

# 基于李雅普诺夫指数的四旋翼无人飞行器 结构参数优化稳定性分析\*

陈城<sup>1,2,3†</sup> 符伟杰<sup>1,2</sup> 刘娜<sup>1,2</sup> 毛春雷<sup>1,2</sup> 韩继伟<sup>1,2</sup>

(1.水利部交通运输部国家能源局南京水利科学研究院,南京 210029) (2.水利部南京水利水文自动化研究所,南京 210012)  
(3.水利部水文水资源监控工程技术研究中心,南京 210012)

**摘要** 为了提高四旋翼无人飞行器的运动稳定性,通过改变机械结构参数,研究了变结构参数对系统稳定性的影响.本文以四旋翼无人飞行器的偏航阶段为对象,根据基于动力学模型的李雅普诺夫指数计算过程,得到了影响系统稳定性的主要机械结构参数,并采用李雅普诺夫指数法建立其主要机械结构参数与系统运动稳定性之间的量化关系,以期指导系统的机械结构设计及控制系统优化,提高系统的可靠性和稳定性,最后,通过实验验证理论仿真分析过程中的结论.该方法与李雅普诺夫的第二法相比,其主要优势是计算指数方法的可构建性,并可以使复杂非线性系统的稳定性分析成为可能.

**关键词** 四旋翼无人飞行器, 机械结构参数, 运动稳定性, 李雅普诺夫指数

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-044

## 引言

四旋翼无人飞行器凭借具有可垂直起降、空中悬停、机动灵活等特点,被大量应用于地质勘查、管线巡检和物品运载等领域<sup>[1,2]</sup>.然而,由于四旋翼无人飞行器具有非线性、欠驱动和强耦合等动态特性,研究人员常将其作为理论研究、方法验证的载体.已有的研究主要集中在四旋翼无人飞行器的高性能运动和编队控制,但很少有从机械结构参数角度出发来研究变结构参数与系统运动稳定性关系的报道<sup>[3]</sup>.四旋翼无人飞行器稳定性的自身因素主要包括机械结构和控制力矩等参数,而控制力矩的大小又与机械结构参数密切相关<sup>[4,5]</sup>.因此,建立四旋翼无人飞行器机械结构、控制力矩等参数与系统运动稳定性之间的关系变得尤为重要.

李雅普诺夫稳定性理论是非线性系统稳定性分析的重要工具,其核心是构建一个李雅普诺夫函数.文献[6]通过牛顿欧拉方法建立了无气动载荷作用下的无人飞行器系统的动力学方程,并通过李雅普诺夫直接法分析了系统的姿态稳定性.文献[7,8]在建立微小型无人飞行器系统的李雅普诺

夫函数基础上,分析系统的运动稳定性,并分别设计了系统的神经自适应控制器及全局轨迹跟踪控制器.然而没有一般规则来构建这样一个李雅普诺夫函数,而且构造方法也不唯一,大大限制了该方法的广泛应用.对于四旋翼无人飞行器等含噪声干扰、多自由度、强耦合的非线性系统,其动力学方程非常复杂,无法准确地构造其李雅普诺夫函数,甚至无法得到,这使得许多非线性系统的稳定性难以解决.

李雅普诺夫指数可以用来描述在相空间中相互靠近的两条轨迹随着时间的推移,按指数分离或聚合的平均变化率,其可以用来分析运动稳定性<sup>[9-11]</sup>.基于动力学模型的李雅普诺夫指数已经得到发展,它被广泛地用来诊断混沌和复杂非线性系统的稳定性分析<sup>[12,13]</sup>.Asokanthan 和 Wang<sup>[14]</sup>研究扭转万向节驱动系统的稳定性;Gilat 和 Aboudi<sup>[15]</sup>研究了非线性弹性复合材料板的参数稳定;Wu Qiong<sup>[16]</sup>通过李雅普诺夫指数方法研究了被动双足机器人稳定性;张文超<sup>[17]</sup>将李雅普诺夫指数法应用在自然循环流动不稳定性混沌预测中.因此,李雅普诺夫指数法为量化稳定性提供了重要方法.

1 基于李雅普诺夫指数的稳定性分析过程

李雅普诺夫指数可以描述系统受到扰动后的初值与原初值两条轨道随时间收敛或发散的指数率.当李雅普诺夫指数小于0时,系统的相轨道吸引到一个稳定的固定点上,整个系统是稳定的.负的李雅普诺夫指数是耗散系统或者非保守系统(如阻尼谐波振子)的基本特征,而且这个负值越大相轨道收敛的越快,系统到达稳定状态的速度越快,当这个负值趋向于无穷大时系统是超稳定的.如果系统是稳定的,其李雅普诺夫指数中至少有一个小于0,并且所有指数之和同时小于0.当李雅普诺夫指数大于0时,系统是不稳定的或混沌的.李雅普诺夫指数为0时,相轨迹是周期性运动,而所有的指数和可以认为是大体上表征轨线总的平均发散或收敛的快慢<sup>[18]</sup>.

李雅普诺夫指数可以通过动力学方程或状态量的时间序列两种方式获得,本文采用基于动力学方程的方法其计算公式为<sup>[19]</sup>:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(X)}{dX} \right|_{X_i} \quad (1)$$

其中,状态方程是通过非线性系统的动力学方程转化得到的.李雅普诺夫指数的大小由函数 $f(X)$ 在 $X_i$ 处的雅可比矩阵 $|df/dX|$ 决定的,其整个计算步骤如下:

(1)构建基于空间算子的模块化运动学及动力学方程,欧拉-庞卡莱形式:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= V(q)p \\ M(q)\dot{p} + C(q,p)p + F(p,q,u) &= 0 \end{aligned}$$

(2)将动力学方程转化为状态方程:

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(X(t))$$

(3)计算 Jacobian 矩阵<sup>[20]</sup>:

$$|df(X)/dX|_{X_i}$$

(4)计算李雅普诺夫指数谱:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |df(X)/dX|_{X_i}$$

2 动力学建模

首先建立四旋翼无人飞行器动力学模型,建立图1所示的四旋翼无人飞行器机体坐标系 $B(x,y,z)$ 和大地坐标系 $E(X,Y,Z)$ .假设:(1)四旋翼无人飞

行器是刚体,且完全均匀对称;(2)机体坐标原点 $B$ 与无人飞行器的质心是完全重合;(3)无人飞行器的螺旋桨为刚体,不考虑其结构和弹性变形.其中 $\Omega_i(i=1,2,3,4)$ 表示旋翼的转速.当 $\Omega_1=\Omega_3=\Omega_2=\Omega_4$ 时,四旋翼无人飞行器处于悬停或者上升和下降阶段;当 $\Omega_1=\Omega_3$ 且 $\Omega_2\neq\Omega_4$ 时,系统处于滚转阶段;当 $\Omega_1\neq\Omega_3$ 且 $\Omega_2=\Omega_4$ 时,系统处于俯仰阶段;当 $\Omega_1=\Omega_3\neq\Omega_2=\Omega_4$ 时,系统处于偏航阶段.

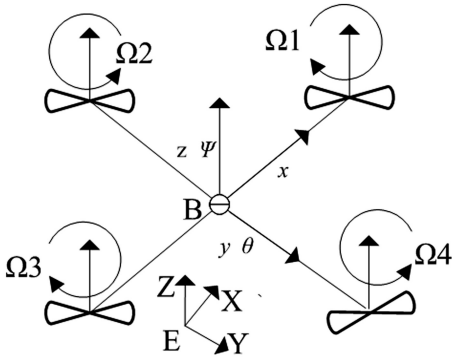


图1 系统示意图  
Fig.1 System structure diagram

基于欧拉-庞卡莱法建立四旋翼无人飞行器的动力学模型:

$$\dot{q} = V(q)p \quad (2)$$

$$M(q)\dot{p} + C(q,p)p + F(p,q,u) = 0 \quad (3)$$

式中, $p=(p,q,r,u,v,w)$ 是伪速度矢量,即 $p,q,r,u,v,w$ 分别是关于 $x,y,z$ 的角速度和线速度; $q=(\phi,\theta,\psi,x,y,z)$ 是广义坐标矢量,即 $\phi,\theta,\psi,x,y,z$ 分别是关于 $x,y,z$ 的角度和线位移; $V(q)$ 是运动学矩阵; $M(q)$ 是惯性矩阵; $C(q,p)$ 是陀螺矩阵; $F(p,q,u)$ 包含空气动力,重力以及控制输入的总和; $U$ 是控制输入矢量.

$$V(q) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_\theta T_\theta & C_\phi & S_\phi C_\theta^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ C_\phi T_\theta & -S_\psi & C_\psi C_\theta^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_\theta C_\psi & C_\theta S_\psi & -S_\theta \\ 0 & 0 & 0 & S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi & S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi S_\psi & S_\phi C_\theta \\ 0 & 0 & 0 & C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi & C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi & C_\phi C_\theta \end{bmatrix}$$

$$U = (U_1, U_2, U_3, U_4)^T$$

其中, $U_1=F_1+F_2+F_3+F_4, U_2=F_2-F_4, U_3=F_1-F_3, U_4=K(F_1-F_2+F_3-F_4)$ .

$$F(p, q, u) = \begin{bmatrix} -LU_2 \\ -LU_3 \\ -U_4 \\ mgS_\theta - U_1(C_\phi C_\psi S_\theta + S_\phi S_\psi) \\ -mgC_\theta S_\phi - U_1(-S_\phi C_\psi + C_\phi S_\theta S_\psi) \\ -mgC_\theta C_\phi - U_1 C_\phi C_\theta \end{bmatrix}$$

$$C(q, p) = \begin{bmatrix} 0 & -I_y r & I_z q & 0 & -mw & mv \\ I_x r & 0 & -I_z p & mw & 0 & -mu \\ -I_x q & I_y p & 0 & -mv & mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -mr & mq \\ 0 & 0 & 0 & mr & 0 & -mp \\ 0 & 0 & 0 & -mq & mp & 0 \end{bmatrix}$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$F = \frac{1}{2} \rho A C_T R^2 \Omega^2$$

其中,  $I_x, I_y$  和  $I_z$  分别为系统  $x, y$  和  $z$  轴的转动惯量;  $L$  是旋翼与无人飞行器中心的距离;  $A = \pi R^2$ ,  $R$  为旋翼半径;  $\rho$  为空气密度;  $K = C_Q / C_T$ , 为旋翼扭矩系数;  $C_T$  为旋翼升力系数;  $\Omega$  为旋翼转速;  $U_l$  为垂直速度控制量,  $U_2$  为滚转输入控制量,  $U_3$  为俯仰控制输入量,  $U_4$  为偏航控制量;  $F$  为各旋翼所受到的拉力;  $m$  为系统质量;  $g$  为重力加速度;  $\phi$  为系统绕  $x$  轴方向的滚转角 (rad),  $\theta$  为系统绕  $y$  轴方向的俯仰角 (rad),  $\psi$  为系统绕  $z$  轴方向的偏航角 (rad);  $S_\phi = \sin \phi$ ,  $C_\phi = \cos \phi$ ,  $S_\theta = \sin \theta$ ,  $C_\theta = \cos \theta$ ,  $C_\theta^{-1} = \sec \theta$ ,  $T_\theta = \tan \theta$ ,  $S_\psi = \sin \psi$ ,  $C_\psi = \cos \psi$ .

由运动学方程式(2)和动力学方程式(3)得:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} p + q S_\phi T_\theta + r C_\phi T_\theta \\ q C_\phi - r S_\phi \\ q S_\phi C_\theta^{-1} + r C_\phi C_\theta^{-1} \\ u C_\theta C_\psi + v (S_\theta S_\phi C_\psi - C_\phi S_\psi) + w (S_\theta C_\phi C_\psi + S_\phi S_\psi) \\ u (C_\theta S_\psi) + v (S_\theta S_\phi S_\psi + C_\phi C_\psi) + w (C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi) \\ -u S_\theta + v S_\phi C_\theta + w C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} -(-I_y q r + I_z q r - L U_2) / I_x \\ -(I_x p r - I_z p r - L U_3) / I_y \\ -(-I_x p q + I_y p q - U_4) / I_z \\ -[(-mrv + mqw + mgS_\theta - U_1(C_\phi C_\psi S_\theta + S_\phi S_\psi))] / m \\ -[(mru - mpw - mgC_\theta S_\phi - U_1(-C_\psi S_\phi + C_\phi S_\theta S_\psi))] / m \\ -[(-mqu + mpv - mgC_\theta C_\phi - U_1 C_\theta C_\phi)] / m \end{bmatrix} \quad (5)$$

式(4)和(5)可以被转化成系统状态方程式:

$$\dot{X} = f(X) \quad (6)$$

式中,

$$X = [q \ p]^T = (\phi, \theta, \psi, x, y, z, p, q, r, u, v, w)^T.$$

### 3 基于标准算法的数值李雅普诺夫指数计算

在建立的动力学模型基础上,将方程(6)带入公式(1)中就可以计算出整个系统李雅普诺夫指数谱.为计算李雅普诺夫指数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ ,取时间  $T=0.1$  和迭代次数  $K=100$ ,由方程(6)得到方程:

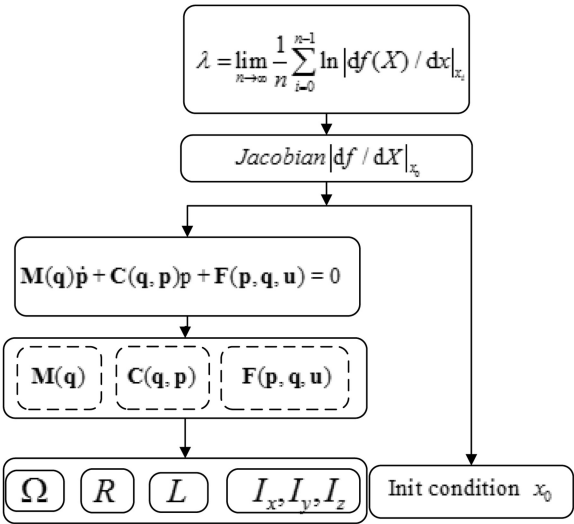
$$\begin{bmatrix} x \\ \psi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x) \\ F(t)\psi_t \end{bmatrix}$$

其中,  $\Psi_t$  是线性化系统  $\delta x(t) = \Psi_t \delta x_0$  状态转换矩阵,变分方程  $d(\Psi_t) = F(t) \Psi_t$  是时变线性微分方程的矩阵值,它是由沿着轨迹  $x(t)$  向量场线性化推算得到的.本文使用 GSR 算法, GSR 在下面给出了标准正交化解集  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\ u_2 &= \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1\|} \\ &\dots \\ u_n &= \frac{v_n - \langle v_n, u_{n-1} \rangle u_{n-1} - \dots - \langle v_n, u_1 \rangle u_1}{\|v_n - \langle v_n, u_{n-1} \rangle u_{n-1} - \dots - \langle v_n, u_1 \rangle u_1\|} \end{aligned} \quad (7)$$

$\delta x_{ik}$  先正交化为  $v_{ik}$ , 然后再标准化  $u_{ik}$ ,  $\langle, \rangle$  是内积.重复此过程,直到李雅普诺夫指数达到最大迭代次数  $K$  为止,求出指数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  和  $\lambda_6$  的李雅普诺夫指数谱.

根据公式(1)的计算过程推导可以建立四旋翼无人飞行器主要机械结构参数与系统运动稳定性之间的量化关系如图2所示.



参数需要采用实验方法得到。

转动惯量的测量<sup>[21,22]</sup>:图3显示了两线法测量X轴,Y轴的转动惯量,Z轴转动惯量测量采用的是四线悬挂法,如图4所示。



图3 两线法

Fig.3 Two line method

4 仿真分析

在仿真分析时,首先对四旋翼无人飞行器偏航阶段进行动力学建模.得到非线性模型后,仿真出不同条件下李雅普诺夫指数谱,得到系统机械结构参数与稳定性之间的量化关系,最后通过改变机械结构参数来得到不同的李雅普诺夫指数谱。

4.1 参数辨识

经上述分析可知,要实现对四旋翼无人飞行器建立数值动力学模型,就必须获得以下参数: $m, g, L, I_x, I_y, I_z, C_T, C_Q, R$  和  $K$ .四旋翼无人飞行器总的结构参数如表1所示。

表1 系统结构参数表

Table 1 System structure parameter

| parameters | value                        |
|------------|------------------------------|
| $m$        | 0.875kg                      |
| $g$        | 9.8m/s <sup>2</sup>          |
| $L$        | 0.225m                       |
| $C_T$      | 1.0792E-005                  |
| $C_Q$      | 1.8992E-007                  |
| $R$        | 0.125m                       |
| $\rho$     | 1.29kg/m <sup>3</sup>        |
| $I_x$      | 9.5065E-003kg·m <sup>2</sup> |
| $I_y$      | 1.00E-002kg·m <sup>2</sup>   |
| $I_z$      | 1.658E-002kg·m <sup>2</sup>  |
| $K$        | 1.7598E-002                  |



图4 四线法

Fig.4 Four line method

转动惯量计算公式为:

$$I = \frac{mgr^2}{\omega^2 a}$$

(8)

式中: $m=0.875\text{kg}, g=9.8\text{m/s}^2, r$  为悬点到旋翼质心的距离,  $a$  为绳长,  $\omega$  为震荡周期.现在只需得到  $\omega$  的值,就能够计算出转动惯量  $I$ 。

表2列出了具体转动惯量的测量参数。

表2 转动惯量测量参数表

Table 2 Rotational inertia measurement parameter

|   | $r(\text{m})$ | $a(\text{m})$ | $T(\text{s}^{-1})$ | $w(\text{rad/s})$ | $I(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$ |
|---|---------------|---------------|--------------------|-------------------|-------------------------------|
| X | 0.125         | 0.49          | 1.1716             | 5.3631            | 9.5065E-003                   |
| Y | 0.105         | 0.46          | 1.3860             | 4.5334            | 1.00E-002                     |
| Z | 0.185         | 0.58          | 1.1374             | 5.5244            | 1.658E-002                    |

其中,可以通过测量直接得到的参数有:系统质量  $m=0.875\text{kg}$ ,旋翼与机体中心矩  $L=0.225\text{m}$ ,旋翼半径  $R=0.125\text{m}$ .通过查找工具书可以获得当地的重力加速度  $g=9.8\text{m/s}^2$ ,空气密度  $\rho=1.29\text{kg/m}^3$ .其他

电机拉力与力矩系数的测量:

图5显示了电机拉力测试结果,可得电机升力系数  $C_T=1.0792\text{E}-005$ .图6显示了电机力矩测试结果,可得电机力矩系数  $C_Q=1.8992\text{E}-007$ 。

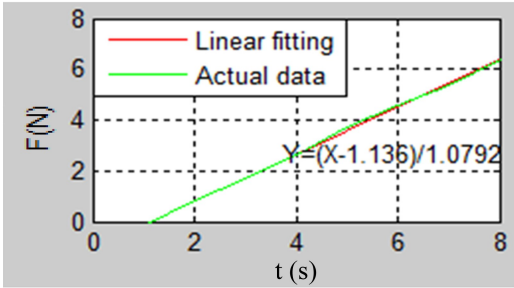


图 5 电机拉力测试结果  
Fig.5 The result of motor pull

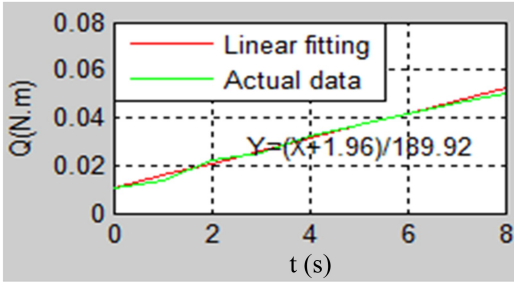


图 6 电机电矩测试  
Fig.6 The result of the motor torque

4.2 控制输入优化

根据图 2 得出影响系统稳定性的主要因素有电机转速  $\Omega$ , 旋翼半径  $R$ , 系统质量  $m$ , 力臂  $L$ , 转动惯量  $I_x, I_y$  和  $I_z$ , 这里主要针对力臂  $L$  和旋翼半径  $R$  来进行分析.

Case 1: 当四旋翼无人飞行器的转速  $\Omega_1 = \Omega_3 = 3500\text{rpm}$ ,  $\Omega_2 = \Omega_4 = 1000\text{rpm}$ ,  $R = 0.125\text{m}$ ,  $L = 0.225\text{m}$ , 系统处于偏航状态, 李雅普诺夫指数谱谱如图 7 所示.

Case 2: 当四旋翼无人飞行器的转速  $\Omega_1 = \Omega_3 = 3000\text{rpm}$ ,  $\Omega_2 = \Omega_4 = 1500\text{rpm}$ ,  $R = 0.125\text{m}$ ,  $L = 0.225\text{m}$ , 系统处于偏航状态, 李雅普诺夫指数谱如图 8 所示.

对比图 7 和图 8 可知: 四旋翼无人飞行器在偏航飞行过程中, 两组控制电机的输入差越大, 四旋翼无人飞行器的李雅普诺夫指数谱收敛于 0 的速度更快, 即系统的稳定性越好. 在实际操作过程中, 通过控制两组电机的差来提高偏航飞行过程的稳定性.

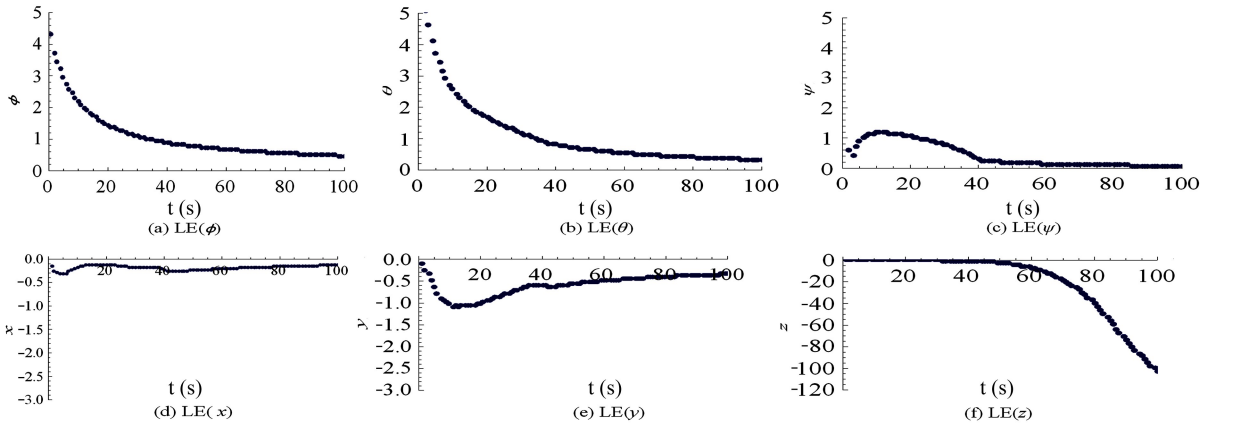


图 7 case 1 的李雅普诺夫指数谱  
Fig.7 Lyapunov exponents spectrumduring the case 1

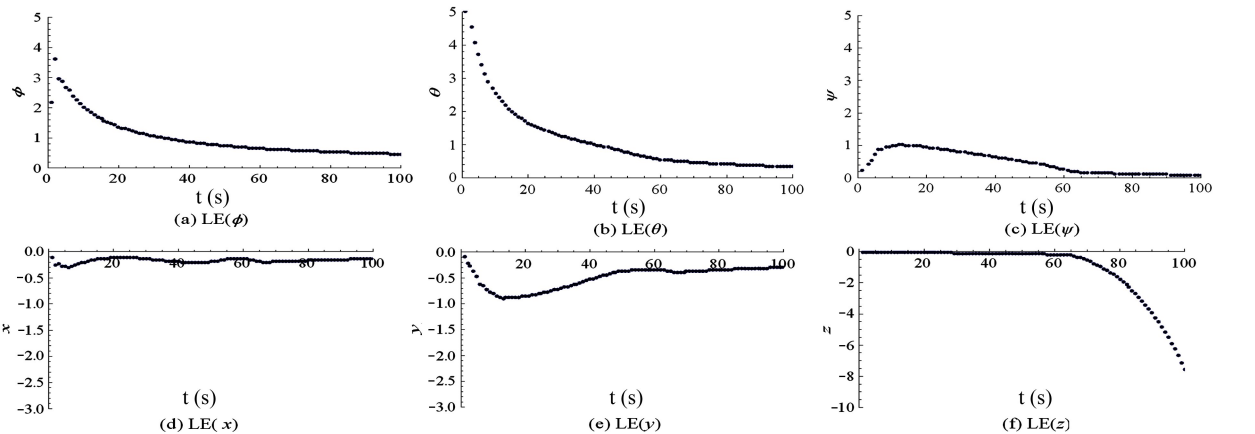


图 8 case 2 的系统李雅普诺夫指数谱  
Fig.8 Lyapunov exponents spectrumduring the case 2

4.3 机械结构参数优化

在 case 1 的条件下:

(1)改变螺旋桨的旋转半径  $R=0.1\text{m}$ ,  $L=0.225\text{m}$ , 系统的李雅普诺夫指数谱如图 9 所示.

由图 7 和 9 可知:由于四旋翼无人飞行器的主要动力来源是螺旋桨旋转时所提供的升力,在转速相同时,桨叶半径越大,所得升力就越大.图 7 的李雅普诺夫指数谱的收敛于 0 的速度比图 9 快,即稳定性也相对提高.在实际应用过程中,力臂一定时,不影响螺旋桨旋转时之间气流的相互作用,桨叶半径越大越稳定越好.

(2)同时改变螺旋桨的旋转半径  $R=0.1$  和力臂  $L=0.45$ , 系统的李雅普诺夫指数谱如图 10 所示.

对比图 9 和图 10 可知:在一定范围内,力臂  $L$

越大,系统的李雅普诺夫指数收敛得越快,系统越稳定,力臂  $L=0.45\text{m}$  比力臂  $L=0.225\text{m}$  的稳定性提升了 87.4%.在实际应用时,可以根据需求适当改变机械的力臂来提高稳定性.

在情况 2 的条件下:

(1)改变螺旋桨的旋转半径  $R=0.1\text{m}$ ,  $L=0.225\text{m}$ , 系统的李雅普诺夫指数谱如图 11 所示.

由图 8 和图 11 可知:在转速  $\Omega$ , 力臂  $L$  一定时,桨叶半径越大,系统的稳定性能越好,当  $R=0.125\text{m}$  时,李雅普诺夫指数收敛于 0 的速度比  $R=0.1\text{m}$  的李雅普诺夫指数快,即正好验证了上面 case 1 条件下的(1)情况.

(2)改变螺旋桨的旋转半径  $R=0.1\text{m}$ ,  $L=0.45\text{m}$ , 系统的李雅普诺夫指数谱如图 12 所示.

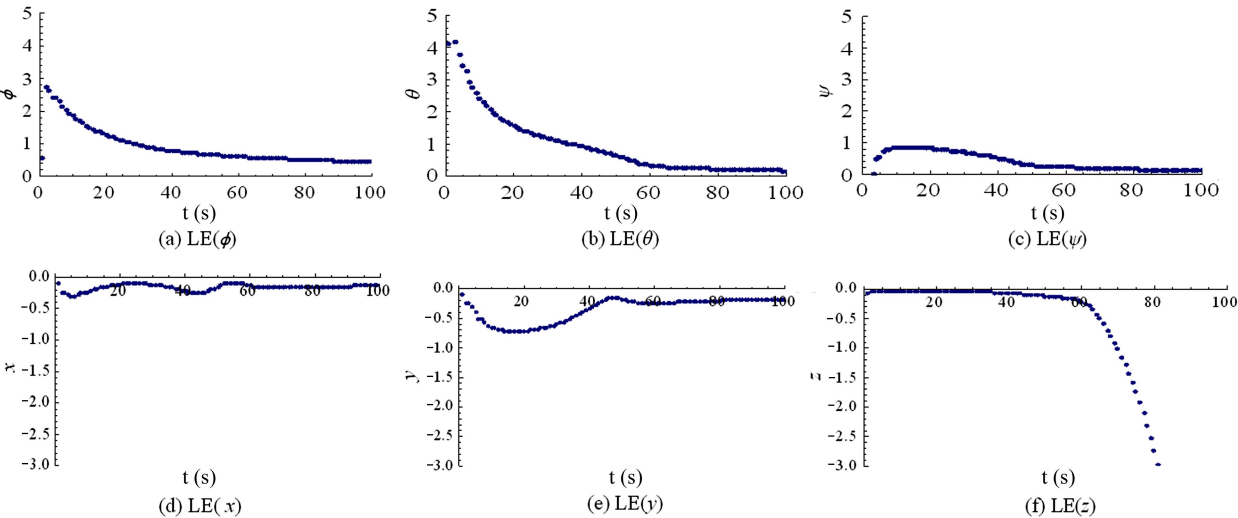


图 9 改变桨叶半径后的李雅普诺夫指数谱

Fig.9 Lyapunov exponents spectrum after the modified the blade radius

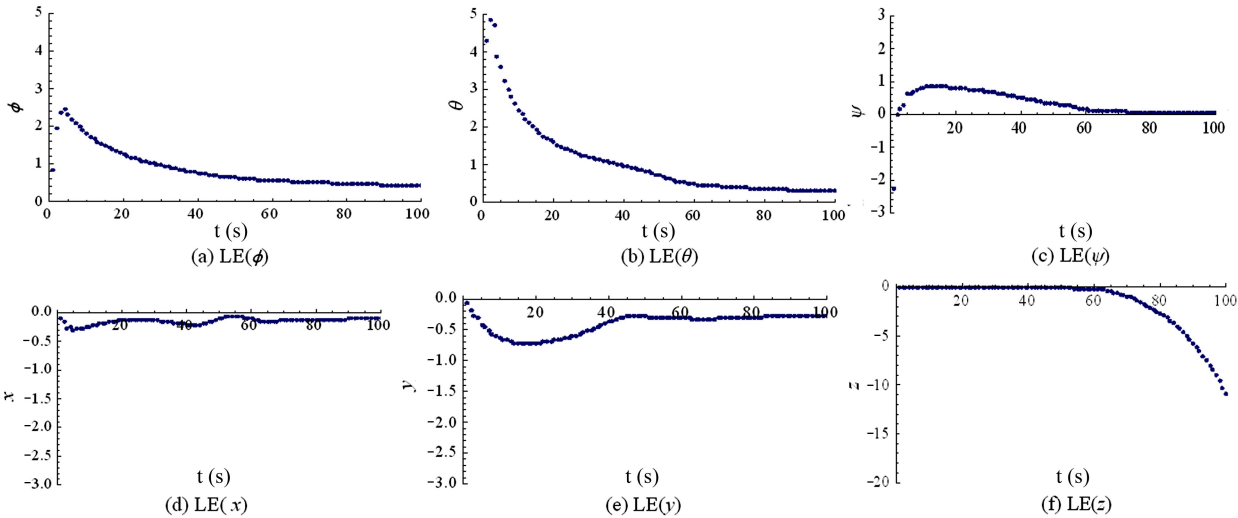


图 10 改变桨叶半径和力臂后的系统李雅普诺夫指数谱

Fig.10 Lyapunov exponents spectrum after the modified the blade radius and arm of force

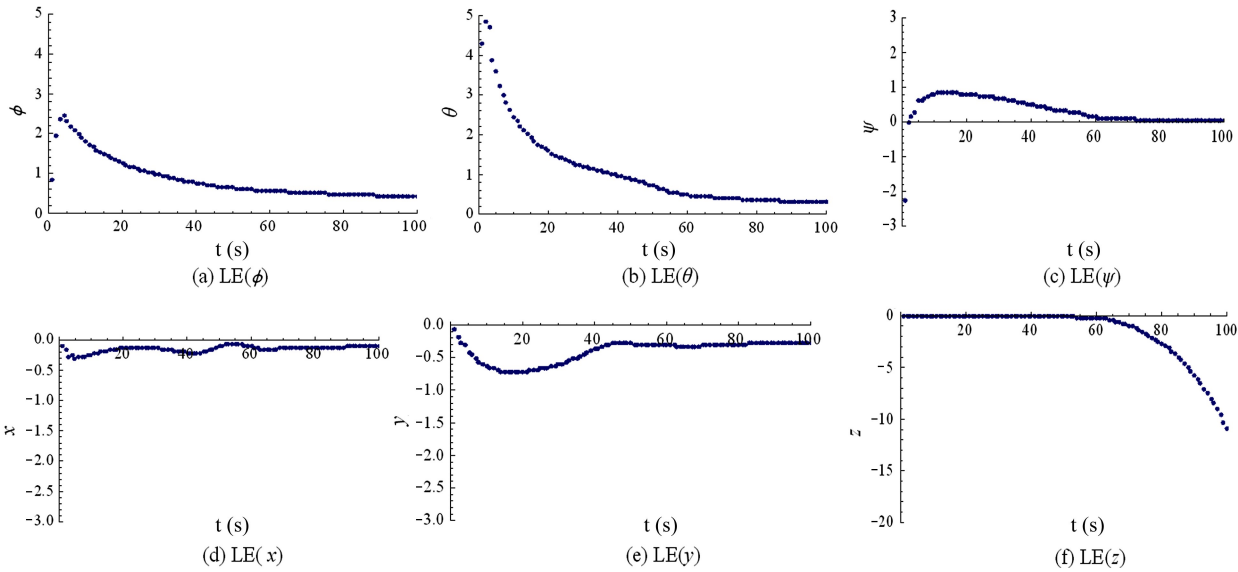


图 11 改变电机、桨叶半径后的系统李雅普诺夫指数谱

Fig.11 Lyapunov exponents spectrum after the modified the blade radius and motor speed

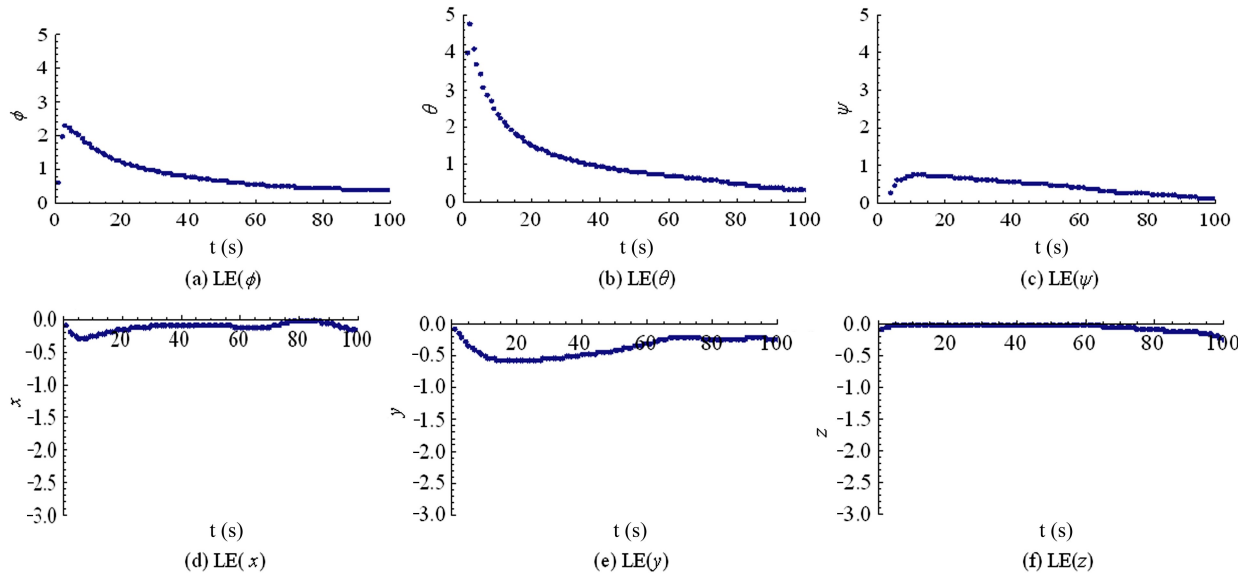


图 12 改变电机、力臂后的系统李雅普诺夫指数谱

Fig.12 Lyapunov exponents spectrum after the modified the arm of force and motor speed

由图 11 和 12 可知:在一定范围内并且其他参数不变时,力臂  $L$  越大,系统的稳定性能就越好,即和 case 1 条件下情况 (2) 一样.在实际应用可以改变力臂长度提高系统的稳定性.综上所述:改变相应的机械结构参数和控制输入可以提高系统的稳定性.

5 实验结果

在这一部分,以机械结构参数优化的  $L=0.45\text{m}$

和  $L=0.225\text{m}, R=0.1\text{m}$  为对象进行验证.四旋翼无人飞行器的控制系统采用 pixhawk,上位机采用 Mission planner,如图 13 所示.配置四旋翼无人飞行器处于偏航模式下,  $\Omega_1 = \Omega_3 = 3500\text{rpm}$ ,  $\Omega_2 = \Omega_4 = 1000\text{rpm}$ .比较图 14、15 和 16 可以得出:当  $L=0.45\text{m}$ ,四旋翼无人飞行器的飞行性能明显比  $L=0.225\text{m}$  效果要好,即可以用来验证图 9 和图 10 的结果.综上所述:改变四旋翼无人飞行器的机械结构参数和控制输入对系统的稳定具有重要影响.

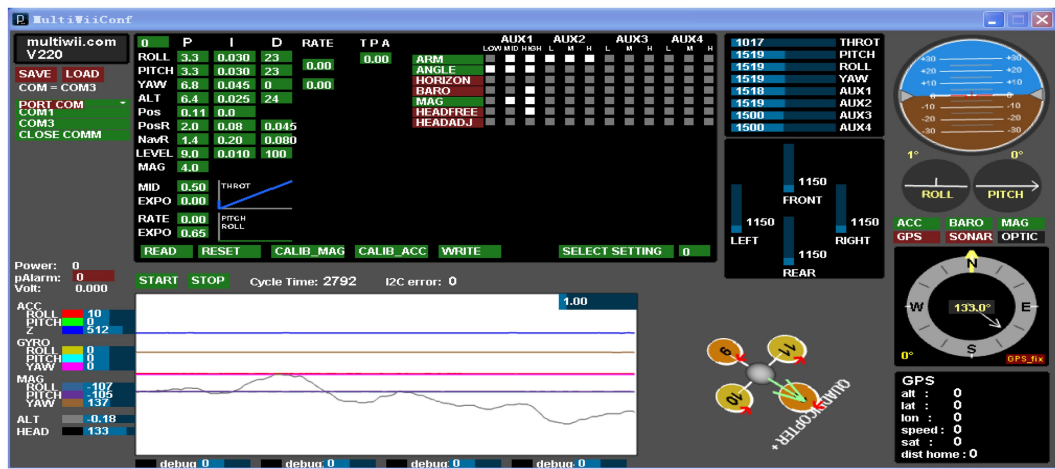
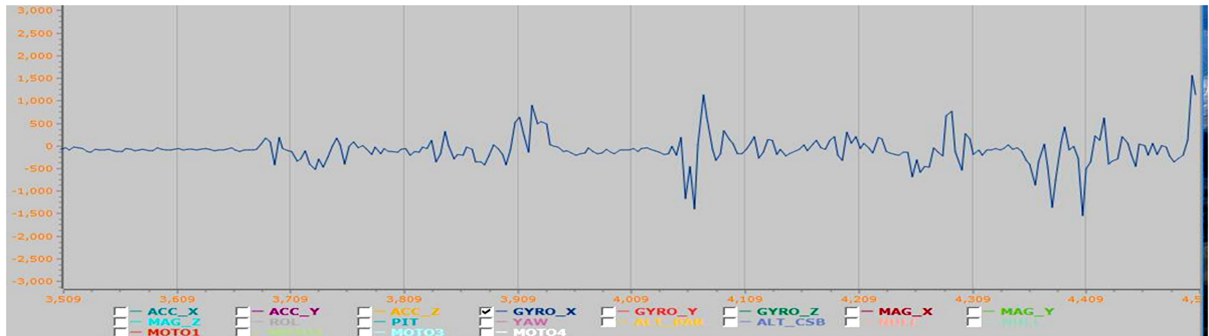
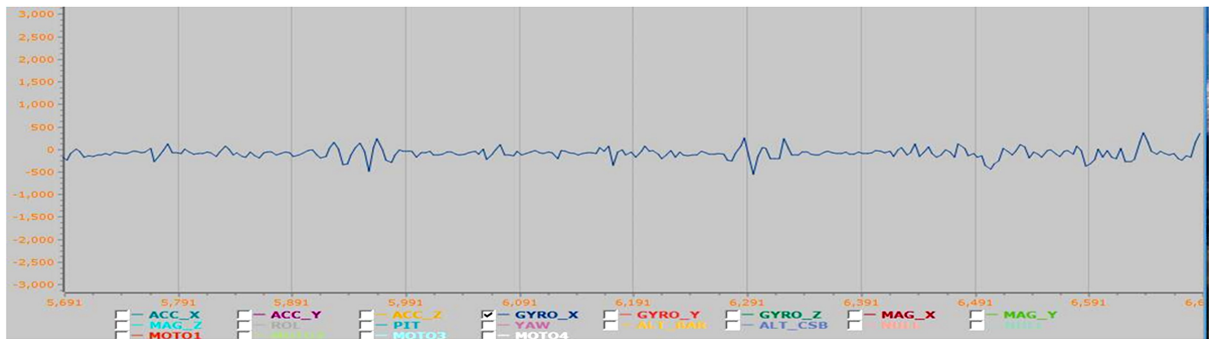


图 13 四旋翼无人机飞行上位机

Fig.13 The upper computer of Quadrotor Unmanned Aerial Vehicles



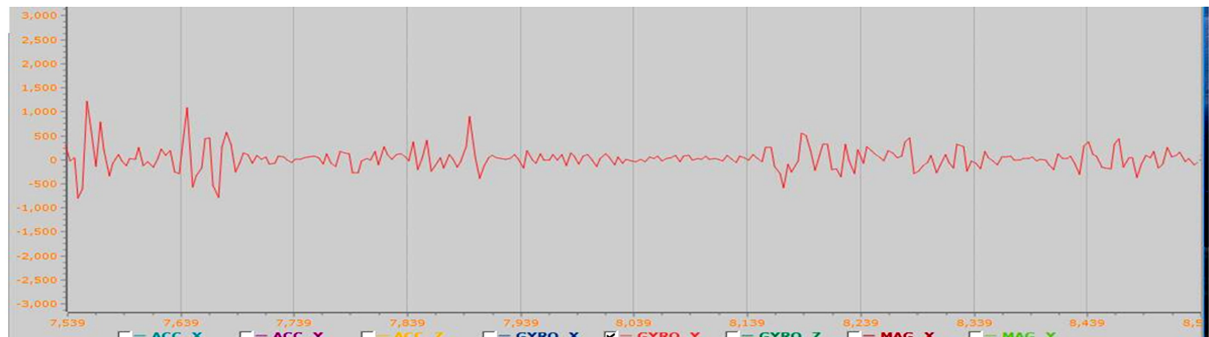
(a)



(b)

图 14 x 轴上的系统姿态角曲线:(a) $L=0.25\text{m}$ , (b) $L=0.45\text{m}$

Fig.14 The rolling angular of x axis (a) $L=0.25\text{m}$ , (b) $L=0.45\text{m}$



(a)

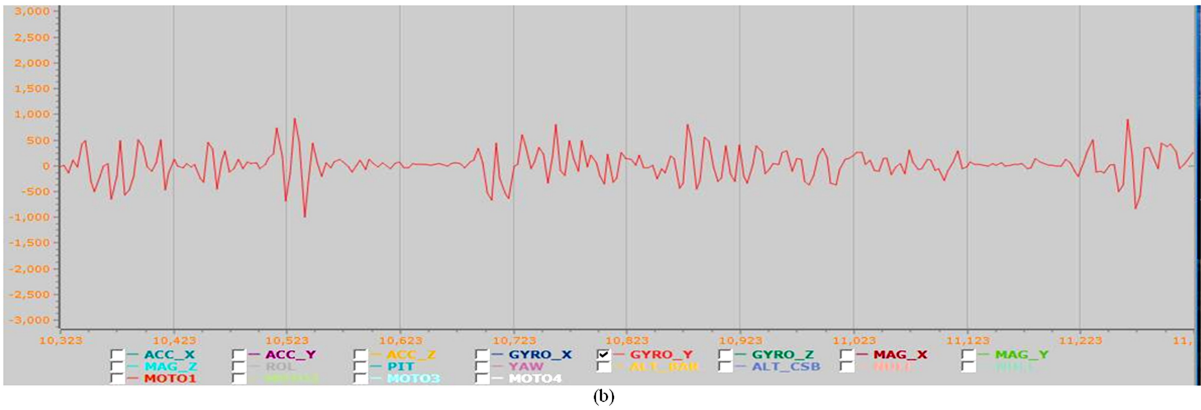


图 15 y 轴上的系统姿态角曲线:(a) $L=0.25\text{m}$ , (b) $L=0.45\text{m}$   
Fig.15 The rolling angular of y axis (a)  $L=0.25\text{m}$ , (b)  $L=0.45\text{m}$

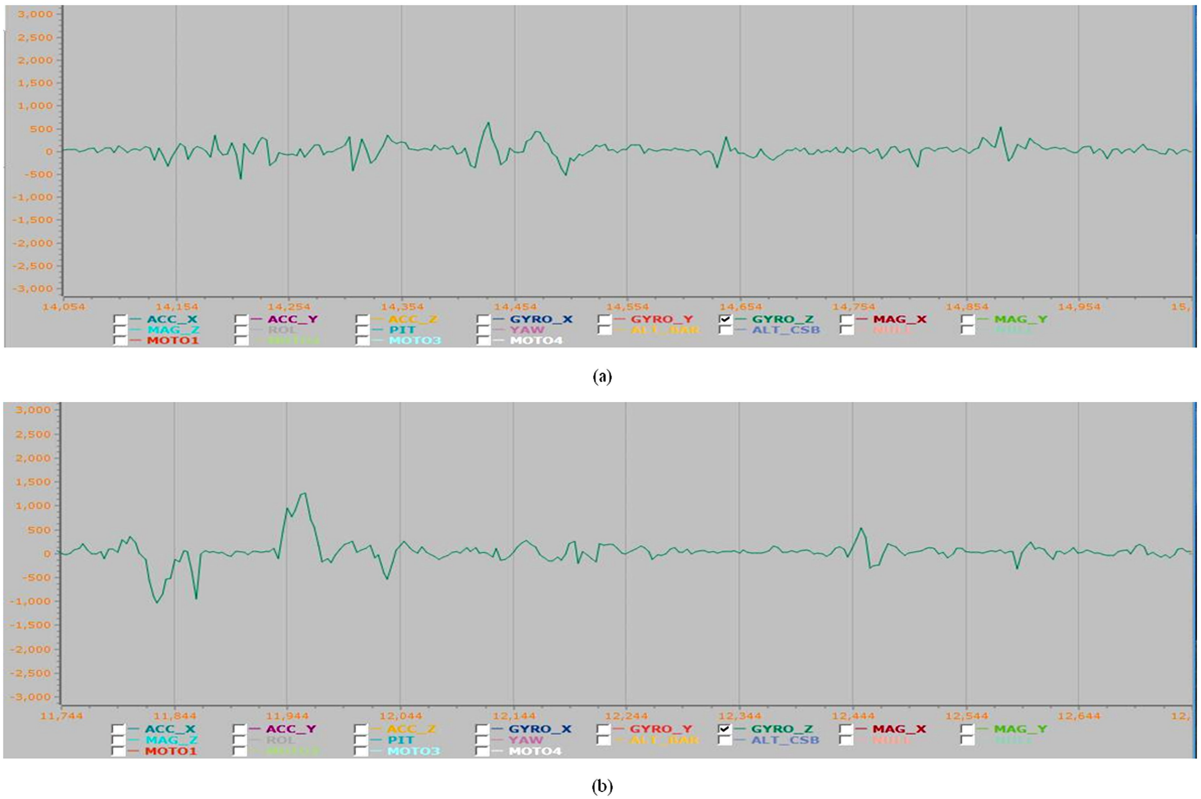


图 16 z 轴上的系统姿态角曲线:(a) $L=0.25\text{m}$ , (b) $L=0.45\text{m}$   
Fig.16 The rolling angular of z axis (a)  $L=0.25\text{m}$ , (b)  $L=0.45\text{m}$

## 6 结论

本文针对四旋翼无人飞行器偏航飞行过程的稳定性问题,采用基于空间算子的欧拉-庞卡莱方程建立模块化的运动学及动力学方程并引入李雅普诺夫指数方法建立四旋翼无人机的主要结构参数、运动参数与系统运动稳定性之间的量化关系。同时分析了变结构参数对系统稳定性的影响,为指导优化机械结构参数、控制输入对整个飞行器的运

动稳定性提供重要依据并得出改变机械结构参数可以用来提高系统的稳定性。

## 参 考 文 献

1 沈华勋,徐亮,陆宇平,等. 飞翼式柔性飞机纵向动力学建模与稳定性分析. 动力学与控制学报, 2016, 14 (3): 241~246 (Shen H X, Xu L, Lu Y P, et al. Longitudinal dynamic modeling and stability analysis of very flexible flying wings. *Journal of Dynamic and Control*,

- 2016, 14(3):241~246 (in Chinese))
- 2 刘云平, 黄希杰, 李先影, 等. 四旋翼飞行器的滑模 PID 轨迹跟踪控制. 机械科学与技术, 2017(12):1859~1865 (Liu Y P, Huang X J, Li X Y, et al. Trajectory tracking control of quadrotor unmanned aerial vehicles based on sliding mode PID. *Mechanical Science and Technology*, 2017(12):1859~1865 (in Chinese))
- 3 谭跃刚. 一类可控欠驱动机器人的动力学特性研究 [博士学位论文]. 武汉: 武汉理工大学, 2013 (Tan Y G. The dynamic analysis of a controllable underactuated robot [Ph.D Thesis]. Wuhan: Wuhan University of Technology, 2013 (in Chinese))
- 4 董明明. 某直升机起落架参数设计及其动力学特性分析 [博士学位论文]. 南京: 南京航空航天大学, 2010 (Dong M M. Design and dynamic analysis of a helicopter landing gear parameters [Ph.D Thesis]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2010 (in Chinese))
- 5 刘云平, 陈城, 张永宏, 等. 涵道式无人飞行器的动力学建模与运动稳定性分析. 中国机械工程, 2016, 27(14):1852~1856 (Liu Y P, Chen C, Zhang Y H, et al. Dynamics modeling and stability analysis of a ducted fan unmanned aerial vehicle. *Chinese Mechanical Engineering*, 2016, 27(14):1852~1856 (in Chinese))
- 6 刘云平, 陈城, 吴洪涛, 等. 涵道式无人机的悬停姿态控制及运动稳定性分析. 高技术通讯. 2017, 26(10-11):867~875 (Liu Y P, Chen C, Wu H T, et al. Hovering attitude control and stability analysis of a ducted-fan unmanned aerial vehicle (UAV). *High Technology Letters*, 2017, 26(10-11):867~875 (in Chinese))
- 7 Amiri N, Ramirez-Serrano A. Integral back stepping control of an unconventional dual-fan unmanned aerial vehicle. *Journal of Intelligent & Robot Systems*, 2013, 69:147~159
- 8 Aruneshwaran R. Neural adaptive flight controller for ducted-fan UAV performing nonlinear maneuver. Computational Intelligence for Security and Defense Applications (CISDA), Singapore, 2013 IEEE Symposium on, 2013: 51~56
- 9 Yang B L, Lu W, David J. Modeling and global trajectory tracking control for an over-actuated MAV. *Advanced Robotics*, 2014, 28(3):145~155
- 10 Wolf A, Swift J B, Swinney H L, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physics D Nonlinear Phenomena*. 1985, 16(3):285~317
- 11 Sekhvat P, Sepehri N, Wu Q. Calculation of Lyapunov exponents using nonstandard finite difference discretization scheme: a case study. *Journal of Difference Equations and Applications*, 2004, 10(4):369~378
- 12 Yang C X, Wu Q. A robust method on estimation of Lyapunov exponents from a noise time series. *Nonlinear Dynamics*, 2011, 64(3):279~292
- 13 Müller P C. Calculation of Lyapunov exponents for dynamic systems with discontinuities. *Chaos Solitons Fractals*, 1995(5):1671~1681
- 14 Yang C X, Wu Q. On stability analysis via Lyapunov exponents calculated from a time series using nonlinear mapping-a case study. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 59(1):239~257
- 15 Asokanthan S F, Wang X H. Characterization of torsional instability in a Hooke's joint-driven system via maximal Lyapunov exponents. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 194(1):83~91
- 16 Gilat R, Aboudi J. Parametric stability of non-linearly elastic composite plates by Lyapunov exponents. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 235(4):627~637
- 17 Sun Y M, Wu Q. Stability analysis via the concept of Lyapunov exponents: a case study in optimal controlled biped standing. *International Journal of Control*, 2012, 85(12):1952~1966
- 18 张文超, 谭思超, 高璞珍. 基于 Lyapunov 指数的摇摆条件下自然循环流动不稳定性混沌预测. 物理学报, 2013, 62(6):53~60 (Zhang W C, Tan S C, Gao P Z. Chaotic forecasting of natural circulation flow instabilities under rolling motion based on Lyapunov exponents. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(6):53~60 (in Chinese))
- 19 Dingwell J B. Lyapunov exponents. In: Wiley Encyclopedia of Biomedical Engineering. Wiley, New York, 2006
- 20 Sun Y M, Wu Q. A radial-basis-function network-based method of estimating Lyapunov exponents from a scalar time series for analyzing nonlinear systems stability. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 70(2):1689~1708
- 21 刘云平, 吴洪涛. 基于旋量递推的自由漂浮树形机器人雅可比矩阵推导. 中国机械工程, 2010, 21(11):1275~1347 (Liu Y P, Wu H T. Deduction of jacobian matrix for free-floating branching space robot based on recursion of screw. *Chinese Mechanical Engineering*, 2010, 21(11):1275~1347 (in Chinese))
- 22 Ogawa Y, Venture G, Ott C. Dynamic parameters identification of a humanoid robot using joint torque sensors and

/or contact forces. *IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots, Madrid*, 2014, 122:457~462

23 Derafa L, Madani T, Benallegue A. Dynamic modelling and experiential identification of four rotors helicopter parameters. *IEEE International conference on Industrial Technology*, 2006:1834~1839

STRUCTURAL PARAMETERS OPTIMIZATION AND STABILITY  
ANALYSIS OF THE QUARDROTOR UNMANNED AERIAL VEHICLES  
BASED ON LYAPUNOV EXPONENTS \*

Chen Cheng<sup>1,2,3†</sup> Fu Weijie<sup>2,3</sup> Liu Na<sup>2,3</sup> Mao Chunlei<sup>2,3</sup> Han Jiwei<sup>2,3</sup>  
(1.Nanjing Hydraulic Research Institute, Nanjing 210029, China)

(2.Nanjing Automation Institute of Water Conservancy and Hydrology, Nanjing 210012, China)

(3.Hydrology and Water Resources Engineering Research Center for Monitoring, Nanjing 210012, China)

**Abstract** In order to improve the kinetic stability of quadrotor unmanned aerial vehicles, the effect of mechanical and structural parameters on the system stability was studied. The process during yawing state is taken as an example for investigation. According to the calculation process of Lyapunov exponents based on the dynamical model, the key mechanical and structural parameters significantly influencing the dynamic stability were obtained. The method of Lyapunov exponents was adopted to establish the relationship between such key parameters and the motion stability, which was utilized to design the mechanical and structural parameters, and then to optimize the stability control system. Finally, the theoretical analysis was validated through experimental tests. Compared with the Lyapunov's second method, the main advantage of this method is that it is easy to construct the process of calculating exponent, which makes the stability analysis for complicated nonlinear systems possible.

**Key words** quadrotor unmanned aerial vehicles, mechanical-structure parameters, dynamic stability, Lyapunov exponent

Received 6 June 2018, revised 5 September 2018.  
\* The project supported by the Special Funds of Central Public Welfare Basic Scientific Research Institutes.  
† Corresponding author E-mail: chencheng\_nuist@sina.com