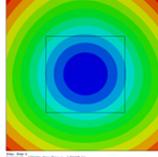
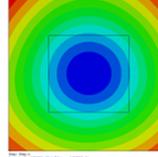
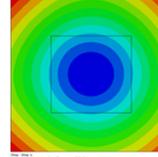
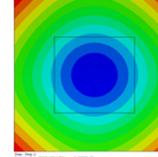
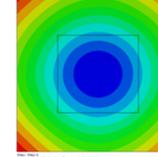
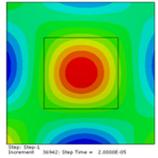
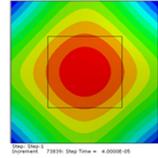
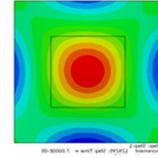
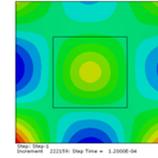
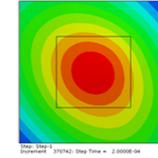
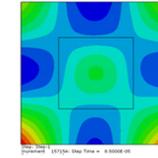
图 4 的挠度曲线表明,微型双稳态压电俘能器在一阶固有频率前的挠度(包括一阶固有频率)共有三个波峰,研究此三个波峰区间内压电板的变形

状态对压电俘能器俘能效率的提高有重大意义.双稳态板在特定的外激励作用下会发生失稳现象.失稳是指构件从一个平衡状态转移到另一个新的平衡状态的过程,当压电俘能器的核心部件——双稳态压电板出现失稳现象时,通常压电板的变形较大,因此,俘能效果较好.

利用自定义开发的微-压电单元对该结构进行非线性分析,重点考察各频率区间内压电板的变形状态.发现在某些频率区间内,双稳态板随着时间出现了多种变形状态交替出现的现象,如表 2 所示.

表 2 各频率区间不同时刻的变形状态

Table 2 shapes at different times

f/Hz	Shapes at different times					
0~3025	 0.035~0.07ms	 0.07~0.105ms	 0.105~0.175ms	 0.175~0.21ms	 0.21~0.28ms	 0.28~0.35ms
3025~4299	 0.07~0.12ms	 0.12~0.17ms	 0.17~0.18ms	 0.18~0.2ms	 0.2~0.32ms	 0.32~0.52ms
4299~5096	 0.05~0.075ms	 0.075~0.1ms	 0.1~0.175ms	 0.175~0.2ms	 0.2~0.225ms	 0.225~0.275ms
5096~6051	 0.05~0.15ms	 0.15~0.2ms	 0.2~0.28ms	 0.28~0.3ms	 0.3~0.38ms	 0.38~0.52ms
6051~6529	 0.025~0.05ms	 0.05~0.075ms	 0.075~0.15ms	 0.15~0.175ms	 0.175~0.25ms	 0.25~0.275ms
6529~11950	 0.01~0.02ms	 0.02~0.04ms	 0.04~0.07ms	 0.07~0.12ms	 0.12~0.2ms	 0.2~0.85ms

从表2中结构的各变形状态可以发现:外激振频率在0~3025Hz、4299~5096Hz和6051~6529 Hz区间内压电板的变形除了幅度大小不一外,形态是相同的,都是四角弯曲.此时压电板发生的变形为双曲变形,在激励作用下,双稳态板绕X轴和Y轴两个方向都会发生弯曲变形,且曲率相同,形状对称.

外激振频率在3025~4299Hz、5096~6051Hz和6529~11950Hz处(三个波峰区间),压电板的变形状态发生了改变,出现了多种变形状态随时间交替出现的现象.首先观察3025~4299Hz区间,压电板开始时刻0.07~0.12ms时,压电板绕2&4对角线(顶点名称如图3所示)发生弯曲变形,1、3顶点挠度最大.接下来在0.12~0.17ms时间内,压电板的变形状态发生变化,出现了绕1&3对角线的弯曲变形.此时2、4顶点挠度最大.此后随时间出现两种状态交替出现的现象.

在5096~6051Hz区间内,开始时刻压电板发生的是双曲变形,即绕X轴和Y轴曲率相同;在0.05~0.15ms时间内,四边中点挠度最大;而0.15~0.2ms时间内,四个顶点挠度最大;从0.2ms开始,压电板的变形状态发生改变,压电板首先是绕Y轴发生弯曲,此时,X方向曲率为0,随后绕X轴发生弯曲,此时,Y方向曲率为0,此后出现两种变形状态交替出现的情况.这两个柱状变形状态是双稳态板常见的两个稳态.

外激振频率在6529~11950Hz处压电板也出现了不同状态交替变化出现的现象,此时变形状态更加复杂,此处不再赘述.

对比表2和图4可以发现,当压电板没有发生变形状态的跳变时,即在0~3025Hz、4299~5096Hz和6051~6529Hz频率区间内,压电板始终发生的都是双曲变形,此时振动幅值较小,俘获的电压也较小,而在共振区间内,即1/3超谐共振区间3025~4299Hz和1/2超谐共振区间5096~6051Hz内,由于压电板在振动过程中出现了变形状态跳变及交替出现的现象,产生了大幅振动,进而俘获更多的电能.是我们设计的微型双稳态板压电俘能器较好的工作区间.

3 结论

通过微型悬臂板的算例验证,以及利用微-压电单元和力-电耦合有限元法对微型双稳态压电俘能器进行的非线性分析,得到如下结论:

1) 自定义微-压电单元在微观结构的计算上体现了较好的尺寸效应.

2) 非线性动态分析显示,由于微型双稳态压电板超谐共振现象的存在,该俘能器在较低的激振频率下也能俘获较高的电压能量,并出现了多个频宽.

3) 当微型双稳态压电俘能器出现变形状态跳变并交替出现时,俘获电压较高,俘能效果较好.

参 考 文 献

- Arrieta A F, Hagedorn P, Erturk A, et al. Piezoelectric bistable plate for nonlinear broadband energy harvesting. *Applied Physics Letters*, 2010, 97(10): 104102
- Betts D N, Kim H A, Bowen C R, et al. Optimal configurations of bistable piezo-composites for energy harvesting. *Applied Physics Letters*, 2012, 100(11): 114104
- Betts D N, Bowen C R, Kim H A, et al. Nonlinear dynamics of a bistable piezoelectric-composite energy harvester for broadband application. *The European Physical Journal Special Topics*, 2013, 222(7): 1553~1562
- Syta A, Bowen C R, Kim H A, et al. Experimental analysis of the dynamical response of energy harvesting devices based on bistable laminated plates. *Meccanica*, 2015, 50(8): 1961~1970
- Syta A, Bowen C R, Kim H A, et al. Responses of bistable piezoelectric-composite energy harvester by means of recurrences. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016(76-77): 823~832
- Andò B, Baglio S, Trigona C, et al. Nonlinear mechanism in MEMS devices for energy harvesting applications. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2010, 20(12): 125020
- Prušáková L, Novák P, Kulha P, et al. Modeling and fabrication of single cantilever piezoelectric microgenerator with optimized ZnO active layer. *Thin Solid Films*, 2015, 591: 305~310
- Fei Y, Chen L, Zhang X, et al. Study on the snap-through behavior of bistable plates, In: ASME 2016 Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems, 2016: V002T03A010
- Toprak A, Tigli O. MEMS scale PVDF-TrFE-Based piezoelectric energy harvesters. *Journal of Microelectromechanical System*, 2015, 24(6): 1989~1997
- 陈丽华, 杨硕, 张伟. 带质量块微型双稳态压电板的动力学分析. *动力学与控制学报*, 2017, 15(6): 505~511

- (Chen L H, Yang S, Zhang W. Dynamic analysis of micro bistable piezoelectric plate with proof mass. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(6):505~511 (in Chinese))
- 11 Lueke J, Badr A, Lou E, et al. Microfabrication and integration of a Sol-Gel PZT folded spring energy harvester. *Sensors*, 2015, 15(6):12218~12241
 - 12 Toupin R A. Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, 11(1):385~414
 - 13 Mindlin R D. Influence of couple-stress on stress concentrations. *Experimental Mechanics*, 1963, 3:1~7
 - 14 Aifantis E C. On the role of gradients in the localization of deformation and fracture. *International Journal of Engineering Science*, 1992, 30(10):1279~1299
 - 15 Aifantis E C. Strain gradient interpretation of size effects. *International Journal of Engineering Science*, 1999, 95:299
 - 16 Ralib A A M, Nordin A N, Salleh H, Raihan Othman. Fabrication of aluminium doped zinc oxide piezoelectric thin film on a silicon substrate for piezoelectric MEMS energy harvesters. *Microsystem Technologies*, 2012, 18:1761~1769
 - 17 唐洪祥,胡兆龙. 三维 cosserat 连续体模型与微结构尺寸相关效应的有限元分析. *计算力学学报*, 2013, 30(3):399~405 (Tang H X, Hu Z L. Three dimensional cosserat continuum model and finite element analysis for the size effect of micrao-structure. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2013, 30(3):399~405 (in Chinese))
 - 18 Agrawal R, Espinosa H D. Giant piezoelectric size effects in zinc oxide and gallium nitride nanowires; a first principles investigation. *Nano Letters*, 2011, 11(2):786~790
 - 19 Rezaeisaray, Mehdi, Gowini E I, et al. Low frequency piezoelectric energy harvesting at multi vibration mode shapes. *Sensors and Actuators A Physical*, 2015, 228:104~111
 - 20 Chong A C M, Lam D C C. Strain gradient plasticity effect in indentation hardness of polymers. *Journal of Materials Research*, 1999, 14(10):4103~4110

THE SIMULATION OF BI-STABLE MICRO PIEZOELECTRIC ENERGY HARVESTING *

Chen Lihua^{1,2†} Jing Hao^{1,2} Chen Tan^{1,2} Zhang Wei^{1,2} Chang Liqi^{1,2} Yang Fenghong³

(1. Beijing Key Laboratory of Nonlinear Vibrations and Strength of Mechanical Structures, Beijing 100124, China)

(2. College of Mechanical Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

(3. School of Statistics and Mathematic, Central University of Finance and Economics, Beijing 100081, China)

Abstract A micro piezoelectric energy harvesting is designed based on a bi-stable plate that is two-layered square plates fixed in the midpoint of the plates and free at four edges. Based on strain gradient theory, considering the size effect, a micro-piezoelectric element is defined using User-defined Finite Element Subroutine (UEL) in ABAQUS. With the thermal-force-electric coupling analysis method, it is found that there are different deformation shapes under different excitation frequencies. The analysis nonlinear dynamic shows that the structure can change more vibration energy to electric energy before its first natural frequency, and there exists snap-through behavior in its frequency response range. The optimum working frequency and maximum output voltage are concluded for the micro piezoelectric energy harvesting. The research findings have an important guiding significance for design of micro piezoelectric energy harvesting.

Key words micro piezoelectric energy harvesting, bi-stable, strain gradient, size effect, UEL

Received 7 May 2018, revised 30 October 2018.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11472019,11472315).

† Corresponding author E-mail: chenlihua@bjut.edu.cn