

弱非线性耦合二维各向异性谐振子的动力学行为*

张晔¹ 陈向炜^{2†}

(1.苏州科技大学 数理学院,苏州 215009) (2.商丘师范学院物理与电气信息学院,商丘 476000)

摘要 研究了弱非线性耦合二维各向异性谐振子的奇点稳定性及其在相空间中的轨迹. 首先,求得弱非线性耦合二维各向异性谐振子的奇点;其次,分别利用 Lyapunov 间接法和梯度系统方法讨论该系统的平衡点稳定性;最后,用 Matlab 方法对系统进行数值模拟,并运用庞加莱截面观察系统在相空间的运动轨迹,发现随着能量的增加系统经历规则运动、规则运动与混沌并存等阶段,最后出现了混沌现象.

关键词 弱非线性耦合, 二维各向异性谐振子, 奇点, Lyapunov 间接法, 梯度系统

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-008

引言

法国著名数学家、物理学家 Lagrange 在著作《分析力学》中,应用数学分析的方法得到第二类 Lagrange 方程,为 Lagrange 力学系统奠定了基础.而后 Hamilton^[1,2]提出了 Hamilton 原理和正则方程,推广了 Lagrange 系统.牛青萍^[3]从 Bertrand 原理出发给出了一阶非线性非完整系统的 Lagrange 方程.梅凤翔等^[4-8]研究了 Lagrange 系统对称性、守恒量及其逆问题.郭永新等^[9]用现代几何方法对 Lagrange 系统动力学进行了研究.张毅等^[10]研究了 Lagrange 系统对称性的摄动与 Hojman 型绝热不变量. Lagrange 系统动力学的研究已经有成熟的理论^[3-11],但在 Lagrange 系统的动力学行为研究方面所涉不多,只有系统周期性^[12-19]及解的稳定性^[20-22]研究的相关成果.对一般的 Lagrange 方程研究其动力学行为比较困难,故本文研究了典型的 Lagrange 系统.弱非线性耦合二维各向异性谐振子是一典型而常见的 Lagrange 系统力学模型,在力学、分子与原子物理、声学等各个领域具有实际应用价值.楼智美等^[23]对其一阶近似 Lie 对称性与近似守恒量进行了研究,本文将研究其动力学行为,用 Lyapunov 间接法及梯度系统对其奇点进行分析,并利用庞加莱截面获得系统在相空间中的运动轨迹.

1 弱非线性耦合二维各向异性谐振子的奇点

弱非线性耦合二维各向异性谐振子的 Lagrange 函数为:

$$L = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2x_1^2 - \frac{1}{2}\omega_2^2x_2^2 + \delta x_1x_2 \quad (1)$$

其中 x_1, x_2 为广义坐标, ω_1, ω_2 为圆频率,且 $\omega_1 \neq \omega_2, \delta$ 为非线性耦合系数, $\delta \neq 0$ 且 $|\delta| \ll 1$.

由(1)得系统的运动微分方程为:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\omega_1^2x_1 + \delta x_2^2 \\ \ddot{x}_2 &= -\omega_2^2x_2 + 2\delta x_1x_2 \end{aligned} \quad (2)$$

令 $\dot{x}_1 = x_3, \dot{x}_2 = x_4$, 则(2)式可变为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\omega_1^2x_1 + \delta x_2^2 \\ \dot{x}_4 = -\omega_2^2x_2 + 2\delta x_1x_2 \end{cases} \quad (3)$$

令 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, 解得系统的奇点为 $O(0,0,0,0)$,

$$P_1\left(\frac{\omega_2^2}{2\delta}, \frac{\sqrt{2}\omega_1\omega_2}{\delta}, 0, 0\right), P_2\left(\frac{\omega_1^2}{2\delta}, -\frac{\sqrt{2}\omega_1\omega_2}{\delta}, 0, 0\right).$$

2 奇点的稳定性

2.1 用 Lyapunov 间接法判断系统奇点的稳定性

Lyapunov 间接法指的是先把非线性方程在奇点的领域内线性化,然后利用线性方程来判断奇

2016-12-20 收到第 1 稿,2017-01-28 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11372169)

† 通讯作者 E-mail: hcchenxw@163.com

点的稳定性.

系统(3)在 $O(0,0,0,0)$ 处的线性化系统为:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_3 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_4 \\ \dot{\xi}_3 = -\omega_1^2 \xi_1 \\ \dot{\xi}_4 = -\omega_2^2 \xi_2 \end{cases} \quad (4)$$

解得其特征根为:

$$\lambda_1 = i\omega_1, \lambda_2 = -i\omega_1, \lambda_3 = i\omega_2, \lambda_4 = -i\omega_2 \quad (5)$$

由(5)知方程有四个纯虚根,此时奇点 $O(0,0,0,0)$ 为系统的椭圆点,由于特征方程无重根,可知线性化方程(4)的奇点是稳定的,此时不能判断原系统(3)奇点的稳定性.

系统(3)在 $P_1\left(\frac{\omega_2^2}{2\delta}, \frac{\sqrt{2}\omega_1\omega_2}{\delta}, 0, 0\right)$ 处的线性化

系统为:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_3 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_4 \\ \dot{\xi}_3 = -\omega_1^2 \xi_1 + 2\sqrt{2}\omega_1\omega_2 \xi_2 \\ \dot{\xi}_4 = 2\sqrt{2}\omega_1\omega_2 \xi_1 \end{cases} \quad (6)$$

解得其特征值为:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\frac{-\omega_1^2 + \sqrt{\omega_1^4 + 32\omega_1^2\omega_2^2}}{2}} \\ \lambda_2 &= -\sqrt{\frac{-\omega_1^2 + \sqrt{\omega_1^4 + 32\omega_1^2\omega_2^2}}{2}} \\ \lambda_3 &= i\sqrt{\frac{-\omega_1^2 - \sqrt{\omega_1^4 + 32\omega_1^2\omega_2^2}}{2}} \\ \lambda_4 &= -i\sqrt{\frac{-\omega_1^2 - \sqrt{\omega_1^4 + 32\omega_1^2\omega_2^2}}{2}} \end{aligned} \quad (7)$$

由(7)知方程有一个正的实根、一个负的实根和一对共轭纯虚根,此时奇点 P_1 为系统的一类鞍点,线性系统(6)的奇点是不稳定的,原系统(3)的奇点 P_1 也是不稳定的.

经计算知奇点 P_2 与 P_1 有相同的特征根,故奇点 P_2 和奇点 P_1 具有相同的性质.

2.2 用梯度系统判断系统奇点的稳定性

当用 Lyapunov 间接法无法判断奇点的稳定性时,可用 Lyapunov 直接法判断奇点的稳定性,但还没有普遍适用的求 Lyapunov 函数的办法;还可以用梯度系统的方法判断奇点的稳定性,若原系

统(3)可化为梯度系统或斜梯度系统,便可以用梯度系统或斜梯度系统的性质判断奇点的稳定性. 定常的 Lagrange 系统都是斜梯度系统.

斜梯度系统的微分方程为^[16]:

$$\dot{x}_i = a_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (8)$$

方程(8)中的函数 $V = V(x)$ 称为能量函数,矩阵 (a_{ij}) 是反对称的,即有 $a_{ij} = -a_{ji}$.

斜梯度系统有以下性质^[16]:

1) 能量函数 V 是斜梯度系统的积分; 2) 如果 V 可以是 Lyapunov 函数,那么斜梯度系统的解 $x_i = x_{i0}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 是稳定的.

下面将系统(3)化为斜梯度系统,令 $a_1 = x_1, a_2 = x_2, a_3 = x_3, a_4 = x_4$, 并取:

$$V = \frac{1}{2}\omega_1^2 a_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 a_2^2 + \frac{1}{2}a_3^2 + \frac{1}{2}a_4^2 - \delta a_1 a_2^2$$

则:

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{a}_3 \\ \dot{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^2 a_1 - \delta a_2^2 \\ \omega_2^2 a_2 - 2\delta a_1 a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial a_1} \\ \frac{\partial V}{\partial a_2} \\ \frac{\partial V}{\partial a_3} \\ \frac{\partial V}{\partial a_4} \end{pmatrix}$$

显然,系统(3)可化为梯度系统. 考虑能量函数 V 的正定性,将函数 V 化为(10)式:

$$V = (a_1, a_2, a_3, a_4) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\omega_2^2 - \delta a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad (10)$$

式(10)的系数矩阵的顺序主子式为:

$$H_1 = \frac{1}{2}\omega_1^2, H_2 = \frac{1}{2}\omega_1^2 \left(\frac{1}{2}\omega_2^2 - \delta a_1 \right)$$

$$H_3 = \frac{1}{4}\omega_1^2 \left(\frac{1}{2}\omega_2^2 - \delta a_1 \right), H_4 = \frac{1}{8}\omega_1^2 \left(\frac{1}{2}\omega_2^2 - \delta a_1 \right)$$

令 $H_i > 0 (i=1, 2, 3, 4)$, 解得 $\|a_1\| < \frac{\omega_2^2}{2|\delta|}$. 即取领域

$U = \left\{ (a_1, a_2, a_3, a_4) \mid \|a_1\| < \frac{\omega_2^2}{2|\delta|} \right\}$, 能量函数

V 在领域 U 内是正定的, 可作为 Lyapunov 函数, 故奇点 $O(0, 0, 0, 0)$ 是稳定的.

3 系统在相空间中的轨迹

由斜梯度系统的性质可知函数 $E = \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}x_4^2 +$

$\frac{1}{2}\omega_1^2 x_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 x_2^2 - \delta x_1 x_2$ 为系统(3)的积分同时也是系统的总能. 运用庞加莱截面 ($x_2=0, x_4 < 0$ 时), 观察系统在相空间中的轨迹. 取 $\omega_1=1, \omega_2=\sqrt{2}, \delta=0.1$, 观察庞加莱截面发现随着 E 的增加, 系统的运动主要分为 3 个阶段.

规则运动阶段 图 1 中(a)(b)是 E 分别取 10 和 25 时, 系统相轨迹在庞加莱截面上的截点. 由其可以看出每个图都有很多截点所构成的闭曲线, 这表示系统在相空间中做准周期运动. 随着 E 的增大, 截面的面积也逐渐增大, 曲线并没有破裂, 仅发生了光滑形变, 这表示曲线可以承受一定的扰动. 此时系统的运动是规则的, 主要做准周期运动.

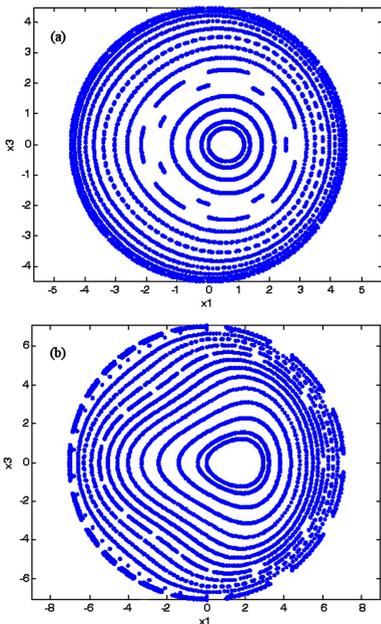


图 1 E 分别为 10、25 时的截面图

Fig.1 Section poincare surface of different energy

(a) $E=10$; (b) $E=25$

混沌运动与规则运动并存 随着 E 的增加, 曲线破裂, 出现小范围内的混沌. 随着 E 的增加, 曲面破裂产生更小的闭曲面, E 继续增加破裂的曲面增多并出现不规则运动, 此时规则运动与不规则运动并存, 如图 2(a)(b)(c).

混沌运动阶段 E 继续增大至其鞍点值时, 如图 2(d), 此时几乎所有曲面都破裂, 系统主要做混沌运动.

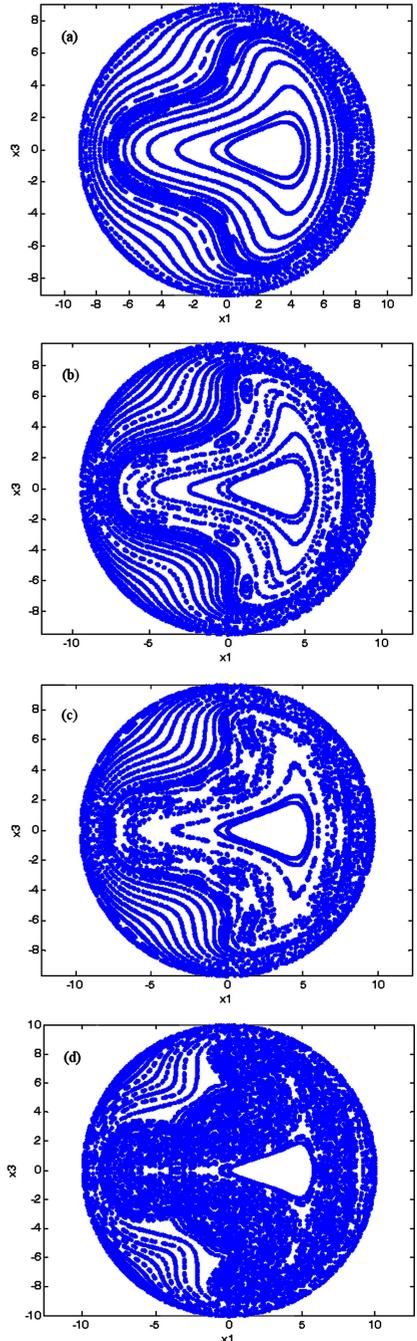


图 2 E 分别为 41、45、46.7、50 时的截面图

Fig.2 Section poincare surface of different energy

(a) $E=41$; (b) $E=45$; (c) $E=46.7$; (d) $E=50$

4 结论

随着总能 E 的增大, 系统经历了规则运动、规则运动与混沌并存、混沌运动 3 个阶段, 每个阶段都有不同的运动特征. 在规则运动阶段, 系统主要做准周期运动; 规则运动与混沌并存时, 曲面开始破裂, 产生小范围内的混沌; 在混沌运动阶段, 绝大部分曲面破裂, 系统主要做混沌运动. 通过图像研究, 定性地认识了弱非线性耦合二维各向异性谐振子在相空间中的运动, 当非线性耦合系数 δ 取值极小时, 系统主要做准周期运动.

参 考 文 献

- Hamilton W R. On a general method in dynamics. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, part II, 1834, 247~308
- Hamilton W R. Second essay on a general method in dynamics. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, part I, 1835, 95~144
- 牛青萍. 经典力学基本微分原理与不完整力学组的运动方程. *力学学报*, 1964, 7(2): 139~148. (Niu Q P. The motion equations of the basic differential principle of classical mechanics and the group of incomplete mechanics. *Acta Mechanica Sinica*, 1964, 7(2): 139~148 (in Chinese))
- 梅凤翔. 李群李代数对约束力学系统的应用. 北京: 科学出版社, 1999 (Mei F X. Applications of Lie Groups and Lie Algebras to constrained mechanical systems. Beijing: Science Press, 1999 (in Chinese))
- Mei F X. Form invariance of Lagrange system. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 2000, 9(2): 120~124
- 梅凤翔, 李彦敏. Lagrange 系统的 Lie 对称性与动力学逆问题. *商丘师范学院学报*, 2013, 29(3): 8~10. (Mei F X, Li Y M. Lie symmetry and inverse problem of dynamics for Lagrange system. *Journal of Shangqiu Normal University*, 2013, 29(3): 8~10 (in Chinese))
- 梅凤翔, 尚玫. 一阶 Lagrange 系统的 Lie 对称性与守恒量. *物理学报*, 2000, 49(10): 1901~1903 (Mei F X, Shang M. Lie symmetries and conserved quantities of first order Lagrange systems. *Acta Physica Sinica*, 2000, 49(10): 1901~1903 (in Chinese))
- 刘畅, 梅凤翔, 郭永新. Lagrange 系统的共形不变性与 Hojman 守恒量. *物理学报*, 2008, 57(11): 6704~6708 (Liu C, Mei F X, Guo Y X. Conformal symmetry and Hojman conserved quantity of Lagrange system. *Acta Physica Sinica*, 2008, 57(11): 6704~6708 (in Chinese))
- 郭永新, 罗绍凯, 梅凤翔. 非完整约束系统几何动力学研究进展: Lagrange 理论及其它. *力学进展*, 2004, 34(4): 477~492 (Guo Y X, Luo S K, Mei F X. Progress of geometric dynamics of non-holonomic constrained mechanical systems: Lagrange theory and others. *Advances in Mechanics*, 2004, 34(4): 477~492 (in Chinese))
- 张毅, 范存新, 梅凤翔. Lagrange 系统对称性的摄动与 Hojman 型绝热不变量. *物理学报*, 2006, 55(7): 3237~3240 (Zhang Y, Fan C X, Mei F X. Perturbation of symmetries and Hojman adiabatic invariants for Lagrangian system. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(7): 3237~3240 (in Chinese))
- 刘学锋, 张斌, 方建会. 位形空间中约束力学系统的 Lagrange 对称性与守恒量. *动力学与控制学报*, 2015, 13(2): 81~85 (Liu X F, Zhang B, Fang J H. Symmetry and conserved quantity of Lagrangians for a constrained mechanical system. *Journal of Dynamics and Control*, 2015, 13(2): 81~85 (in Chinese))
- Broucke R, Anderson J D, Blitzer L, et al. Periodic solutions about the collinear Lagrangian solution in the general problem of three bodies. *Celestial Mechanics*, 1981, 24(1): 63~82
- Nowakowski A, Rogowski A. On the New Variational Principles and Duality for Periodic Solutions of Lagrange Equations with Superlinear Nonlinearities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, 264(1): 168~181
- Liu S Q. On periodic solutions of nonautonomous Lagrangian systems. *Acta Analysis Functionalis Applicata*, 2003, 5(1): 75~78
- Brezis H, Mawhin J. Periodic solutions of Lagrangian system of relativistic oscillators. *Communications in Applied Analysis*, 2011, 15(2): 235~250
- Acinas S, Buri L, Giubergia G, et al. Some existence results on periodic solutions of Euler-Lagrange equations in an Orlicz-Sobolev space setting. *Nonlinear Analysis*, 2015, 125(466): 681~698
- Liu Q H, Li X, Qian D B. An abstract theorem on the existence of periodic motions of non-autonomous Lagrange systems. *Journal of Differential Equations*, 2016, 261(10): 5784~5802
- 李成岳. 具有有界位势的 Lagrange 系统的周期解. *高校应用数学学报: A 辑*, 1996, 11(2): 159~166 (Li C

- Y. Periodic solutions of Lagrange systems with bounded potential. *Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities*, 1996,11(2):159~166 (in Chinese))
- 19 林淑容,王纓,吴行平. 两类 Lagrange 系统的周期解. 西南师范大学学报, 2001,26(3):243~246 (Lin S R, Wang Y, Wu X P. Periodic solutions for two classes of Lagrangian systems. *Journal of Southwest China Normal University*, 2001,26(3):243~246 (in Chinese))
- 20 梅凤翔,吴惠彬. 一阶 Lagrange 系统的梯度表示. 物理学报, 2013,62(21):214501. (Mei F X, Wu H B. A gradient representation of first-order Lagrange system. *Acta Physica Sinica*, 2013,62(21):214501 (in Chinese))
- 21 梅凤翔. 关于梯度系统. 力学与实践, 2012,34(1):89~90 (Mei F X. About gradient system. *Mechanics in Engineering*, 2012,34(1):89~90
- 22 梅凤翔. 关于斜梯度系统. 力学与实践, 2013,35(5):79~81 (Mei F X. About skew-gradient system. *Mechanics in Engineering*, 2013,35(5):79~81
- 23 楼智美,梅凤翔,陈子栋. 弱非线性耦合二维各向异性谐振子的一阶近似 Lie 对称性与近似守恒量. 物理学报, 2012,61(11):110204 (Lou Z M, Mei F X, Chen Z D. The first-order approximate Lie symmetries and approximate conserved quantities of the weak nonlinear coupled two-dimensional anisotropic harmonic oscillator. *Acta Physica Sinica*, 2012,61(11):110204 (in Chinese))

DYNAMICS BEHAVIOR OF WEAK NONLINEAR COUPLED TWO-DIMENSIONAL ANISOTROPIC HARMONIC OSCILLATOR*

Zhang Ye¹ Chen Xiangwei^{2†}

(1. School of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009, China)

2. Department of Physics and Information Engineering, Shangqiu Normal University, Shangqiu 476000, China)

Abstract The stability of singular points and their trajectories in phase space of the weak nonlinear coupled two-dimensional anisotropic harmonic oscillator are studied. Firstly, the singular points of the weak nonlinear coupled two-dimensional anisotropic harmonic oscillator are obtained. Based on the Lyapunov indirect method and the gradient method, the stability of equilibrium points of this system are then discussed. Finally, numerical simulations are performed by the software Matlab, and Poincare surface of the section are used to study the trajectories of the system in phase space. It is found that, with the increase of energy, the chaos appears finally through two stages of regular motion as well as the coexistence of regular motion and chaos.

Key words weakly nonlinear coupled, 2D anisotropic harmonic oscillator, singular point, Lyapunov indirect method, gradient system