

# 大范围运动柔性机械臂斜碰撞动力学分析\*

段玥晨<sup>1†</sup> 章定国<sup>2</sup> 朱健<sup>3</sup>

(1.郑州大学机械工程学院, 郑州 450001) (2.南京理工大学理学院, 南京 210094) (3.太原太航科技有限公司, 太原 030006)

**摘要** 对作大范围运动柔性机械臂系统,进行斜碰撞动力学分析.基于柔性多体系统刚柔耦合动力学理论,计入耦合变形项,全面考虑大范围刚体运动与弹性小变形运动的耦合,建立系统连续动力学方程.引入斜碰撞力学模型,将法向和切向碰撞力以广义力的形式加入动力学方程中,对系统进行斜碰撞动力学建模分析.法向碰撞模型选取基于连续接触力法的非线性弹簧阻尼模型,切向碰撞模型选取一种修正 Coulomb 摩擦模型,对切向摩擦力进行统一描述.给出接触、分离判据,实现不同状态的动力学模型转换与求解.对斜碰撞全局动力学进行了仿真验证,分析了柔性机械臂全局过程的动力学特性变化以及碰撞对大范围运动和小变形运动的作用,并对比了不同碰撞方向对大范围运动、变形、机械能、碰撞力等动力学参数的影响.

**关键词** 柔性机械臂, 斜碰撞, 动力学分析, 柔性多体系统

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-019

## 引言

斜碰撞动力学问题由于同时考虑了法向碰撞作用和切向摩擦作用,因此变得较难处理,而对多体系统斜碰撞动力学的研究则需解决大范围运动、小变形运动与斜碰撞作用的耦合问题,同时由于其具有的非光滑、不连续等特性,因而成为多体系统动力学领域当前的研究难点和热点之一<sup>[1-4]</sup>.

合理地建立法向和切向碰撞模型,正确地处理切向黏滞(stick)、滑移(slip)状态,准确地求解含碰撞、摩擦的非光滑问题,是解决柔性多体系统斜碰撞动力学问题的关键.国内外学者对斜碰撞动力学模型进行了多方面的研究,刘才山等<sup>[5]</sup>分别基于 Hertz 接触理论和线性切向接触刚度建立法向和切向碰撞模型,Payr 等<sup>[6]</sup>采用 Coulomb 摩擦模型研究了斜碰撞问题并与其它碰撞模型做了对比,Flickinger 等<sup>[7]</sup>用 Coulomb 摩擦定律和互补关系研究了多体系统多点斜碰撞问题,Yao 等<sup>[8]</sup>引入能量恢复系数研究了多刚体系统含摩擦的碰撞问题,李春洋等<sup>[9]</sup>研究了同步直齿锥齿轮锁定后间隙的非光滑动力学行为.Han 等<sup>[10]</sup>采用步进冲量法分析了两自由度斜碰撞振动系统在碰撞前后的状态,Qi 等<sup>[11]</sup>

建立了多体系统含摩擦铰间隙的递推动力学方程.

本文针对作大范围运动柔性机械臂的斜碰撞动力学问题,首先基于柔性多体系统刚柔耦合动力学建模理论对柔性机械臂系统进行连续动力学建模,并选取连续接触力法作为法向碰撞模型,选取一种修正 Coulomb 摩擦模型作为切向碰撞模型,推导出系统的斜碰撞动力学方程,并给出柔性机械臂斜碰撞动力学仿真算例与分析.

## 1 连续动力学建模

本文研究的作大范围运动柔性机械臂是由  $n$  个转动铰和  $n$  个柔性杆件组成的空间多杆链式柔性多体系统,如图 1 所示.设杆件  $i$  的长度为  $L_i$ ,弹性模量为  $E_i$ ,剪切模量为  $G_i$ ,截面惯性矩分别为  $I_{xi}, I_{yi}, I_{zi}$ ,横截面积为  $A_i$ ,体密度为  $\rho_i$ .柔性杆件均看作细长的 Euler-Bernoulli 梁,材料线弹性、各向同性.鉴于传统动力学建模方法的局限性,本文将全面考虑大范围刚体运动和柔性小变形运动的相互作用,建立系统的刚柔耦合连续动力学模型.

用惯性参照系  $O-XYZ$  来描述系统的大范围刚体运动,用各杆件上的浮动参照系来描述小变形运动.在杆件  $i$  浮动参照系下,初始坐标为  $(\eta, 0, 0)$  的点在变形后的位置矢量  ${}^i h_i$  的齐次坐标形式为<sup>[12]</sup>:

2016-03-13 收到第 1 稿,2016-04-20 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(11402234, 11272155, 11132007)和河南省高等学校重点科研项目计划资助项目(16A130005)

† 通讯作者 E-mail: duanyc1984@zzu.edu.cn

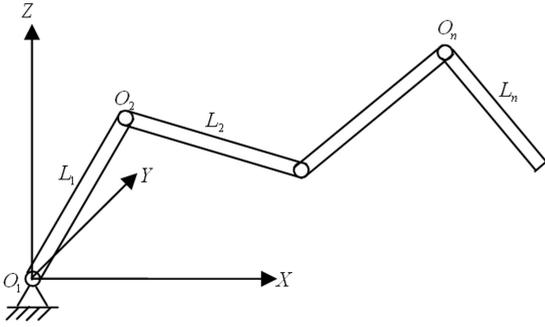


图1 柔性机械臂

Fig. 1 Flexible manipulator

$${}^i \mathbf{h}_i(\boldsymbol{\eta}, t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\eta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{N_i} \delta_{ij}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ x_{ij}(\boldsymbol{\eta}) \\ y_{ij}(\boldsymbol{\eta}) \\ z_{ij}(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} \delta_{ij}(t) \delta_{ik}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ x_{ijk}(\boldsymbol{\eta}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中  $N_i$  为杆件  $i$  的模态截断数;  $x_{ij}(\boldsymbol{\eta})$ 、 $y_{ij}(\boldsymbol{\eta})$ 、 $z_{ij}(\boldsymbol{\eta})$  分别为杆件  $i$  在位置  $\boldsymbol{\eta}$  处的第  $j$  阶变形线位移模态矢量在其浮动系三个坐标轴的分量;  $\delta_{ij}(t)$  为杆件  $i$  的第  $j$  阶模态坐标,  $x_{ijk}(\boldsymbol{\eta})$  为采用非线性应变场所产生的耦合模态函数, 代表了杆件横向变形引起的轴向缩短, 传统的动力学建模方法忽略了该耦合变形项, 当大范围运动为高速时, 该耦合项将对系统的动力学特性产生重要影响<sup>[13]</sup>, 其表达式可写为:

$$x_{ijk}(\boldsymbol{\eta}) = \int_0^\eta \left( \frac{\partial y_{ij}}{\partial \xi} \frac{\partial y_{ik}}{\partial \xi} + \frac{\partial z_{ij}}{\partial \xi} \frac{\partial z_{ik}}{\partial \xi} \right) d\xi \quad (2)$$

令  $\mathbf{W}_i$  为从惯性系到杆件  $i$  浮动系的齐次变换矩阵, 则点在惯性系下的绝对位置矢量  $\mathbf{h}_i$  和绝对速度矢量  $\dot{\mathbf{h}}_i$  可以表示为:

$$\mathbf{h}_i = \mathbf{W}_i \cdot {}^i \mathbf{h}_i \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{h}}_i = d\mathbf{h}_i/dt = \dot{\mathbf{W}}_i \cdot {}^i \mathbf{h}_i + \mathbf{W}_i \cdot {}^i \dot{\mathbf{h}}_i \quad (4)$$

根据式(3)~(4), 可以求出系统上各点的位移与速度, 进而可以得到系统的动能  $T$  和势能  $V$ .

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n (T_i^1 + T_i^2) \quad (5)$$

系统的动能  $T$  由各个杆件的动能  $T_i$  叠加求

得, 式(5)中,  $T_i^1$  为杆件  $i$  线变形的动能,  $T_i^2$  为杆件  $i$  绕中性轴扭转的动能.

$$T_i^1 = \frac{1}{2} \int_0^{L_i} Tr[\dot{\mathbf{h}}_i \cdot \dot{\mathbf{h}}_i^T] d(\rho_i A_i L_i) \quad (6)$$

$$T_i^2 = \frac{1}{2} \int_0^{L_i} J_{xi}(\boldsymbol{\eta}) \left( \frac{\partial \theta_{xi}(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial t} \right)^2 d\boldsymbol{\eta} \quad (7)$$

式中  $J_{xi}$  是杆件  $i$  绕其中性轴的单位长度转动惯量;  $\theta_{xi}$  是杆件  $i$  的第  $j$  阶轴向扭转变形角位移模态.

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n (V_i^e + V_i^g) \quad (8)$$

系统的势能  $V$  由各个杆件的势能  $V_i$  叠加求得, 包括杆件  $i$  的弹性变形势能  $V_i^e$  及重力势能  $V_i^g$ .

$$V_i^e = \frac{1}{2} \int_0^{L_i} \left\{ E_i \left[ I_{zi} \left( \frac{\partial \theta_{zi}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right)^2 + I_{yi} \left( \frac{\partial \theta_{yi}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right)^2 + A_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right)^2 \right] + G_i I_{xi} \left( \frac{\partial \theta_{xi}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right)^2 \right\} d\boldsymbol{\eta} \quad (9)$$

式中  $\theta_{xi}$ 、 $\theta_{yi}$ 、 $\theta_{zi}$  分别为杆件  $i$  上位置  $\boldsymbol{\eta}$  处相对于浮动系三个坐标轴的变形转角;  $x_i$  是杆件  $i$  上位置  $\boldsymbol{\eta}$  处沿轴向的线变形位移.

$$V_i^g = \int_0^{L_i} -\rho_i A_i \mathbf{g}^T (\mathbf{W}_i \cdot {}^i \mathbf{h}_i) d\boldsymbol{\eta} \quad (10)$$

式中  $\mathbf{g}$  为惯性系下重力加速度矢量列阵.

利用第二类 Lagrange 方程:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F}_\tau \quad (11)$$

将非保守力即转动铰处驱动力矩对应的广义力  $\mathbf{F}_\tau$  代入, 经过推导, 可以得到系统的刚柔耦合连续动力学方程形式为<sup>[14]</sup>:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (12)$$

$$\mathbf{q} = [\theta_1, \delta_{11}, \dots, \delta_{1N_1}, \dots, \theta_i, \delta_{i1}, \dots, \delta_{iN_i}, \dots, \theta_n, \delta_{n1}, \dots, \delta_{nN_n}]^T \quad (13)$$

式(12)~(13)中,  $\mathbf{q}$  为系统广义坐标列阵;  $\theta_i$  为铰  $i$  的相对转角, 代表了杆件之间的大范围相对运动;  $\mathbf{M}$  为广义质量矩阵,  $\mathbf{Q}$  为广义力列阵, 二者的子块形式如式(14)~(15)所示.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & {}^2\mathbf{M}_1 & \dots & {}^n\mathbf{M}_1 \\ {}^1\mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_2 & \dots & {}^n\mathbf{M}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^1\mathbf{M}_n & {}^2\mathbf{M}_n & \dots & \mathbf{M}_n \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{Q} = [Q_{\theta_1}, Q_{\theta_{11}} \dots Q_{\theta_{1N_1}}, \dots, Q_{\theta_i}, Q_{\theta_{i1}} \dots Q_{\theta_{iN_i}}, \dots, Q_{\theta_n}, Q_{\theta_{n1}}, \dots, Q_{\theta_{nN_n}}]^T \quad (15)$$

## 2 碰撞模型

为得到柔性机械臂系统斜碰撞动力学方程,需在连续动力学方程基础上添加斜碰撞力学模型.本文研究的斜碰撞问题实际是将碰撞过程分为法向碰撞与切向碰撞两部分,因此碰撞模型由法向碰撞模型和切向碰撞模型组成.需要说明的是,所谓的“正碰撞”是指两碰撞体上碰撞点的相对速度完全在碰撞法线方向上,而在切线方向上相对速度投影为0.实际情况中由于大范围运动、小变形运动与碰撞作用的耦合,该条件很难精确满足,因此实际发生的碰撞大部分都属于斜碰撞.

### 2.1 法向碰撞模型

法向碰撞模型选取基于连续接触力法的非线性弹簧阻尼模型<sup>[15]</sup>,该模型用非线性弹性接触力和阻尼力来分别反映法向碰撞过程中的弹性恢复和能量损失.

结合 Hertz 接触理论和非线性阻尼项,本文选取的非线性弹簧阻尼模型中,法向碰撞力  $F_n$  的表达式为:

$$F_n = F_k + F_d \quad (16)$$

式中  $F_k$  为法向弹性恢复力;  $F_d$  为法向非线性阻尼力.

弹性恢复力  $F_k$  基于 Hertz 接触理论确定:

$$F_k = K \left| \delta \right|^{\frac{3}{2}} \quad (17)$$

式中  $\delta$  为碰撞体之间的嵌入量;  $\delta$  同时也用来进行接触、分离判定;  $K$  为接触刚度,与接触体的几何、材料特性相关,若两个碰撞体为轴线互相垂直的圆柱体,接触刚度  $K$  的表达式为:

$$K = \frac{4}{3} \sqrt{R E^*} \quad (18)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \quad (19)$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \quad (20)$$

式(18)~(20)中,  $R_i$ 、 $E_i$ 、 $\mu_i$  ( $i=1, 2$ ) 分别为两接触面的曲率半径、弹性模量、泊松比.

非线性阻尼力  $F_d$  的表达式取为:

$$\begin{cases} F_d = -CK \left| \delta \right|^{\frac{3}{2}} \dot{\delta} = -CF_k \dot{\delta} \\ C = 3(1-e^2)/4v_0 \end{cases} \quad (21)$$

式中  $C$  为阻尼系数;  $\dot{\delta}$  为碰撞点相对嵌入速度;  $e$  为恢复系数;  $v_0$  为初始碰撞时刻碰撞点之间的相对速度.

### 2.2 切向碰撞模型

切向碰撞模型选取一种修正 Coulomb 摩擦模型<sup>[16]</sup>,该模型采用非线性函数对 Coulomb 摩擦模型进行修正,无需进行黏滞、滑移状态的切换,且可以用一个统一的公式对整个过程的切向摩擦力进行描述,避免了 Coulomb 摩擦力与相对切向加速度的耦合给数值计算带来的困难.

基于该修正 Coulomb 摩擦模型,切向碰撞力即摩擦力  $F_t$  的表达式为:

$$F_t = -\mu F_n (1 - e^{-\frac{\alpha}{v_{r1}} |v_r|}) \cdot \text{sgn}(v_r) \quad (22)$$

式中  $v_{r1}$ 、 $\alpha$  为正的常数;  $\mu$  为动滑动摩擦因数,  $F_n$  为法向接触力,  $v_r$  为碰撞点切向相对速度,  $\text{sgn}(\cdot)$  为符号函数.

传统的 Coulomb 摩擦模型根据相对切向速度和相对切向加速度来判定黏滞、滑移状态,并用分段函数来表示两个阶段的摩擦力.采用修正 Coulomb 摩擦模型后,可以用一个统一的方程式(22)来表示摩擦力,简化了过程判定和数值计算的难度.两种摩擦模型的摩擦力与切向相对速度的关系如图2所示.

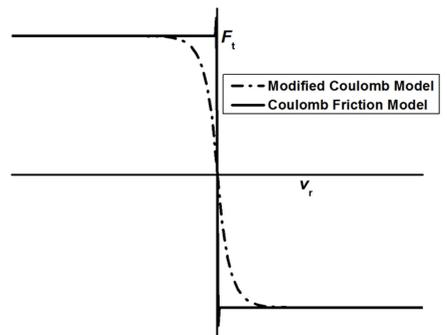


图2 摩擦模型对比

Fig. 2 Comparison of friction models

## 3 斜碰撞动力学方程

柔性机械臂斜碰撞动力学方程是在连续动力学方程基础上添加碰撞广义力,同时方程的维数保持不变,系统的广义坐标和广义质量矩阵亦不变.法向碰撞力和切向摩擦力对应的广义力通过势能法来求取,在此引入碰撞力势能的概念.设柔性机械臂的杆件  $k$  上一点  $P$  与外界发生弹性斜碰撞,杆件  $k$  浮动系下碰撞点  $P$  位置矢量列阵为  ${}^k \mathbf{h}_k$ ,从惯性系到杆件  $k$  浮动系的齐次变换矩阵为  $\mathbf{W}_k$ ,惯性系下碰撞法向、切向单位矢量列阵分别为  $\mathbf{n}_n$ 、 $\mathbf{n}_t$ ,则

惯性系下法向、切向碰撞力势能分别为:

$$\begin{cases} V_n = -\mathbf{n}_n^T F_n (\mathbf{W}_k \cdot {}^k \mathbf{h}_k) \\ V_t = -\mathbf{n}_t^T F_t (\mathbf{W}_k \cdot {}^k \mathbf{h}_k) \end{cases} \quad (23)$$

系统的斜碰撞动力学方程为:

$$M\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_n + \mathbf{Q}_t \quad (24)$$

式中  $\mathbf{Q}$  为无碰撞时的广义力列阵;  $\mathbf{Q}_n$  和  $\mathbf{Q}_t$  分别为法向碰撞力和切向摩擦力对应的广义力列阵, 二者的形式分别为:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_n = -\frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{D}_n F_n \\ \mathbf{Q}_t = -\frac{\partial V_t}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{D}_t F_t \end{cases} \quad (25)$$

$$\mathbf{D}_n = [D_{\theta_1}^n, D_{11}^n, \dots, D_{1N_1}^n, \dots, D_{\theta_n}^n, D_{n1}^n, \dots, D_{nN_n}^n]^T \quad (26)$$

$$\mathbf{D}_t = [D_{\theta_1}^t, D_{11}^t, \dots, D_{1N_1}^t, \dots, D_{\theta_n}^t, D_{n1}^t, \dots, D_{nN_n}^t]^T \quad (27)$$

$$D_{\theta_j}^n = \begin{cases} \mathbf{n}_n^T \frac{\partial \mathbf{W}_k}{\partial \theta_j} \mathbf{h}_k & 1 \leq j \leq k \\ 0 & k < j \leq n \end{cases} \quad (28)$$

$$D_{j_f}^n = \begin{cases} \mathbf{n}_n^T \frac{\partial \mathbf{W}_k}{\partial \delta_{j_f}} \mathbf{h}_k & 1 \leq j < k \\ \mathbf{n}_n^T \mathbf{W}_k \frac{\partial \mathbf{h}_k}{\partial \delta_{k_f}} & j = k \\ 0 & k < j \leq n \end{cases} \quad (29)$$

式(25)~(29)中,  $\mathbf{D}_n$  和  $\mathbf{D}_t$  为与碰撞点位置和碰撞方向有关的列阵.  $\mathbf{D}_t$  列阵的元素  $D_{\theta_j}^t$  ( $j=1, \dots, n$ )、 $D_{j_f}^t$  ( $j=1, \dots, n; f=1, \dots, N_j$ ) 的求法与式(28)~(29)类似, 仅需将其中的法向单位矢量列阵  $\mathbf{n}_n$  变为切向单位矢量列阵  $\mathbf{n}_t$ .

斜碰撞动力学方程(24)是在连续动力学方程(12)的基础上添加碰撞广义力项, 在数值计算上也较容易实现不同动力学状态的切换.

在系统的全局动力学求解过程中, 需实时判定两碰撞体上的碰撞点在碰撞法向上的相对距离: 若法向相对距离小于等于0则认为处于碰撞过程, 使用斜碰撞动力学方程(24)进行求解; 否则认为两

碰撞体未接触或者已分离, 令  $F_n$ 、 $F_t$  均为0, 使用连续动力学方程(12)进行求解.

### 4 仿真算例

为验证本文的动力学方法, 选取一个单杆柔性机械臂进行含斜碰撞过程的全局动力学仿真, 如图3所示.

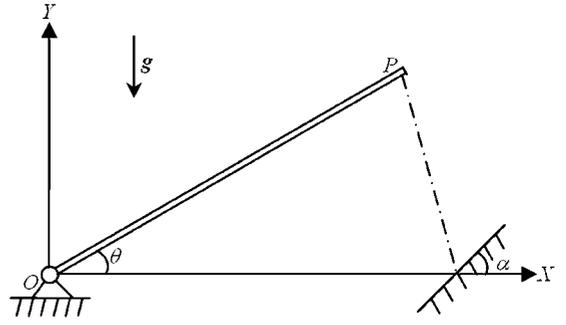


图3 仿真算例  
Fig. 3 Simulation example

其中,  $L=1.0\text{m}$ ,  $\rho=2700\text{kg/m}^3$ ,  $EA=2.17 \times 10^7\text{N}$ ,  $EI_z=541.27\text{N} \cdot \text{m}^2$ ,  $K=5.96 \times 10^9\text{N} \cdot \text{m}^{-3/2}$ . 初始时刻系统由  $\theta=60^\circ$  位置无初速自由下落, 杆件末端  $P$  与刚性面发生碰撞, 分别取碰撞面倾角  $\alpha$  为  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  和  $45^\circ$ , 进行不同方向碰撞的对比.

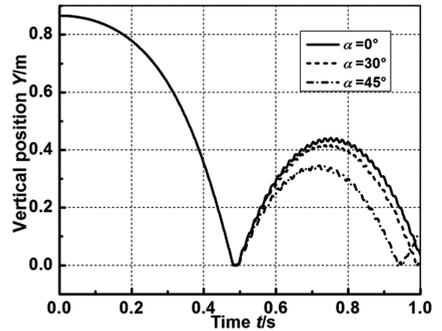


图4 碰撞点竖直方向坐标  
Fig. 4 Vertical position of impact point

图4为碰撞点竖直方向即Y方向坐标的时程图, 反映了系统的大范围刚体运动. 由图可见, 三次不同碰撞面倾角仿真的第一次宏观碰撞均发生在0.47s左右, 碰撞后由于碰撞能量损失和弹性变形相对碰前更大导致竖向坐标变化曲线明显抖动且峰值小于初始值; 碰撞面倾角  $\alpha=0^\circ$  时系统回弹高度最大,  $\alpha=45^\circ$  时回弹高度最小因此也更快地发生了第二次宏观碰撞. 这点也可在图5系统的机械能变化中看出, 无碰撞过程中由于没有非保守力做

功,因此三次仿真的系统机械能均保持守恒;因为考虑了法向阻尼力和切向摩擦力,每次碰撞过程导致了机械能的损失,而  $\alpha = 0^\circ$  时的碰撞能量损失最小,  $\alpha = 45^\circ$  时最大,这也和图 4 的竖向坐标变化规律相吻合。

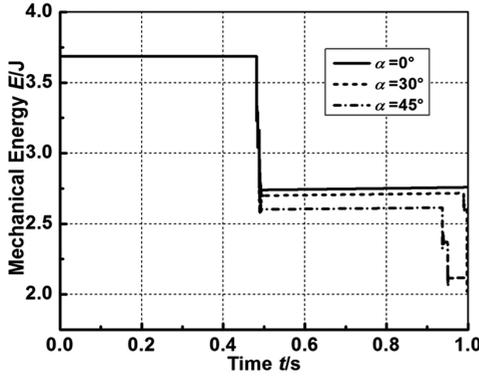


图 5 系统机械能变化

Fig. 5 Development of system mechanical energy

图 6 为杆件末端即碰撞点横向变形图,碰撞过程杆件的横向弹性变形变化剧烈且达到最大幅值,碰后横向变形以明显大于碰前的幅度做近似周期性变化,这说明碰撞效应、大范围运动和小变形运动存在耦合作用,而  $\alpha = 45^\circ$  时的变形峰值相对稍大,  $\alpha = 0^\circ$  时相对稍小。图 7 为  $\alpha = 45^\circ$  仿真时第一次宏观碰撞过程中法向碰撞力  $F_n$  与切向摩擦力  $F_t$  的变化,  $F_t$  与  $F_n$  同步变化,二者峰值之比约为动滑动摩擦因数  $\mu$ ; 由于法向碰撞为单面约束,法向碰撞力只能为压力,而切向摩擦力方向可沿切向正向或负向并且和切向相对速度方向相反。

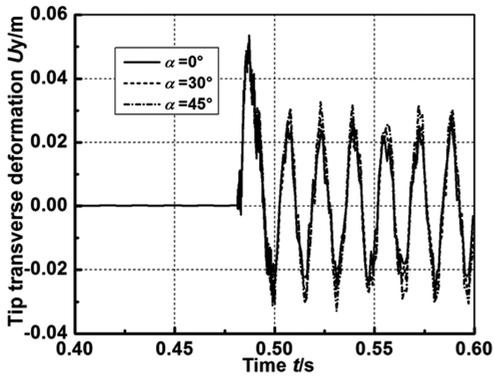


图 6 杆件末端横向变形

Fig. 6 Tip transverse deformation

图 8 为第一次宏观碰撞过程中不同碰撞面倾角的法向碰撞力  $F_n$  对比,由图可见,由于弹性变形的存在导致碰撞点之间在短时间内频繁地接触分

离,因此一次宏观碰撞过程包含多个次碰撞过程;该次宏观碰撞过程中的法向碰撞力峰值在  $\alpha = 0^\circ$  时最大,约为 8100N,其次是  $\alpha = 30^\circ$  时,而  $\alpha = 45^\circ$  时最小。图 9 为第一次宏观碰撞过程中不同碰撞面倾角的切向碰撞力即摩擦力  $F_t$  的对比,由于碰撞点切向相对速度方向的改变,  $F_t$  表现为有正有负,该次宏观碰撞过程中的切向碰撞力峰值在  $\alpha = 30^\circ$  时最大,约为 1150N。

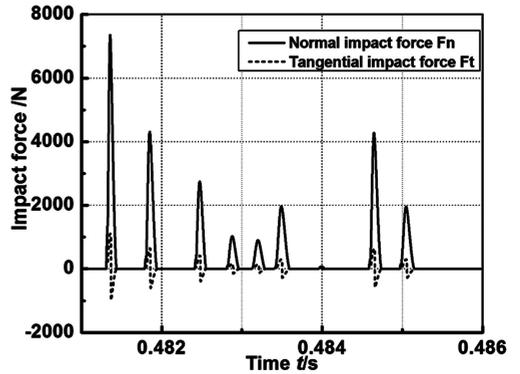


图 7 法向与切向碰撞力

Fig. 7 Normal and tangential impact force

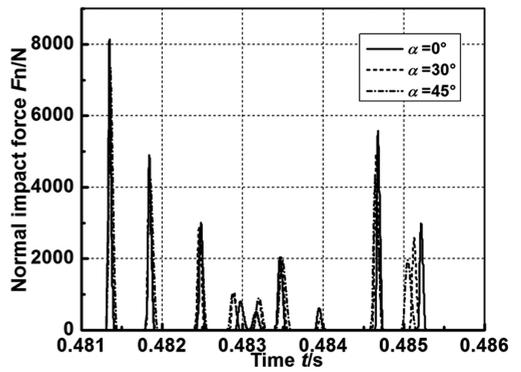


图 8 法向碰撞力对比

Fig. 8 Comparison of normal impact forces

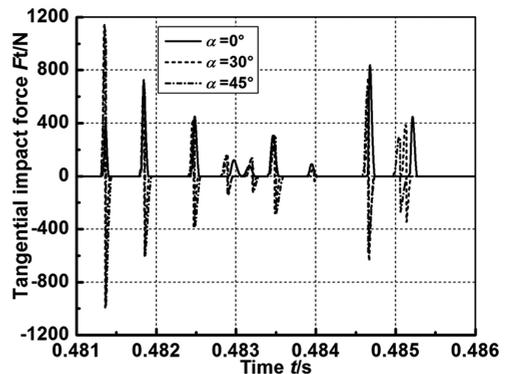


图 9 切向碰撞力对比

Fig. 9 Comparison of tangential impact forces

## 5 结论

本文针对作大范围运动柔性机械臂系统,对其斜碰撞动力学问题进行了研究,在柔性多体系统刚柔耦合连续动力学建模基础上,建立了斜碰撞过程的法向和切向碰撞力模型,对切向黏滞、滑移状态进行了统一,推导出了斜碰撞动力学方程.斜碰撞动力学建模工作全面考虑了大范围刚体运动、弹性小变形运动与碰撞作用的耦合,并可进行包含连续动力学过程和斜碰撞动力学过程的全局动力学模型转换与求解.最后通过动力学仿真算例对本文的模型进行了验证,并对比了不同碰撞方向下系统的动力学特性,结果较为可信,并全面分析了全局动力学过程中系统的动力学行为变化.

## 参 考 文 献

- 1 王琪,庄方方,郭易圆等.非光滑多体系统动力学数值算法的研究进展.力学进展,2013,43(1):101~111 (Wang Q, Zhuang F F, Guo Y Y, et al. Advances in the research on numerical methods for non-smooth dynamics of multibody systems. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(1):101~111 (in Chinese))
- 2 丁千,翟红梅.机械系统摩擦动力学研究进展.力学进展,2013,43(1):112~131 (Ding Q, Zhai H M. The advances in researches of friction dynamics in mechanics system. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(1):112~131 (in Chinese))
- 3 钱震杰,章定国.含摩擦碰撞柔性机械臂动力学研究.振动工程学报,2015,28(6):879~886 (Qian Z J, Zhang D G. Frictional impact dynamics of flexible manipulator arms. *Journal of Vibration Engineering*, 2015, 28(6):879~886 (in Chinese))
- 4 晏芳,邓小伟,余征跃等.基于二维高速摄影系统的面内碰撞实验研究.振动与冲击,2016,35(24):84~87 (Yan F, Deng X W, Yu Z Y, et al. The experiment of in-plane impact based on a two-dimensional high speed camera system. *Journal of Vibration and Shock*, 2016, 35(24):84~87 (in Chinese))
- 5 刘才山,陈滨.作大范围回转运动柔性梁斜碰撞动力学研究.力学学报,2000,32(4):457~465 (Liu C S, Chen B. The Oblique impact dynamic study for a flexible beam undergoing large overall motion. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, 32(4):457~465 (in Chinese))
- 6 Payr M, Glocker C. Oblique frictional impact of a bar: analysis and comparison of different impact laws. *Nonlinear Dynamics*, 2005, 41:361~383
- 7 Flickinger D M, Bowling A. Simultaneous oblique impacts and contacts in multibody systems with friction. *Multibody System Dynamics*, 2010, 23:249~261
- 8 Yao W L, Chen B, Liu C S. Energetic coefficient of restitution for planar impact in multi-rigid-body systems with friction. *International Journal of Impact Engineering*, 2005, 31:255~265
- 9 李春洋,张伟.含间隙同步锥齿轮锁定后的非光滑动力学分析.动力学与控制学报,2015,13(6):437~442 (Li C Y, Zhang W. Kinetic analysis of non-smooth after the synchronous straight bevel gears with clearance being locked. *Journal of Dynamics and Control*, 2015, 13(6):437~442 (in Chinese))
- 10 Han W, Hu H Y, Jin D P. Experimental study on dynamics of an oblique-impact vibrating system of two degrees of freedom. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 50(3):551~573
- 11 Qi Z H, Xu Y S, Luo X M. Recursive formulations for multibody systems with frictional joints based on the interaction between bodies. *Multibody System Dynamics*, 2010, 24(2):133~166
- 12 陈思佳,章定国,洪嘉振.大变形旋转柔性梁的一种高次刚柔耦合动力学模型.力学学报,2013,45(2):251~256 (Chen S J, Zhang D G, Hong J Z. A high-order rigid-flexible coupling model of a rotating flexible beam under large deformation. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, 45(2):251~256 (in Chinese))
- 13 Dwivedy S K, Eberhard P. Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review. *Mechanism and Machine Theory*, 2006, 41:749~777
- 14 Duan Y C, Zhang D G, Hong J Z. Partition method for impact dynamics of flexible multibody systems based on contact constraint. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2013, 34(11):1393~1404
- 15 邹凡,刘锦阳,余征跃.柔性体碰撞阻尼模型的适用性分析.上海交通大学学报,2011,45(10):1444~1449 (Zou F, Liu J Y, Yu Z Y. Applicability analysis on impact models of flexible bodies considering damping. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2011, 45(10):1444~1449 (in Chinese))
- 16 Flores P, Ambrosio J, Pimenta C J C, et al. Kinematics

and dynamics of multibody systems with imperfect joints.

New York: Springer, 2008

## OBLIQUE IMPACT DYNAMIC ANALYSIS FOR A FLEXIBLE MANIPULATOR WITH LARGE OVERALL MOTION\*

Duan Yuechen<sup>1†</sup> Zhang Dingguo<sup>2</sup> Zhu Jian<sup>3</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

(2. School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

(3. Taiyuan Taihang Technology Co., Ltd, Taiyuan 030006, China)

**Abstract** The oblique impact dynamic analysis for a flexible manipulator system with large overall motion is studied in this paper. Based on the rigid-flexible coupling dynamic theory of flexible multibody system, the coupling deformation item is considered to reflect the coupling effect of the large overall rigid-body motion and the small elastic deformation motion. The rigid-flexible coupling continuous dynamic equations of the system are then derived through the use of the Lagrange dynamic method. The oblique impact dynamic model for the system is developed by introducing a oblique impact model which includes the normal impact model and the tangential impact model. Meanwhile, the impact forces are added to the system dynamic equations in form of the generalized forces. A nonlinear spring damper model based on the continuous contact force method is set as the normal impact model, while a modified Coulomb friction model, which describes the friction force of the whole process with a unified equation, is set as the tangential impact model. The contact separation criterion is also established to identify the dynamic status and realize the transformation between the continuous dynamic model and the oblique impact dynamic model. Moreover, the impact dynamic simulation examples are given to verify the oblique impact dynamic modeling method, and the dynamic behaviors in the global simulation process are discussed. The results show that the impact makes a great effect on the large overall motion and the small deformation motion both in the impact process and the un-impact process. The dynamic parameters, such as the displacement, the deformation, the mechanical energy and the impact force are also compared at different impact angels.

**Key words** flexible manipulator, oblique impact, dynamic analysis, flexible multibody system

Received 13 March 2016, revised 20 April 2016.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11402234, 11272155, 11132007) and the Key Scientific Research Project for Colleges and Universities of Henan Province(16A130005)

† Corresponding author E-mail: duanyc1984@zzu.edu.cn