

强迫布鲁塞尔振子动力学行为和全局指数同步的数值仿真*

刘莹[†] 王贺元 陈荟颖

(辽宁工业大学理学院, 锦州 121001)

摘要 用 Matlab 软件数值模拟了系统分歧和混沌等的动力学行为发生的全过程, 基于最大 Lyapunov 指数谱、分岔图、庞加莱截面以及功率谱和返回映射等仿真结果揭示了此系统混沌行为的普适特征. 采用线性反馈同步控制方法实现该系统的全局指数同步. 用 Lyapunov 第二方法从理论上证明了该同步方法的有效性. 同时对同步系统进行仿真, 验证了方法的有效性.

关键词 强迫布鲁塞尔振子, 线性反馈同步控制, 制全局指数同步, 数值仿真

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-020

引言

非平衡态化学体系展示了非常丰富多彩的动力学行为, 而且化学反应在实际生产中有着巨大的应用价值, 从而引起了人们的广泛关注. 自从 BZ 反应中的混沌现象被发现以来, 非线性化学反应动力学的理论分析及实验研究成为了国内外研究的前沿课题之一^[1-3]. 在化学反应动力学中, 强迫布鲁塞尔振子由于在理论上有助于对非线性微分方程中的分岔和混沌行为的认识 and 在实际应用上有助于对化学反应过程、流体力学、振荡电路及声学湍流等研究中具有的重大意义, 而引起学术界的高度重视. 许多学者在该系统的理论方面做了大量的工作, 相关文献非常丰富^[4-11]. 近些年, 又由于混沌具有潜在的广泛应用前景, 混沌控制与同步方面的研究方兴未艾, 成为非线性科学领域备受关注的研究课题^[12-14].

1 强迫布鲁塞尔振子的描述

强迫布鲁塞尔振子最早是由比利时化学家普利高津等人为了描述振荡化学反应而提出的^[5], 后来布鲁塞尔学派提出了具有周期受迫作用的三分子模型, 称为强迫布鲁塞尔振子^[6], 其具体形式为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A - (B+1)x + x^2y + \alpha \cos \omega t \\ \frac{dy}{dt} = Bx - x^2y \end{cases} \quad (1)$$

这里 A, B, α, ω 是系统的参数, 它是一个二维非自治的一阶常微分方程组.

引入两个新变量 z 和 u 后, 可将写成如下自治形式:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A - (B+1)x + x^2y + \alpha z \\ \frac{dy}{dt} = Bx - x^2y \\ \frac{dz}{dt} = -\omega u \\ \frac{du}{dt} = \omega z \end{cases} \quad (2)$$

其中 A, B, α 均是正常数, ω 是变化的参数. 富田和久等人最初研究 (1) 这个模型发现了一个混沌区和若干周期轨道, 但整个工作基本上是在 feigenbaum 发现普适性所引起的“混沌”热潮之前完成的. 许多提出的新问题在强迫布鲁塞尔振子上得不到回答. 因此才有深入研究这一模型的必要^[7]. 目前, 人们对于系统 (2) 的研究进展如下: 1983 年, 王光瑞、陈式刚、郝柏林三人发现了强迫布鲁塞尔

2015-12-18 收到第 1 稿, 2016-04-03 收到修改稿

* 国家自然科学基金 (11572146)、辽宁省教育厅科研基金 (L2013248) 和锦州市科技专项基金 (13A1D32) 资助

[†] 通讯作者 E-mail: 370647502@qq.com

振子的阵发混沌^[8];1984年,王光瑞、张淑誉、郝柏林一起研究了强迫布鲁塞尔振子的普适序列^[9];同年,王光瑞、郝柏林三人发现了强迫布鲁塞尔振子从准周期运动到混沌态的过渡过程^[10];1997年,孙鹏发表了周期小扰动对强迫布鲁塞尔振子混沌行为的控制^[11].学者对于强迫布鲁塞尔振子研究的相关文献不是很多,并且对该系统的混沌控制与同步问题也很少有文献涉及.

本文主要是通过数值仿真结果再现了强迫布鲁塞尔振子系统(2)混沌行为的普适特征,特别是我们给出了庞加莱截面、返回映射等结果是其它文献中没有的,这些结果佐证了系统的混沌行为.然后再利用自适应同步控制方法实现该系统的全局指数同步,并用 Lyapunov 方法和数值仿真验证了其同步方法的有效性.

2 动力学行为的数值仿真

取 $A=0.4$ 、 $B=1.2$ 、 $\alpha=0.12$,系统(2)具有混沌现象,故以此为仿真参数进行了动力学行为的数值仿真.经计算得:

(1)当 $\omega < 0.13 \dots$ 时,数值计算表明系统(2)是稳定的(见图1).

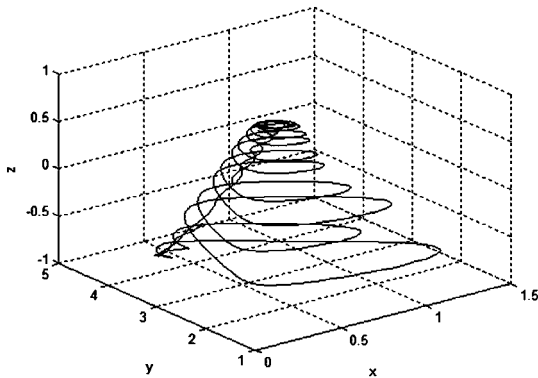


图1 相图($\omega=0.03$)

Fig.1 Phase diagram($\omega=0.03$)

(2)当 $0.13 \dots \leq \omega < 0.65 \dots$ 时,系统(2)是不稳定的,此时生成不稳定的极限环(见图2~3),并且轨线的条数随 ω 的增大而逐渐增多(见图4),最终在 $\omega=0.85 \dots$ 生成奇怪吸引子(见图5~6),这是一种阵发性混沌.

(3)当 $\omega > 1.05 \dots$ 时,系统发生滞后现象,极限环、拟周期、奇怪吸引子并存(见图7~8).

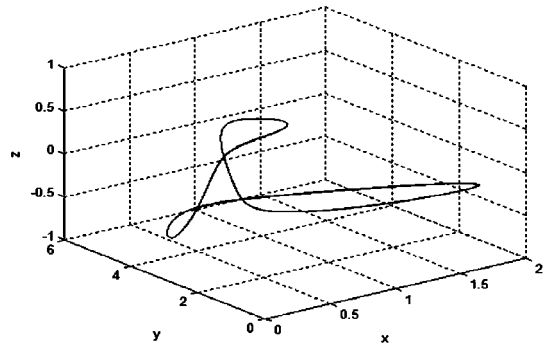


图2 相图($\omega=0.13$)

Fig.2 Phase diagram($\omega=0.13$)

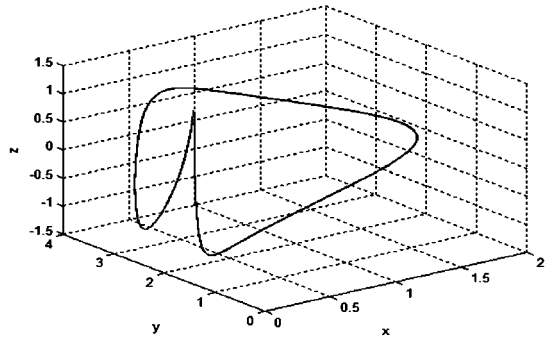


图3 相图($\omega=0.65$)

Fig.3 Phase diagram($\omega=0.65$)

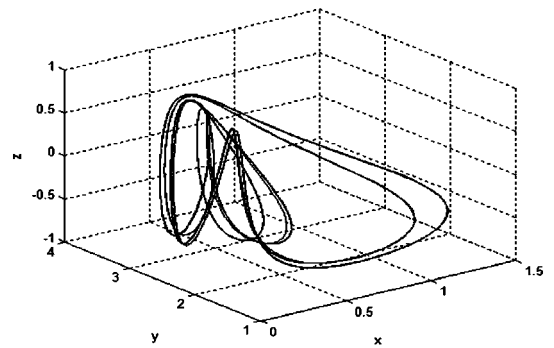


图4 相图($\omega=0.8$)

Fig.4 Phase diagram($\omega=0.8$)

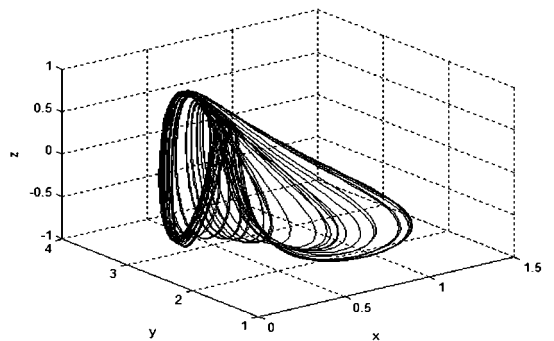


图5 相图($\omega=0.85$)

Fig.5 Phase diagram($\omega=0.85$)

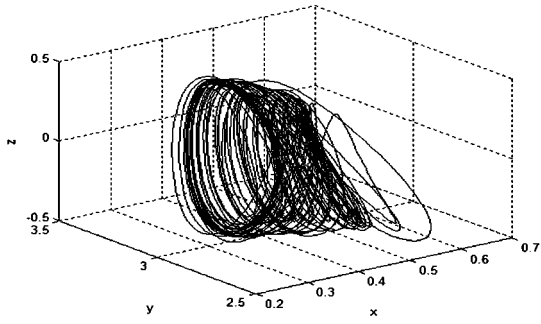


图 6 相图($\omega=0.97$)

Fig.6 Phase diagram($\omega=0.97$)

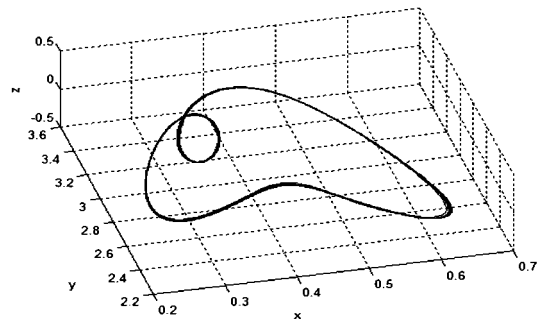


图 7 相图($\omega=1.09$)

Fig.7 Phase diagram($\omega=1.09$)

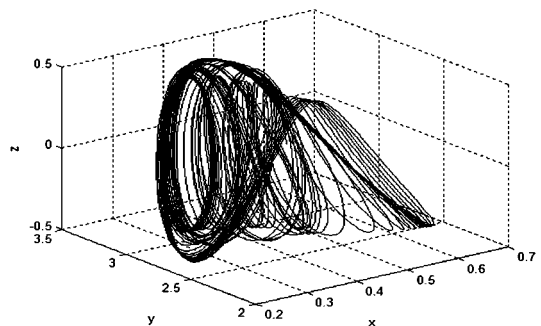


图 8 相图($\omega=1.09$)

Fig.8 Phase diagram($\omega=1.09$)

的点,说明了系统的混沌现象.

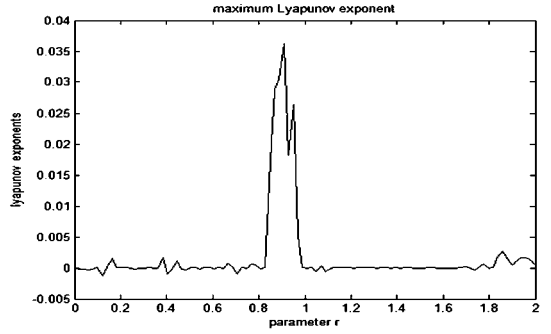


图 9 最大 Lyapunov 指数谱

Fig.9 Largest Lyapunov exponent spectrum

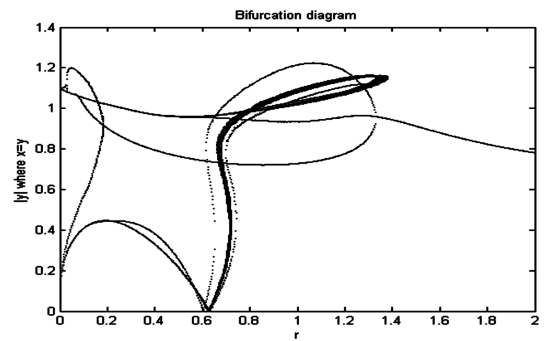


图 10 分岔图

Fig.10 Bifurcation diagram

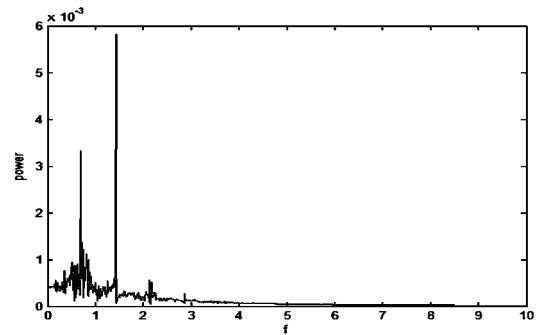


图 11 功率谱

Fig.11 Power spectrum

(4)图 9 给出了系统的最大 Lyapunov 指数图象,图中发现在 $\omega=0.8$ 开始有正的 Lyapunov 指数,说明出现混沌.图 10 为系统关于状态变量 x 的分岔图,两图象都可以看出系统的混沌现象从发生到终止的全过程,而且正的 Lyapunov 指数与分岔图中的混沌区是一致的.

(5)图 11~12 是当 $\omega=0.9$ 时系统的功率谱,时间序列.从它们中均显示了系统的混沌特征.

(6)庞加莱截面法:若庞加莱截面上是一不动点或有限个点,则是周期运动;若是一闭曲线,则是拟周期;若有一片密集的点,则是混沌.图 13 是当 $\omega=0.9$ 时系统的庞加莱截面,从图上看有许多密集

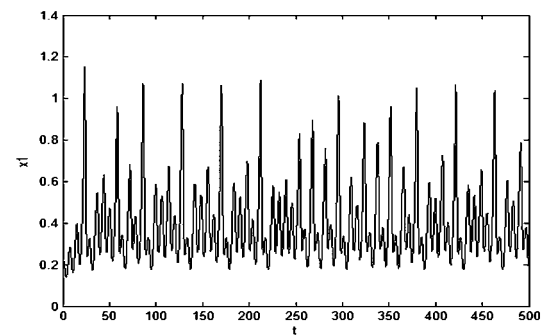


图 12 时间序列

Fig.12 Time series

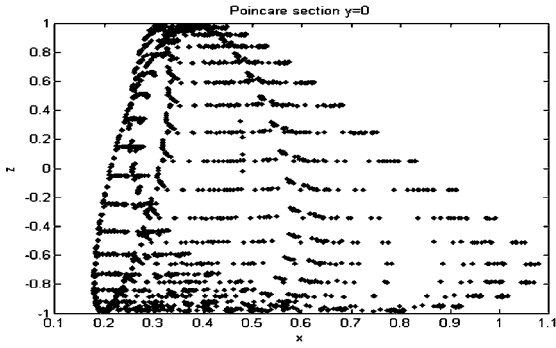


图13 庞加莱截面

Fig.13 Poincare section

(7)返回映射法:返回映射是一些离散的点,如果切线的斜率大于1,那么说明模型是混沌的.图14是当 $\omega = 0.9$ 时系统的返回映射.图中切线斜率大于1,显示出了混沌的特征.

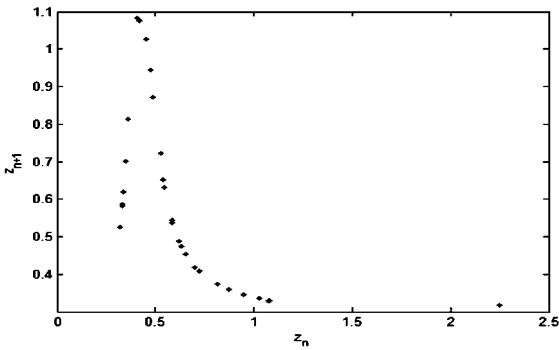


图14 返回映射

Fig.14 Return mapping

3 强迫布鲁塞尔振子的全局指数同步及仿真

本节讨论系统(2)的全局指数同步,并对同步进行数值仿真.

3.1 系统的全局指数同步

定义1 两个非线性动力系统:

$$\dot{X} = F(t, X) \quad (3)$$

$$\dot{Y} = F(t, Y) + \mu(X, Y) \quad (4)$$

这里 $X, Y \in R^n$, F 是一个 n 维的非线性函数; μ 是一个 n 维的控制输入函数.我们称系统(3)是驱动系统,系统(4)是响应系统.

如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - X(t)\| = 0$,那么我们称系统(3)和系统(4)是同步的.

考虑系统(2)的同步问题,驱动系统的变量用下标1标注,相应系统的变量用下标2标注.

驱动系统为:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = A - (B+1)x_1 + x_1^2 y_1 + \alpha z_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = Bx_1 - x_1^2 y_1 \\ \frac{dz_1}{dt} = -\omega u_1 \\ \frac{du_1}{dt} = \omega z_1 \end{cases} \quad (5)$$

那么相应的响应系统可表示为:

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = A - (B+1)x_2 + x_2^2 y_2 + \alpha z_2 + \mu_1(e_x, e_y, e_z, e_u) \\ \frac{dy_2}{dt} = Bx_2 - x_2^2 y_2 + \mu_2(e_x, e_y, e_z, e_u) \\ \frac{dz_2}{dt} = -\omega u_2 + \mu_3(e_x, e_y, e_z, e_u) \\ \frac{du_2}{dt} = \omega z_2 + \mu_4(e_x, e_y, e_z, e_u) \end{cases} \quad (6)$$

这里 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ 为要设计的控制函数.

$$\text{令 } e^T = (e_x, e_y, e_z, e_u), e_x = x_2 - x_1,$$

$$e_y = y_2 - y_1, e_z = z_2 - z_1, e_u = u_2 - u_1,$$

则由(6)减去(5)得受控的误差动力系统可表示为:

$$\begin{cases} \dot{e}_x = -(B+1)e_x + x_2^2 e_y - 2x_1^2 y_1 - e_x^2 y_1 + 2x_1 y_1 e_x + \alpha e_z + \mu_1(e_x, e_y, e_z, e_u) \\ \dot{e}_y = B e_x - x_2^2 e_y + 2x_1^2 y_1 + e_x^2 y_1 - 2x_1 y_1 e_x + \mu_2(e_x, e_y, e_z, e_u) \\ \dot{e}_z = -\omega e_u + \mu_3(e_x, e_y, e_z, e_u) \\ \dot{e}_u = \omega e_z + \mu_4(e_x, e_y, e_z, e_u) \end{cases} \quad (7)$$

我们的目标是设计有效的控制器 $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)^T$,使得系统(7)的零解是全局指数稳定的,从而驱动系统(5)和响应系统(6)是全局指数同步的.

即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$.

因为混沌系统是有界的,所以我们假设 $|x| \leq M_x, |y| \leq M_y, |z| \leq M_z, |u| \leq M_u$.

定义2 如果存在常数 $\alpha > 0$,对任意的 $t > t_0$ 都有 $V(t) \leq V(t_0) e^{-\alpha(t-t_0)}$,那么我们称系统的原点是指数稳定的.

如下结论是利用线性反馈同步控制证明系统是全局指数同步.

定理 对于误差系统(7),当控制器设计为如

下形式:

$$\mu_1 = -x_2^2 e_y + 2x_1^2 y_1 + e_x^2 y_1 - 2x_1 y_1 e_x - \alpha e_z - k e_x,$$

$$\mu_2 = -B e_x + x_2^2 e_y - 2x_1^2 y_1 - e_x^2 y_1 + 2x_1 y_1 e_x - e_y,$$

$$\mu_3 = -e_z, \mu_4 = -e_u$$

适当选择 $k > 0$, 使得矩阵:

$$P = \begin{pmatrix} 2(B+1+k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

是正定的, 则误差系统 (7) 的零解是全局指数稳定的, 从而驱动系统 (5) 和响应系统 (6) 是全局指数同步的.

证明 我们构造一个正定的径向无界的 Lyapunov 函数:

$$V = e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + e_u^2$$

计算 V 沿着式 (7) 的正半轨线对时间的导数, 我们有:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2e_x \dot{e}_x + 2e_y \dot{e}_y + 2e_z \dot{e}_z + 2e_u \dot{e}_u \\ &= 2e_x [-(B+1)e_x + x_2^2 e_y - 2x_1^2 y_1 - e_x^2 y_1 + 2x_1 y_1 e_x + \alpha e_z - x_2^2 e_y + 2x_1^2 y_1 + e_x^2 y_1 - k e_x - 2x_1 y_1 e_x - \alpha e_z] \\ &\quad + 2e_y [B e_x - x_2^2 e_y + 2x_1^2 y_1 + e_x^2 y_1 - 2x_1 y_1 e_x - B e_x + x_2^2 e_y - 2x_1^2 y_1 - e_x^2 y_1 + 2x_1 y_1 e_x - e_y] \\ &\quad + 2e_z (-\omega e_u - e_z) + 2e_u (\omega e_z - e_u) \\ &= -2(B+1+k)e_x^2 - 2e_y^2 - 2e_z^2 - 2e_u^2 \\ &= -(e_x \ e_y \ e_z \ e_u) \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2(B+1+k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ e_u \end{pmatrix} = -e^T P e \tag{8}$$

其中 $P = \begin{pmatrix} 2(B+1+k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

很明显, 为了使误差系统 (7) 的零解是全局指数稳定的, 我们只需要矩阵 P 是正定的即可.

这当且仅当下列不等式成立:

$$2(B+1+k) > 0.$$

从上面的不等式, 我们可以推得 k 满足 $k > -B -$

1. 从而, 当 $k > -B - 1$ 时, 矩阵 P 是正定的, 而 \dot{V} 是负定的, 从式 (8) 和高等代数的相关知识, 我们可得到下面的式子:

$$\frac{dV}{dt} \leq -\lambda_{\min}(P) (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + e_u^2) \leq -\lambda_{\min}(P) V,$$

因此有:

$$e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + e_u^2 = V(X(t)) \leq V(X(t_0))$$

$$e^{-\lambda_{\min}(P)(t-t_0)}, t \geq t_0.$$

当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $V(X(t)) \rightarrow 0$, 从而误差系统 (7) 的零解是全局指数稳定的, 因此驱动系统 (5) 和响应系统 (6) 是全局指数同步的.

3.2 数值仿真

在这一部分, 我们用 4 阶 Runge-Kutta 算法来验证上面提出的方法的有效性.

在做数值仿真时, 我们将时间的步长设定为 0.001, 而将驱动系统 (5) 和响应系统 (6) 的初始条件分别取为:

$$(x_1(0), y_1(0), z_1(0), u_1(0)) = (60, 107, 8, 9)$$

$$(x_2(0), y_2(0), z_2(0), u_2(0)) = (-15, 49, -17, 29)$$

因此, 误差系统 (7) 的初始条件为:

$$(e_x(0), e_y(0), e_z(0), e_u(0)) = (-75, -58, -25, 20)$$

且定义同步误差为:

$$e(t) = \sqrt{e_x^2(t) + e_y^2(t) + e_z^2(t) + e_u^2(t)}.$$

对于定理 1 中的控制器, 我们选取控制参数 $k = 1$ 作为系统 (7) 的控制率, 那么响应系统 (6) 和驱动系统 (5) 的同步如图 15 所示, 同步误差 $e(t)$ 随时间 t 的变化如图 16 所示. 从仿真结果来看, 两个系统很快达到同步, 误差很快趋于 0. 在实际应用上不会造成资源的浪费.

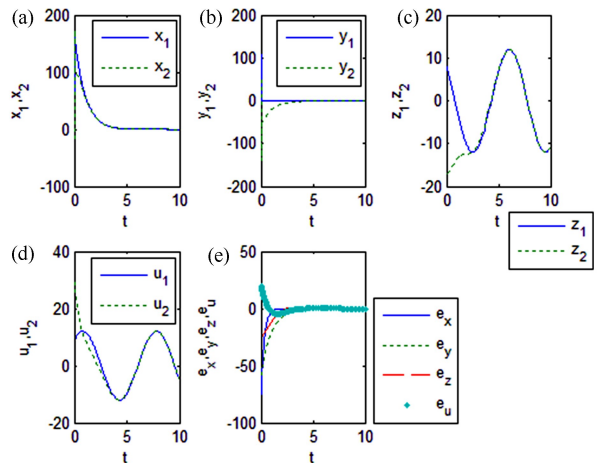
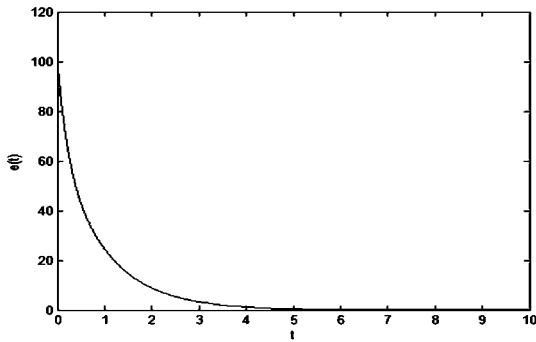


图 15 控制参数 $k=1$ 的同步

Fig. 15 Synchronization under the control parameter of $k=1$

图 16 误差 $e(t)$ 随时间 t 的变化Fig.16 Time history of error $e(t)$

4 结论

本文利用最大 Lyapunov 指数谱、分岔图、庞加莱截面以及功率谱和返回映射等仿真结果揭示了强迫布鲁塞尔振子系统(2)混沌行为的普适特征。同时采用线性反馈同步控制的方法,设计了控制器,实现了混沌系统的全局指数同步,并且给出了全局指数同步的充分条件。理论分析和数值仿真也都表明了方法的正确性。

参 考 文 献

- 魏诺. 非线性科学基础与运用. 北京: 科学出版社, 2004 (Wei N. Nonlinear science foundation and application. Beijing: Science Press, 2004 (in Chinese))
- 张子范, 张锁春. 三维俄勒冈振子的正定态和 Hopf 分岔及周期解分析. 数学学报, 2003, 46(1): 167~176. (Zhang Z F, Zhang S C. Analysis of the positive definite state and Hopf bifurcation and periodic solution of three dimensional Oregon oscillator. *Journal of Mathematics*, 2003, 46(1): 167~176 (in Chinese))
- 李蒙蒙, 常玉. BZ 振荡反应体系的复杂动力学行为. 北京化工大学学报(自然科学版), 2012, 39(1): 116~121 (Li M M, Chang Y. Complex dynamic behavior of BZ oscillating reaction system. *Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science Edition)*, 2012, 39(1): 116~121 (in Chinese))
- 王光瑞, 陈光旨. 非线性常微分方程的混沌运动. 桂林: 广西科学技术出版社, 1995 (Wang G R, Chen G Z. Chaotic motion of nonlinear ordinary differential equations. Guilin: Guangxi Science and Technology Press, 1995 (in Chinese))
- 童培庆, 赵灿东. 强迫布鲁塞尔振子中混沌行为的控制. 物理学报, 1995, 44(1): 35~42 (Tong P Q, Zhao C D. Control of chaotic behavior in forced Brusselator. *Journal of Physics*, 1995, 44(1): 35~42 (in Chinese))
- 王光瑞, 周玲云. 强迫布鲁塞尔振子数值研究的某些进展. 昆明工学院学报, 1989, 14(1): 100~106 (Wang G R, Zhou L Y. Some progress in numerical study of forced Brusselator. *Journal of Kunming Institute of Technology*, 1989, 14(1): 100~106 (in Chinese))
- 郝柏林. 分岔混沌、奇怪吸引子、湍流及其它——关于确定论系统中的内在随机性. 物理学进展, 1983, 3(3): 329~416 (Hao B L. Bifurcation chaos, strange attractor, turbulence and all that——on intrinsic stochasticity in deterministic systems. *Progress in Physics*, 1983, 3(3): 329~416. (in Chinese))
- 王光瑞, 陈式刚, 郝柏林. 强迫布鲁塞尔振子的阵发混沌. 物理学报, 1983, 22(9): 1139~1148 (Wang G R, Chen S G, Hao B L. intermittency chaos of forced Brusselator. *Journal of Physics*, 1983, 22(9): 1139~1148 (in Chinese))
- 王光瑞, 张淑誉, 郝柏林. 强迫布鲁塞尔振子的普适序列. 物理学报, 1984, 33(9): 1008~1016 (Wang G R, Zhang S Y, Hao B L. Universal sequence of forced Brusselator. *Journal of Physics*, 1984, 33(9): 1008~1016. (in Chinese))
- 王光瑞, 郝柏林. 强迫布鲁塞尔振子中从准周期运动到混沌态的过渡. 物理学报, 1984, 33(9): 1321~1325 (Wang G R, Hao B L. Transition from quasi periodic motion to chaotic state in forced Brusselator. *Journal of Physics*, 1984, 33(9): 1321~1325 (in Chinese))
- 孙鹏. 周期小扰动对强迫布鲁塞尔振子混沌的控制. 鞍山钢铁学院学报, 1997, 20(2): 47~49 (Sun P. Control of chaos in forced Brusselator by periodic small disturbance. *Journal of Anshan Iron and Steel Institute*, 1997, 20(2): 47~49 (in Chinese))
- 方锦清. 非线性系统中混沌控制方法、同步原理及其应用前景(二). 物理学进展, 1996, 16(2): 137~159 (Fang J Q. Chaos control method, synchronization principle and its application in nonlinear systems (two). *Progress in Physics*, 1996, 16(2): 137~159 (in Chinese))
- 陶朝海, 陆君安, 吕金虎. 统一混沌系统的反馈同步. 物理学报, 2002, 51(7): 1497~1501 (Tao C H, Lu J A, Lv J H. Feedback synchronization of unified chaotic system. *Journal of Physics*, 2002, 51(7): 1497~1501 (in Chinese))
- 黄云鹏, 朱芳来, 张书英. Lü 混沌系统自适应同步控

制. 自动测量与控制, 2007, 26(8): 54~55 (Huang Y P, Zhu F L, Zhang S Y. Adaptive synchronization control

of Lü chaotic system. *Automatic Measurement and Control*, 2007, 26(8): 54~55 (in Chinese))

NUMERICAL SIMULATION ON DYNAMAIC BEHAVIOR AND GLOBAL EXPONENTIAL SYNCHRONIZATION OF FORCED BRUSSELTATOR *

Liu Ying[†] Wang Heyuan Chen Huiying

(College of Sciences, Liaoning University of Technology, Jinzhou 121001, China)

Abstract The software of Matlab is used in this paper to simulate the whole process of dynamic behavior for the system divergence and chaos. The simulation results, such as the maximum Lyapunov exponent spectrum and bifurcation diagram, Poincare cross section, power spectrum and return map, are described to investigate the characteristics of system chaotic behavior. Meanwhile, the globally exponentially synchronization of the chaotic system is achieved by linear feedback synchronization control. The validity of the synchronous method is then theoretically performed by Lyapunov second method. Moreover, the simulation of synchronous system also verifies the effectiveness of the synchronous method.

Key words forced brusselator, linear feedback synchronization control, globally exponentially synchronization, numerical simulation

Received 18 December 2015, revised 3 April 2016.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11572146), Research Fund of Liaoning Provincial Education Department(L2013248) and Science and Technology Special Fund of Jinzhou (13A1D32)

[†] Corresponding author E-mail: 370647502@qq.com