

圆柱形贮箱液晃系统稳定性边界分析*

李清 余本嵩 金栋平[†]

(南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室,南京 210016)

摘要 本文研究了纵向激励下液晃系统的稳定性边界. 首先利用等效摆模型获得纵向激励下液体晃动的等效动力学 Mathieu 方程, 然后利用摄动法得到随阻尼、储液高度及贮箱直径变化时的液晃系统的稳定区域. 结果表明, 液体晃动阻尼、储液量及贮箱尺寸对晃动稳定性具有显著影响.

关键词 液体晃动, 等效力学模型, Mathieu 方程, 稳定性边界

DOI: 10.6052/1672-6553-2015-011

引言

航天器中携带的液体燃料对其动力学有重要影响^[1]. 当航天器在变轨机动过程中极易导致贮箱内的液体晃动, 造成对容器壁冲击, 严重影响充液航天器的稳定性, 给姿态控制等带来很大影响^[2]. 因此, 液体晃动受到广泛关注.

早期, Abramson 从理论分析、数值计算、实验等对液体晃动进行了系统和深入的研究^[3]. Ibrahim 对液体晃动动力学研究进行了系统的总结^[4]. 岳宝增结合我国近年来的研究成果, 系统介绍了计算大幅非线性晃动的数值方法, 包括 Galerkin 法、ALE 有限元方法等^[5]. 其中, 液体晃动的等效力学模型受到学者的关注^[6,7]. Kang 等建立了液体火箭晃动试验的简化单摆模型, 研究了粘性阻尼对纵向激励下的火箭内液体晃动稳定性的影响^[8]. 李青等建立了液体晃动与航天器横向运动耦合的动力学方程, 发现耦合作用会扩大不稳定区域^[9]. Kana 等利用球-摆模型研究了贮箱内液体旋转的稳定性, 指出使用一个常量参数的系统模型不能描述液体的旋转运动^[10].

在外激励的作用下, 充液系统具有十分复杂的非线性动力学行为. 钟顺等通过流体势函数进行模态展开, 分析了“混沌同步性”这一现象^[11]. Stephen 等利用有限元法及有限差分法研究了封闭的液晃系统在受到不同方向激励时的液体晃动非线

性动力学^[12]. 王为等实验研究了工程上常见的半球形容器中的液体晃动, 发现可以将晃动过程分为比较明显的线性和非线性两个部分^[13]. 岳宝增等研究了微重力环境下的三维贮箱液体的非线性晃动^[14].

已有针对液体晃动稳定性的研究, 大多是参数一定条件下的系统稳定性分析, 未见阻尼、储液量及贮箱大小对稳定性的影响研究. 此外, 现有研究大多考虑液体晃动的动力学, 而利用等效力学模型分析非线性晃动行为的研究较少. 本文在基于等效摆模型的基础上, 针对小幅晃动, 得到液体晃动的等效 Mathieu 方程, 并利用摄动法给出晃动稳定性边界.

1 基本方程

研究图 1 所示的液晃系统及其相应的等效摆模型. 等效摆模型由贮箱、单摆、等效质量 m_0 组成. 等效模型的参数为^[4]:

$$l_1 = \frac{d}{3.68} \coth\left(3.68 \frac{h}{d}\right) \quad (1)$$

$$m_1 = \frac{m_T d}{4.4h} \tanh\left(3.68 \frac{h}{d}\right) \quad (2)$$

$$m_0 = m_T - m_1 \quad (3)$$

式中 l_1 、 h 、 d 、 m_1 、 m_T 分别表示等效摆长、贮箱内液体高度、贮箱直径、第一阶晃动质量、液体的总质量.

2016-10-9 收到第 1 稿, 2016-12-15 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11672125)及江苏高校优势学科建设工程资助项目

[†] 通讯作者 E-mail: jindp@nuaa.edu.cn

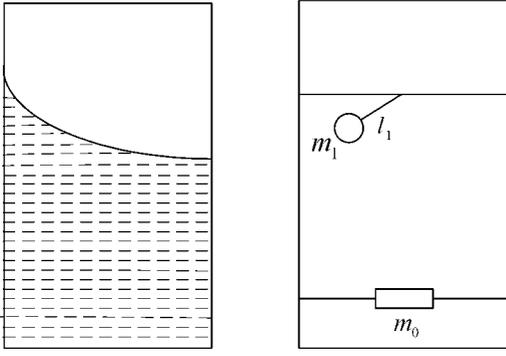


图1 充液系统和等效摆模型

Fig.1 A liquid-filled tank and its equivalent model

在纵向位移激励下,系统动力学方程为:

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{l_1}(g - A\Omega^2 \cos\Omega t) \sin\theta = 0 \quad (4)$$

式中 A 为激励幅值, Ω 为激励频率. 设液体小幅晃动, 并令 $\tau = \Omega t/2$, $\delta = 4g/(\Omega^2 l_1)$, $\varepsilon = 2A/l_1$, 则有 Mathieu 方程:

$$\theta'' + (\delta - 2\varepsilon \cos 2\tau)\theta = 0 \quad (5)$$

式中“'”表示对无量纲时间求导数. 当计入阻尼时, 则有:

$$\theta'' + 2\mu\theta' + (\delta - 2\varepsilon \cos 2\tau)\theta = 0 \quad (6)$$

其中 $\mu = 2\xi_1\omega_1/\Omega$, 这里 ξ_1 和 ω_1 分别代表液体晃动的一阶阻尼比和一阶晃动频率.

2 纵向激励下系统的稳定性边界

考虑小阻尼比, 利用摄动法确定系统稳定性边界. 对于 $0 \leq |\varepsilon| \ll 1$, 根据待求周期解 $\theta(t)$ 及稳定性边界 $\delta(\varepsilon)$, 可得:

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \dots \\ \mu = \varepsilon\mu_1 + \varepsilon^2\mu_2 + \dots \\ \delta(\varepsilon) = \delta_0 + \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + \dots \end{cases} \quad (7)$$

其中 $u_r (r=1, 2, 3, \dots)$ 以 π 或 2π 为周期. 将上式代入方程(8), 比较 ε 同次幂系数, 可得:

$$\theta''_0 + \delta_0\theta_0 = 0 \quad (8)$$

$$\theta''_1 + \delta_0\theta_1 = -(\delta_1 + 2\cos 2T)\theta_0 - 2\mu_1\theta'_0 \quad (9)$$

$$\theta''_2 + n^2\theta_2 = (\delta_1 - 2\cos 2T)\delta_1 - 2\mu_1\theta'_1 - \delta_2\theta_0 - 2\mu_2\theta'_0 \quad (10)$$

方程(12)周期解形如:

$$\theta_0 = a\cos\sqrt{\delta_0}T + b\sin\sqrt{\delta_0}T \quad (11)$$

式中 $\delta_0 = n^2 (n=0, 1, 2, 3, \dots)$.

a. $\delta_0 = 0$, 稳定性边界为:

$$\delta(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^2}{2} \quad (12)$$

b. $\delta_0 = 1$, 稳定性边界为:

$$\delta(\varepsilon) = 1 \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4\mu} - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \quad (13)$$

c. $\delta_0 = 4$, 稳定性边界为:

$$\delta(\varepsilon) = 4 + \frac{\varepsilon^2}{6} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^4}{16} + 16\mu^2} \quad (14)$$

3 算例分析

由于外激励频率是实数, 因而只需考虑稳定性条件(13-14), 从而获得稳定性区域, 下文中斜线填充区域为不稳定区域、空白区域为稳定区域.

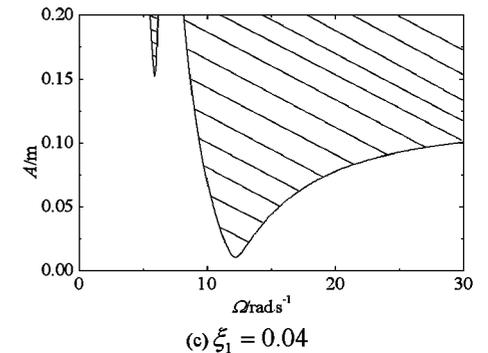
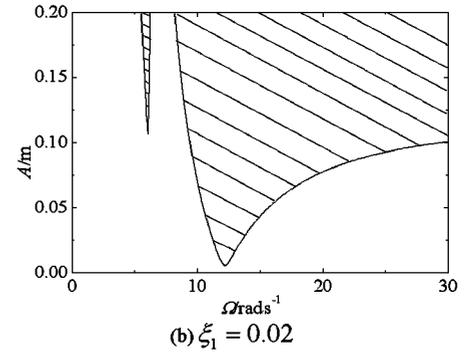
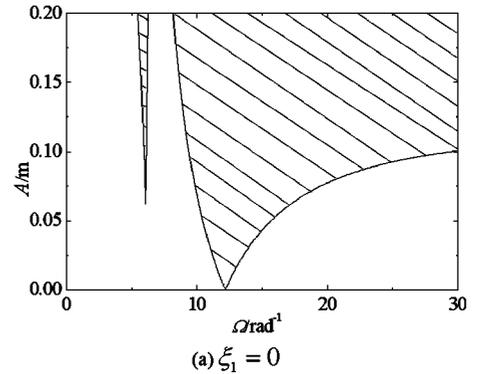


图2 阻尼对稳定性的影响

Fig.2 Effect of damping on stability

首先, 分析阻尼对稳定性的影响. 设圆柱形贮

箱直径 0.9m, 充液高度 0.4m, 计算等效力学参数后求得稳定性区域, 如图 2 所示. 从图 2 可见, 随阻尼增大, 亚谐波和谐波不稳定区域逐渐变小, 不稳定区域向高幅值处移动.

其次考虑储液高度对稳定区域的影响. 设贮箱直径 $d=0.9\text{m}$, 贮箱内液体高度分别设为 0.5m、0.3m 和 0.1m. 幅-频稳定性边界如图 3 所示. 从图 3 可见, 随储液高度的减少, 不稳定性区域逐渐减小, 不稳定区域向低频移动. 这是因为液体高度减小使整个系统的阻尼变小.

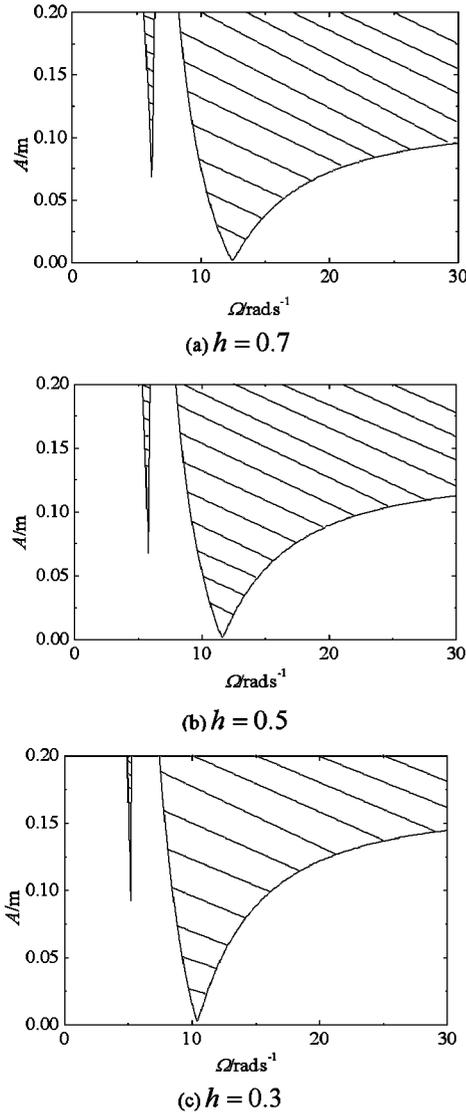


图3 贮箱直径对稳定性的影响

Fig.3 Effect of liquid diameter on stability

假设贮箱内充液高度为 0.4m, 贮箱直径分别设为 0.9m、0.8m 和 0.7m. 幅-频稳定性边界如图 4 所示. 从图 4 可以看出, 在贮箱内液体高度保持不变的情况下, 随着贮箱半径的减少, 其不稳定性区

域明显增大且向高频移动. 这是因为随直径减小, 系统阻尼变小, 晃动频率增大.

综合上述分析结果, 可知充液高度和贮箱直径减小将导致稳定性区域变小, 这是由于充液高度和贮箱直径减小使得贮箱液体减少以致系统阻尼变小. 此外, 充液高度变小使晃动频率下降, 贮箱直径减小使晃动频率增大, 表现为图 3 和图 4 中不稳定性区域分别向低频和低频移动.

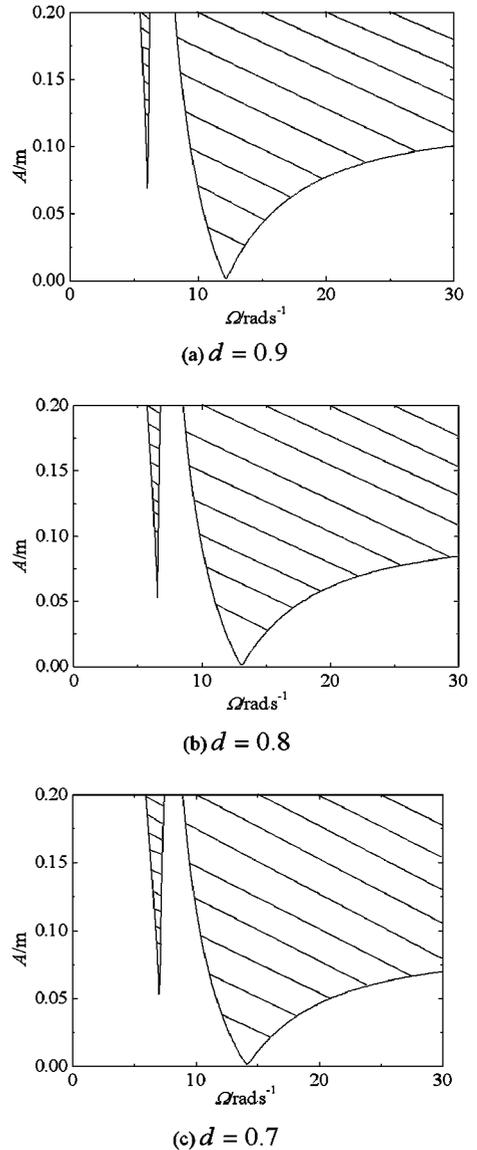
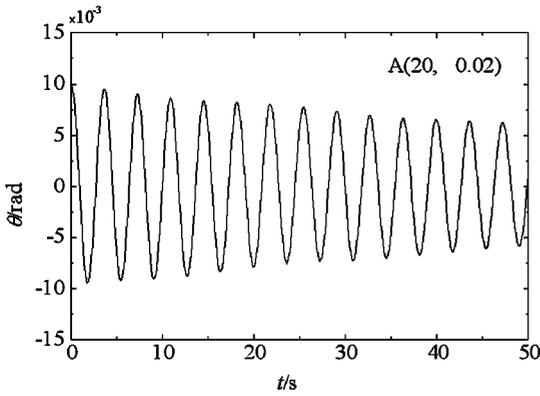


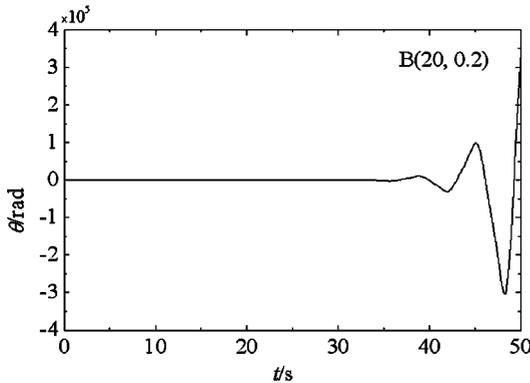
图4 液面高度对稳定性的影响

Fig.4 Effect of liquid height on stability

为了验证上述结果的正确性, 我们在图 4(c) 上取两个点 A(20, 0.01) 和 B(20, 0.2), 初始条件取为(0.01, 0), 计算系统响应如图 5 所示. 从图 5 可见, 当所取点在稳定性区域内时, 响应收敛; 当所取点在不稳定性区域内时, 响应发散.



(a) A(20, 0.02)



(b) B(20, 0.2)

图5 时间历程

Fig.5 Time histories of θ

6 结论

基于等效摆模型研究了液晃系统在纵向简谐激励下的晃动稳定性. 小幅晃动时, 充液高度及贮箱直径会明显影响晃动的稳定性边界. 储液高度减少, 不稳定性区域逐渐减小, 不稳定区域向低频移动; 在贮箱内液体高度保持不变的情况下, 贮箱半径减少, 不稳定性区域会明显增大.

参 考 文 献

- 1 朱昶帆, 唐国安, 张美艳. 考虑推进剂晃动的火箭液固耦合分析的比拟算法. *动力学与控制学报*, 2014, 12(3): 239~242 (Zhu C F, Tang G A, Zhang M Y. The analogy method to coupling analysis of rockets considering propellant sloshing. *Journal of Dynamics and Control*, 2014, 12(3): 239~242 (in Chinese))
- 2 Shageer H, Tao G. Modeling and adaptive control of spacecraft with fuelslosh: overview and case studies. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*,

- 2007:1~19
- 3 Abramson H N. The dynamic behavior of liquids in moving containers. *Applied Mechanics Reviews*, 1966, 16(7): 199~225
- 4 Ibrahim R A. *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2005: 320~362
- 5 岳宝增. 液体大幅晃动动力学. 北京: 科学出版社, 2011: 1~142 (Yue B Z. *Dynamics of Large Amplitude Liquid Slosh*. Beijing: Science Press, 2011: 1~142 (in Chinese))
- 6 邓明乐, 岳宝增, 黄华. 液体大幅晃动类等效力学模型研究. *宇航学报*, 2016, 37(6): 631~638 (Deng M L, Yue B Z, Wang H. Study on the equivalent mechanical model for large amplitude slosh. *Journal of Astronautics*, 2016, 37(6): 631~638 (in Chinese))
- 7 夏恒新, 宝音贺西, 郑亚. 多腔充液晃动的等效特性. *动力学与控制学报*, 2007, 5(4): 346~349 (Xia H X, Bao Y H X, Zheng Y. Equivalent characteristics of liquid sloshing in multi-tank. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(4): 346~349 (in Chinese))
- 8 Kang J Y, Oh H S. Stability of fluid motion in a vehicle subject to harmonic excitations. *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*, 2006: 21~24
- 9 李青. 充液挠性系统动力学分析及在航天工程中的应用研究. 北京: 清华大学[博士论文], 2010 (Li Q. *Dynamic analysis of liquid-filled flexible system and its application studies on aerospace engineering* [Doctoral Thesis]. Beijing: Tsinghua University, 2010 (in Chinese))
- 10 Kana D D. Validated spherical pendulum model for rotary liquid slosh. *Journal of Spacecraft & Rockets*, 2015, 26(3): 188~195
- 11 钟顺, 陈予怒. 工程充液腔体中液体非线性晃动模型及混沌分析. *中国科学物理学力学天文学*, 2013, 43(4): 372~379 (Zhong S, Chen Y S. Modeling and chaos of the liquid nonlinear sloshing in the engineering liquid-filled cavity. *SCIENCE CHINA Physics, Mechanics & Astronomy*, 2013, 43(4): 372~379 (in Chinese))
- 12 Stephen J J, Sannasiraj S A, Sundar V. Numerical simulation of sloshing in a rectangular tank under combined horizontal, vertical and rotational oscillations. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part M Journal of Engineering for the Maritime Environment*, 2016, 230(1): 95~113
- 13 王为, 夏恒新, 李俊峰等. 半球形容器中液体自由晃动非线性现象的实验研究. *清华大学学报(自然科学*

版), 2008, 48(11):2009~2012 (Wang W, Xia H X, Li J F, et al. Experimental investigation of nonlinear liquid sloshing in a hemispherical container. *Tsinghua Univ (Sci&Tech)*, 2008, 48(11):2009~2012 (in Chinese))

14 Yue B Z, Wang Z. Nonlinear phenomena of three-dimensional liquid sloshing in microgravity environment. *Science Bulletin*, 2006, 51(20):2425~2431

STABILITY BOUNDARIES OF LIQUID-SLOSHING SYSTEM FOR A CYLINDRICAL TANK *

Li Qing Yu Bensong Jin Dongping[†]

(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 29 Yudao Street, Nanjing 210016, China)

Abstract This paper studied the sloshing stability of a liquid-filled cylindrical tank subjected to longitudinal excitation. A pendulum model is used to obtain equivalent dynamics Mathieu equation of the liquid sloshing under the longitudinal excitation. Based on the perturbation method, the stability boundaries are then obtained with the variation of the damping, liquid height and diameter of the tank. The results show that the damping, the liquid height and the diameter of tank have an important effect on stability boundaries.

Key words liquid sloshing, equivalent mechanical model, Mathieu equation, stability boundary

Received 9 October 2016, revised 15 December 2016.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11672125) and the Priority Academic Program Development of Jiangsu Higher Education Institutions.

[†] Corresponding author E-mail: jindp@nuaa.edu.cn