小行星 433 Eros 本体悬停轨道的稳定控制*

林翰文 曾祥远*

(北京理工大学自动化学院,北京 100081)

摘要 本文研究了近地小行星 433 Eros 本体悬停轨道的稳定控制问题.文中用三轴椭球体模型近似 Eros 引力 场分布,建立了航天器在其引力场内的动力学模型,并且应用等加速度变截距时变滑模控制设计了悬停控制 器.该方法的滑模面选取与常规滑模控制不同,且不存在到达阶段.仿真分析从不同的初始条件和悬停条件入 手,验证控制器的有效性,并讨论了航天器的速度与控制加速度的幅值随滑模面切换时间的变化情况.

关键词 433 Eros, 本体悬停, 时变滑模控制

DOI: 10.6052/1672-6553-2015-011

引言

人类对小行星的探索充满了热情,已先后开展 了多次探测活动,并进行了大量的理论研究,小行 星探测已经逐渐成为世界范围内的研究热点.1996 年2月17日,美国国家航空航天局(NASA)发射近 地小行星交会探测任务探测器"尼尔号"(NEAR), 成功绕飞并最终着陆 433 Eros 小行星.2003 年 5 月,日本宇航局(JAXA)的"隼鸟号"(Hayabusa)探 测器成功发射,之后经过 7 年的努力,成功地在 25143 Itokawa 小行星上采集样本并于 2010 年返回 地球.欧洲空间局(ESA)推出的登陆彗星的"罗塞 塔"(ROSETTA)任务,经过长达 10 年的飞行,于 2014 年飞抵 67P 彗星^[1].

在小行星探测中,悬停飞行是一种非常重要的 探测方式,能够帮助人们获取小行星某一特定区域 的外形及地貌分布信息等.同时,作为着陆和采样 返回等任务的关键一步,悬停探测甚至决定着任务 的成败.由于小行星的引力场环境非常复杂,要实 现航天器在小行星引力场内的悬停,大多需要主动 控制^[2].作为控制方法的一类,滑模控制在小行星 的悬停问题^[3]和航天器充液晃动^[4]中均有应用.对 于常规滑模控制,在其滑动阶段,系统的动力学取 决于滑模面的设计,具有很好的鲁棒性,而在到达 阶段缺乏鲁棒性将直接导致控制性能降低^[5]. 为了解决常规滑模控制的到达阶段没有鲁棒 性这一问题,人们提出一种时变滑模控制^[6].常规 滑模控制中滑模面是预先根据期望的系统响应设 计好的,没有考虑系统的初值,并且在系统响应的 整个过程中是恒定不变的.时变滑模控制采取了和 常规滑模控制不同的滑模面选择方法,主要区别 有:(1)时变滑模控制中滑模面的设计要考虑系统 的初值,使得系统初值在初始时刻就位于所设计的 滑模面上,不存在到达阶段;(2)在系统响应过程 中,滑模面不再是恒定不变的,而是随时间按照预 先设定好的规律进行变化.上述滑模面的设计要使 系统到达滑模面后能够获得期望的动力学性能.这 样一来,在理想情况下,系统的相轨迹会始终停留 在滑模面上,进而改变了常规滑模控制在到达阶段 没有鲁棒性的弱点^[5].

本文首先给出近地小行星 433 Eros 本体系(星体固连坐标系)定义和外部引力场模型,建立航天器在其引力场内的动力学方程;其次,用等加速度 变截距时变滑模控制方法设计了悬停控制器;最后,选取不同初始条件和悬停条件进行数值仿真, 验证本文时变滑模控制方法的控制性能,并分析航 天器的速度与控制加速度的幅值与滑模面切换时间之间的关系.

1 Eros 引力场模型与航天器动力学方程

本文以小行星 Eros 为研究对象,将其近似为

; 通讯作者 E-mail: zeng@ bit.edu.cn

²⁰¹⁶⁻⁶⁻¹⁴ 收到第1稿, 2016-12-4 收到修改稿.

^{*}国家自然科学基金青年基金(11602019)、北京理工大学优秀青年教师资助计划(2015YG0605)





图 1 小行星 433 Eros 的三轴椭球体模型及其固连坐标系 Fig.1 Tri-axial ellipsoidal model of 433 Eros and its body-fixed frame

小行星球坐标系 *o-rθλ*:以小行星的质心为球 坐标系的原点 *o*,*r* 为航天器到小行星质心的距离, *θ* 为纬度角,*λ* 为经度角(见图 1).

小行星固连坐标系 o-xyz:以小行星的质心为 固连坐标系原点 o,坐标系的 x 轴、y 轴、z 轴分别指 向小行星的最小、中间、最大转动惯量的方向,o-xyz 构成右手直角坐标系(见图 1).假设小行星的旋转 速度恒定不变,即小行星以 z 轴为自转轴匀速旋 转,其角速度为 ω=[0,0,ω]^T.

1.1 433 Eros 引力场模型

2 I I

根据小行星的球谐函数引力势能表达式^[7]可 知,433 Eros 的二阶二次引力势能表达式为:

$$U = -\frac{GM}{r} \left\{ 1 + \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 \left[\frac{1}{2} C_{20} (3\sin\theta - 1) + 3C_{22} \cos^2\theta \cos(2\lambda) \right] \right\}$$
(1)

分别将上式对 x、y、z 求偏导,可得航天器所受三轴 引力加速度分别为:

$$g_{x} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$= -\frac{GM}{r^{3}} \left\{ 1 - \left(\frac{R_{0}}{r}\right)^{2} \left[\frac{3}{2}C_{20}(1 - 5\sin^{2}\theta) + 3C_{22}(2 - 5\cos^{2}\theta\cos(2\lambda))\right] \right\}$$

$$g_{y} = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$= -\frac{GM}{r^{3}} \left\{ 1 - \left(\frac{R_{0}}{r}\right)^{2} \left[\frac{3}{2}C_{20}(1 - 5\sin^{2}\theta) - 3C_{22}(2 + 5\cos^{2}\theta\cos(2\lambda))\right] \right\}$$

$$g_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$= -\frac{GM}{r^3} \left\{ 1 - \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 \left[\frac{3}{2}C_{20}(3 - 5\sin^2\theta) - 15C_{22}(\cos^2\theta\cos(2\lambda))\right] \right\}$$
(2)

式中,*G*为引力常数,*M*为 Eros 的质量, R_0 为 Eros 的最大轴半径, $C_{20} = \frac{2c^2 - (a^2 + b^2)}{10a^2}$, $C_{22} = \frac{a^2 - b^2}{20a^2}$,其中,a、b、c分别是三轴椭球体的三个轴半径^[8-9].

1.2 航天器动力学方程

假设航天器在小行星固连坐标系中的位置矢 量为**r**,由于小行星的自转,产生了科氏加速度 2ω ×**r**和离心加速度 ω×ω×**r**.容易得到航天器的轨道 动力学方程为:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}(\mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$
(3)

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}c + \mathbf{g} \tag{4}$$

其中,**a***c* 为控制加速度,**g** 为小行星的引力加速度. 由于小行星匀速旋转,即 $\omega = [0,0,\omega]^{T}, \dot{\omega} = [0,0,0]^{T},所以式(3)所示的方程可写为:$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}c + \mathbf{g} - 2\mathbf{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{\omega} \times \mathbf{\omega} \times \mathbf{r} \tag{5}$$

或者

$$\begin{cases} \ddot{x} = acx + g_x + 2\omega \dot{y} + \omega^2 x \\ \ddot{y} = acy + g_y - 2\omega \dot{x} + \omega^2 y \\ \ddot{z} = acz + g_z \end{cases}$$
(6)

2 控制器设计

对于航天器的轨道动力学方程,可将其视为二 阶非线性不确定系统,其微分方程如下:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{V}} = \ddot{\mathbf{r}} = -2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{g} + \mathbf{a}c = \mathbf{f}(\mathbf{r}) + \mathbf{a}c \end{cases}$$
(7)

定义误差状态向量: $\mathbf{e}(\mathbf{t}) = \mathbf{r} - \mathbf{r}d$, $\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}d$.式 中, $\mathbf{r}d$ 为航天器处于悬停状态时的位置矢量, $\dot{\mathbf{r}}d = 0$ 为航天器处于悬停状态时的速度.设计滑模面为:

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}} + k\mathbf{e} + \begin{cases} \mathbf{A}t^2 + \mathbf{B}t + \mathbf{C}, \ t \leq T \\ 0, \ t > T \end{cases}$$
(8)

式中,*k*为滑模面斜率,*T*为两种滑模面切换时间. 式(8)满足下列两个条件:

(1)在 t=0 时,系统误差处于滑模面上,所以

$$\dot{\mathbf{e}}(0) + k\mathbf{e}(0) + \mathbf{C} = 0 \tag{9}$$

(2)式(8)中右边在 T 时刻应该满足连续平滑 过渡,所以)

$$\begin{cases} \mathbf{A}T^{2} + \mathbf{B}T + \mathbf{C} = 0 \\ 2\mathbf{A}T + \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$
(10)
$$\mathbb{K} \, \underline{\Box} \, \underline{\Box} (9) \, \pi \, \underline{\Box} (10) \, \overline{\Box} \, \mathbb{H} \, \underline{B} :$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} = \frac{\mathbf{C}}{2} = -\frac{\dot{\mathbf{e}}(0) + k\mathbf{e}(0)}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} T^2 & T^2 \\ \mathbf{B} = -2\mathbf{A}T = 2 \frac{\dot{\mathbf{e}}(0) + k\mathbf{e}(0)}{T} \end{cases}$$
(11)

$$\left(\mathbf{C} = -\dot{\mathbf{e}}(0) - k\mathbf{e}(0)\right)$$

式中,**e**(0)、**ė**(0)分别为 **e**、**ė** 的初值.取候选正定的 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{s}^2 \tag{12}$$

沿状态轨迹求导得到:

$$\dot{V} = \mathbf{s}\dot{\mathbf{s}} = \begin{cases} \mathbf{s}(\ddot{\mathbf{e}} + k\dot{\mathbf{e}} + 2\mathbf{A}t + \mathbf{B}), \ t \leq T \\ \mathbf{s}(\ddot{\mathbf{e}} + k\dot{\mathbf{e}}), \ t > T \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \mathbf{s}[\ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{r}}d + k(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}d) + 2\mathbf{A}t + \mathbf{B}], \ t \leq T \\ \mathbf{s}[\ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{r}}d + k(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}d)], \ t > T \end{cases}$$
(13)

需要设计控制量 ac 使得 V 半负定. 控制器形式为: ac=ace+acv,式中, ace 为等效控制律, acs 为等切换 控制律.

(1)设计等效控制律 ace,使得
$$\dot{\mathbf{s}}$$
=0,即
 $\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}-\ddot{\mathbf{r}}d+k(\dot{\mathbf{r}}-\dot{\mathbf{r}}d)+2\mathbf{A}t+\mathbf{B}=0, t \leq T \\ \ddot{\mathbf{r}}-\ddot{\mathbf{r}}d+k(\dot{\mathbf{r}}-\dot{\mathbf{r}}d)=0, t>T \end{cases}$
(14)

由式(7)可知, $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) + \mathbf{a}c$,将其带入式(14)可求出 等效控制律,即:

$$\mathbf{a}ce = \begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}d - k(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}d) - \mathbf{f}(\mathbf{r}) - 2\mathbf{A}t - \mathbf{B}, \ t \leq T \\ \ddot{\mathbf{r}}d - k(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}d) - \mathbf{f}(\mathbf{r}), \ t > T \end{cases}$$
$$= \begin{cases} -k\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{f}(\mathbf{r}) - 2\mathbf{A}t - \mathbf{B}, \ t \leq T \\ -k\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{f}(\mathbf{r}), \ t > T \end{cases}$$
(15)

(2)设计等切换控制律 acs.根据滑模控制律的
 设计方法^[10]可知, acs = -ksgn(s).

因此,设计控制律为:

$$\mathbf{a}c = \mathbf{a}ce + \mathbf{a}cs = \begin{cases} -k\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{f}(\mathbf{r}) - 2\mathbf{A}t - \mathbf{B} - k\operatorname{sgn}(s), \ t \leq T \\ -k\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{f}(\mathbf{r}) - k\operatorname{sgn}(s), \ t > T \end{cases}$$
(16)

3 数值仿真与分析

本文选取"尼尔号"任务探测目标小行星 433 Eros为研究对象,其质量约为 $M=6.69\times10^{15}$ kg,旋转角 速度为 $\omega=3.31\times10^{-4}$ rad/s,周期为5小时16分.近似 椭球体三轴半径分别为 $a=20000m,b=7000m,c=6500m,引力常数取G=6.67\times10^{-11}N\cdotm^2/kg^2,仿真中$ 假设其密度均匀分布且不考虑干扰项^[3].

假设航天器在小行星 Eros 的北极上空沿着 z

轴运动,纬度为 θ=90°,经度为 λ=0.文中对四种不同的工况进行仿真,所采用的初始数据如表 1 所示,控制器各参数如表 2 所示.

表1 仿真算例中初始参数

Table 1 Initial conditions for numerical simulations

四种	初始位置	悬停位置	初始速度	悬停速度
情况	/m	/m	$/(m \cdot s^{-1})$	$/(m \cdot s^{-1})$
S1	$[0,0,11000]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,10000]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,1]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,0]^{\mathrm{T}}$
S2	$[0,0,11000]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,8000]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,1]^{T}$	$[0,0,0]^{\mathrm{T}}$
S3	$[0,0,9000]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,8000]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,1]^{T}$	$[0,0,0]^{\mathrm{T}}$
S4	$[0,0,9000]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,10000]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,1]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,0]^{\mathrm{T}}$

表 2 滑模控制器参数

Table 2 Parameters of sliding model controller

四种 情况	k	T∕s	А	В	С
S1	1	200	$[0,0,-0.025025]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,10.01]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,-1001]^{T}$
S2	1	200	$[0,0,-0.075025]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,30.01]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,-3001]^{T}$
S3	1	200	$[0,0,-0.025025]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,10.01]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,-1001]^{T}$
S4	1	200	$[0,0,0.024975]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,-9.99]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,999]^{\mathrm{T}}$

仿真结果整理于图 2~图 5 中,其中,图 2~图 4 都包含了 S1~S4 四种情况,图 2 为航天器在 z 轴上 的位置变化情况,图 3 为 z 轴上的速度变化情况, 图 4 为 z 轴上的加速度变化情况.图 5 为 S1 算例中 航天器在 e-e 平面上的相轨迹.







基于上述仿真结果,航天器在滑模面切换时间 T=200s时均到达悬停位置.其中,S1和S3这两种 情况的速度曲线与加速度曲线重合,表明在等加速 度变截距时变滑模控制系统中,航天器总能在滑模 面切换时间T时刻到达悬停状态,与航天器的初始 条件和悬停条件无关.图5表明航天器的相轨迹在 初始时刻就位于滑模面上,并沿着滑模面滑动,不 存在到达阶段.图3和图4表明,在系统启动的瞬 间,控制加速度 a_e会变得很大,导致航天器的瞬时 速度变得很大,其作用是使得系统的到达阶段时间 变得很短.上述现象可以理解为到达阶段在系统启 动的瞬间就结束了,即系统几乎不存在到达阶段. 之后,加速度在-1m/s²和1m/s²(沿 oz 轴方向为 正)之间高频跳变,则是为了确保航天器匀速运动 到悬停位置,并保持悬停状态.

从图 3 和图 4 中还可以看出,航天器速度最大 值为-9.74m/s,控制加速度最大值为-11.69m/s². 显然,这两个值过大,对发动机性能的要求太高,因 而,需要改变参数来降低速度和控制加速度的最大 值.为了得出速度和控制加速度的最大值与切换时 间 *T* 之间的关系,下面针对 S1 再次进行仿真.假设 滑模面斜率 k 保持不变,取切换时间 *T* 为[200, 800] s 区间内间隔为 50 s 的 13 个不同值,其他参数取值不变.仿真结果如图 6 和 7 所示,其中,图 6 为航天器速度最大值随切换时间 T 的变化情况,图 7 为控制加速度最大值随 T 的变化情况.



Fig.6 Maximum velocity variation with switching time T



图 7 控制加速度最大值随切换时间 *T* 的变化曲线 Fig.7 Maximum acceleration variation with switching time *T*

仿真结果表明:随着 T 的增加,控制所需航天器的速度与加速度最大值逐渐减小,而且,随着 T 越来越大,最大值的变化量越来越小.因此,可以通过改变 T 的取值,来减小速度与控制加速度的幅值,以降低控制系统对发动机性能的要求.

5 总结

本文讨论了航天器在近地小行星 433 Eros 引 力场内的悬停控制问题.文中将 433 Eros 近似为三 轴椭球体,建立了其引力场内的轨道动力学方程, 设计了等加速度变截距时变滑模控制器,并对四种 情况进行了数值仿真.仿真结果表明,航天器到达 悬停状态所需时间只与滑模面切换时间有关,而与 初始条件和悬停条件无关,验证了上述时变滑模控 制器对悬停轨道控制的有效性.特别地,增加滑模 面切换时间,航天器的速度与控制加速度幅值会随 之减小,即降低了控制系统对发动机的性能要求.

参考文献

- 崔平远,乔栋.小天体附近轨道动力学与控制研究现状 与展望.力学进展,2013,43(5):526~539 (Cui P Y, Qiao D. Research progress and prospect of orbital dynamics and control near small bodies. *Advances in Mechanics*, 2013,43(5):526~539 (in Chinese))
- 2 Zeng X Y, Gong S P, Li J F, et al. Solar sail body-fixed hovering over elongated asteroids. *Journal of Guidance*, *Control*, and Dynamics, 2016,39(6):1223~1231
- 3 Furfaro R. Hovering in Asteroid Dynamical Environments Using Higher-Order Sliding Control. Journal of Guidance Control & Dynamics, 2015,38(2):263~279
- 4 顾黄兴,齐瑞云. 基于滑模控制的充液航天器燃料晃动 抑制研究. 动力学与控制学报, 2015,13(2): 138~143 (Gu H X, Qi R Y. Attitude control of spacecraft with fuel slosh based on sliding mode control. *Journal of Dynamics and Control*, 2015,13(2):138~143 (in Chinese))
- 5 刘金琨,孙富春. 滑模变结构控制理论及其算法研究与 进展. 控制理论与应用, 2007,24(3):407~418 (Liu J K, Sun F C. Research and development on theory and algorithms of sliding mode control. *Control Theory & Applications*, 2007,24(3):407~418 (in Chinese))
- 6 张克勤,苏宏业,庄开宇等. 二阶不确定离散系统的时变

滑模面变结构控制. 浙江大学学报, 2002, 36(4):416~420 (Zhang K Q, Su H Y, Zhuang K Y, Chu J. Variable structure control with time-varying sliding surface for a class of second-order uncertain discrete system. *Journal of Zhe-jiang University* (*Engineering Science*), 2002, 36(4):416~420 (in Chinese))

- 7 张振江,崔祜涛,任高峰.不规则形状小行星引力环境建 模及球谐系数求取方法. 航天器环境工程, 2010,27 (3):383~388 (Zhang Z J, Cui H T, Ren G F. Modeling for the gravitation potential environment of an irregularshaped asteroid and the spherical harmonic coefficient estimation. *Spacecraft Environment Engineering*, 2010,27(3): 383~388 (in Chinese))
- 8 郭延宁,李晓宇,马广富等.小行星重力场全球及局部球 谐系数计算与仿真.哈尔滨工业大学学报,2015,47(5): 13~19 (Guo Y N, Li X Y, Ma G F, Cui H T. Computation and simulation of global and local spherical harmonic coefficients of asteroid gravity field. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2015,47(5):13~19 (in Chinese))
- 9 Lee D, Vukovich G. Adaptive Sliding Mode Control for Spacecraft Body-Fixed Hovering in The Proximity of an Asteroid. Aerospace Science and Technology, 2015, 46:471~483
- 10 Yu X, Kaynak O. Sliding-Mode Control With Soft Computing: A Survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009,56(9):3275~3285

STABILITY CONTROL OF BODY-FIXED HOVERING OVER ASTEROID 433 EROS*

LIN Hanwen ZENG Xiangyuan[†]

(School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract This paper investigates the stability control of body-fixed hovering orbit over the near-Earth asteroid 433 Eros. Its gravitational field is approximated simulated by using the triaxial ellipsoidal model. Dynamical equations of the spacecraft near 433 Eros are derived. The time-varying sliding mode control with the same acceleration and variable intercept is adopted to design the hovering controller. Meanwhile, the sliding surface in this method is different from the conventional sliding mode control, where there is no reaching phase. Numerical simulations are then carried out with different initial conditions and hovering conditions to evaluate the effectiveness of the designed controller. The maximum values of spacecraft velocity and acceleration are analyzed by varying the switching time of sliding surface.

Key words 433 Eros, body-fixed hovering, time-varying sliding-mode control

Received 14 June 2016, revised 4 December 2016.

^{*} NationalNatural Science Foundation of China (11602019), The Excellent Young Teachers Program of Beijing Institute of Technology (2015YG0605)

[†] Corresponding author E-mail: zeng@ bit.edu.cn