

基于 Karnopp 摩擦的柔性滑移铰的建模与仿真*

章杰[†] 王琪

(北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100191)

摘要 对含 Karnopp 摩擦的柔性滑移铰系统进行动力学建模和仿真. 将滑移铰中的滑块视为柔性体, 滑道视为刚性接触面, 考虑滑道与滑块之间的间隙. 由于柔性滑块与滑道的接触状态和摩擦情况比较复杂, 采用有限元方法建立了柔性滑块的力学模型, 基于罚函数方法建立含 Karnopp 摩擦柔性滑移铰接触力模型, 通过试算迭代法判断柔性滑块各节点的接触状态, 基于 KED 方法和 Newmark 方法给出了含该滑移铰机械系统动力学方程的数值算法. 最后, 以含 Karnopp 摩擦的柔性滑移铰和驱动摆杆构成的机械系统为例进行动力学仿真, 分析了其动力学特性, 验证了本文给出的方法的有效性.

关键词 柔性滑移铰, Karnopp 摩擦, 间隙, 有限元

DOI: 10.6052/1672-6553-2016-004

引言

滑移铰在机械系统中被广泛应用, 但滑移铰中双边约束、摩擦等非线性因素的存在使得相关动力学问题的求解变得复杂, 以往的研究常将滑移铰简化为理想铰, 即不考虑滑块与滑道之间的摩擦、间隙、碰撞等因素, 但这些因素在实际的含滑移铰机械系统中广泛存在^[1]. 近年来不少关于滑移铰动力学行为的研究开始考虑其间隙、摩擦和碰撞等因素对系统动力学行为的影响. 文献[1-2]考虑滑块与滑道之间的间隙, 用非光滑动力学方法对含滑移铰的平面多刚体系统进行了建模仿真. 文献[3]考虑碰撞和摩擦, 用线性互补方法对含滑移铰和转铰的机械系统进行了研究. 文献[4]考察了间隙、摩擦和碰撞等因素对曲柄滑块机构动力学行为的影响. 文献[5-6]考虑摩擦, 将间隙视为无穷小且忽略块滑与滑道的碰撞, 对含滑移铰的单自由度系统动力学解的存在性和唯一性进行了研究. 文献[7-8]同样忽略滑移铰的间隙和碰撞, 基于线性互补方法对含库仑干摩擦滑移铰的多体系统动力学行为进行了研究. 文献[9-11]对平面和空间含摩擦滑移铰的动力学行为进行了研究. 这些研究将滑移铰视为刚体, 忽略了滑块变形对系统动力学的影响,

如果使用修正的库仑摩擦模型时, 无法反映粘滞状态; 如果使用库仑干摩擦时, 可反映粘滞状态, 但是滑块处于粘滞状态时, 由于滑道的约束和静摩擦力的存在使得系统处于超静定状态, 基于刚体模型已无法唯一地求滑道作用于滑块上的接触力.

文献[12-13]考虑物体接触点的局部变形, 基于接触力学理论和线性互补问题的算法, 给出了含接触、碰撞以及库仑干摩擦, 同时具有理想定常约束和非定常约束的平面多刚体系统动力学的建模与数值计算方法, 但该方法不适用范围于含双边约束的滑移铰系统.

含驱动约束与摩擦的滑移铰在很多机械系统中存在. 文献[14]将滑移铰视为柔性体, 加入变形协调条件, 应用有限元方法系统地研究了间隙、库仑摩擦和滑块变形对曲柄滑块机构动力学行为的影响, 但未考虑驱动约束. 文献[15-16]对含驱动约束与刚性滑移铰多体系统动力学问题进行了建模和仿真, 但该方法无法完全求出处于粘滞状态时接触点的约束力.

本文在上述研究的基础上, 研究了基于 Karnopp 摩擦模型^[17]的含间隙柔性滑移铰的建模和数值算法. 利用有限元方法和罚函数方法, 建立柔性滑移铰的力学模型, 应用结构动力学方法建立滑移铰的动

2016-01-10 收到第1稿, 2016-02-24 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11372018)资助项目

[†] 通讯作者 E-mail: jiezhanghunan@126.com

力学方程,基于 KED 方法和 Newmark 方法给出了含该滑移铰机械系统动力学方程的数值算法,最后通过数值仿真分析含驱动约束和柔性滑移铰机械系统的动力学行为,验证该方法的有效性.

1 含驱动约束与摩擦的柔性滑移铰的建模

1.1 滑移铰的接触形式

设滑移铰由滑块和滑道构成,且存在有间隙,因此滑块在滑道内的接触形式如图 1 所示.

形式 1: 单面接触状态,如图 1(a) (b) 所示;

形式 2: 双面接触状态,如图 1(c) (d) 所示;

形式 3: 非接触状态,如图 1(e) 所示.

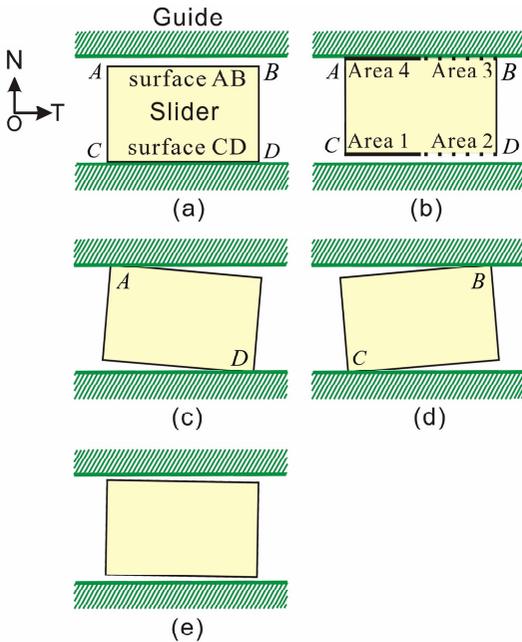


图 1 滑移铰的接触形式示意图

Fig. 1 Contact states of translational joint

1.2 Karnopp 摩擦模型

摩擦是一种复杂的物理现象,摩擦力产生的机理以及摩擦对系统动力学行为影响的研究已有几百年的历史,基于经典的库仑摩擦和粘性摩擦模型^[17-19],Karnopp 提出了 Karnopp 模型,该模型既能反映静摩擦特征,也能反映摩擦的粘性特征,并且通过定义零速区间 $|v| < DV$,避免了在仿真或控制中的零速度检测问题以及黏滞和滑动摩擦状态方程间的切换问题^[17,20].其数学描述如下^[17,19]:

$$F = \begin{cases} -\operatorname{sgn}(v)\mu F_N - f_v v & \text{if } |v| > DV \\ \max(-F^e(t), -\mu' F_N) & \text{if } |v| < DV, F^e(t) \geq 0 \\ \min(-F^e(t), \mu' F_N) & \text{if } |v| < DV, F^e(t) < 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, F 是滑道作用于滑块上某一接触面的摩擦力, F_N 为该接触面的法向力, μ' 为静摩擦系数, μ 为动摩擦系数, v 为滑块质心速度, $F^e(t)$ 为作用于滑块上的所有外力(不含滑道与滑块间的作用力)在滑道切向投影的代数和, $f_v v$ 为粘性摩擦部分, f_v 为粘性系数, $\operatorname{sgn}(x)$ 是符号函数

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

1.3 含 Karnopp 摩擦的柔性滑移铰的接触模型

Karnopp 摩擦模型中的摩擦力包括干摩擦部分和粘性摩擦部分,首先对干摩擦部分进行建模.

罚函数方法是解决接触问题应用最广泛的方法之一^[14,20],其物理意义是将接触面上各节点处的接触力用线弹性模型描述^[14,21-23].本文基于罚函数方法,建立含 Karnopp 摩擦的柔性滑移铰的接触模型.

应用有限元方法将滑块划分为若干个微小单元,基于文献[14]中接触力和摩擦力的表示方法,将滑块接触面上第 i 个节点处接触力表述如下:

当 $|v| < DV$ 且 $F_T^e(t) \geq 0$, 有:

$$\begin{cases} F_{f_i} = \max(-k_T c_i d_{T_i}, -\mu' k_N c_i d_{N_i}) & \text{surface AB} \\ F_{f_i} = \max(-k_T c_i d_{T_i}, \mu' k_N c_i d_{N_i}) & \text{surface CD} \\ F_{N_i} = -k_N c_i d_{N_i} \end{cases} \quad (2)$$

其中: F_{f_i} 为该节点切向摩擦力, F_{N_i} 为节点法向接触力,其正方向与图 1 中坐标系正方向一致. k_T 和 k_N 分别为切向和法向弹簧的弹簧刚度(罚函数方法中称为罚因子). d_{T_i} 和 d_{N_i} 分别为该节点在该时刻的微小变形位移在切向和法向上的投影. Surface AB 和 CD 分别为滑块的两个接触面,分别由 Area1、2 和 Area3、4 构成,如图 1 所示. c_i 为接触状态系数,定义为

$$\begin{cases} c_i = 1 & \text{if contacted} \\ c_i = 0 & \text{if not contacted} \end{cases}$$

当 $|v| < DV$ 且 $F_T^e(t) < 0$, 有:

$$\begin{cases} F_{f_i} = \min(-k_T c_i d_{T_i}, \mu' k_N c_i d_{N_i}) & \text{surface AB} \\ F_{f_i} = \min(-k_T c_i d_{T_i}, -\mu' k_N c_i d_{N_i}) & \text{surface CD} \\ F_{N_i} = -k_N c_i d_{N_i} \end{cases} \quad (3)$$

当 $|v| > DV$, 有:

$$\begin{cases} F_{f_i} = -\operatorname{sgn}(v_{cr})\mu k_N c_i d_{Ni} & \text{surface } AB \\ F_{f_i} = \operatorname{sgn}(v_{cr})\mu k_N c_i d_{Ni} & \text{surface } CD \\ F_{Ni} = -k_N c_i d_{Ni} \end{cases} \quad (4)$$

其中 v_{cr} 为滑块质心速度在切向上的投影。

式(2)、(3)和(4)建立了节点接触力和节点微小变形位移之间的函数关系,该节点摩擦力所处状态和接触状态系数 c_i 的判断可由文献[14]给出的方法确定。

由于 Karnopp 摩擦模型中包含干摩擦项,因此滑块在滑道内的运动将会出现黏滞-滑移(stick-slip)现象,图2,3为基于罚函数方法和干摩擦的性质建立的柔性滑移铰接触模型示意图^[14],分别描述了滑块处于双面接触时的 stick 状态和 slip 状态。图中用线性弹簧表示了节点接触力和该时刻节点微小位移之间的线性关系,实线表示该节点与滑道接触,虚线表示该节点未与滑道接触,细方框表示该节点处切向摩擦力与法向接触力成正比例关系。

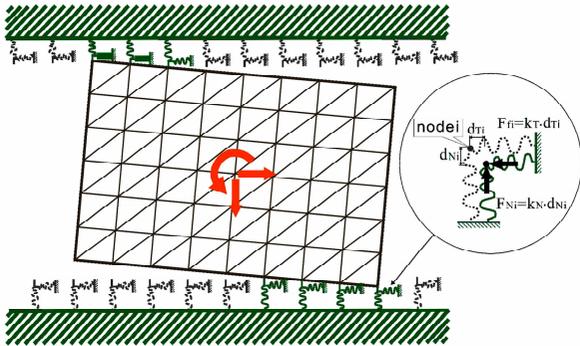


图2 Stick状态下滑移铰接触模型

Fig. 2 Model of the interaction of slider under stick state

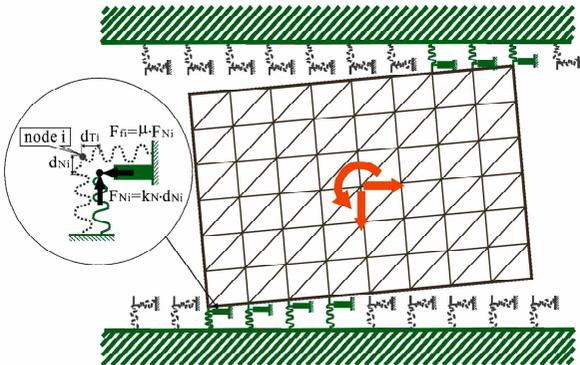


图3 Slip状态下滑移铰接触模型

Fig. 3 Model of the interaction of slider under slip state

2 滑移铰系统动力学方程及其求解策略

设柔性滑移铰由 n 个节点构成,该滑移铰接触

力向量 $\mathbf{F}^c = [F_{f_1}, F_{N_1} \cdots F_{f_i}, F_{N_i} \cdots F_{f_n}, F_{N_n}]^T$ 和该时刻的滑移铰的微小变形位移 $\mathbf{d} = [d_{T_1}, d_{N_1} \cdots d_{T_i}, d_{N_i} \cdots d_{T_n}, d_{N_n}]^T$ 之间的关系可以用矩阵方程的形式表示如下,

$$\mathbf{F}^c = \mathbf{K}^c \mathbf{d} \quad (5)$$

其中, \mathbf{K}^c 为滑移铰接触刚度矩阵。基于含柔性滑移铰多体系统动力学的试算迭代方法^[14],并根据接触状态和运动状态,由(2)-(4)计算可得到该矩阵。

考虑 Karnopp 摩擦模型中的粘性项 $f^v = -k_v v$, 应用有限元中的动力学方法^[23],含 Karnopp 摩擦的柔性滑块动力学方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}^e + \mathbf{F}^c - k_v \mathbf{v} \quad (6)$$

其中 \mathbf{M} 为滑块质量矩阵, \mathbf{q} 为滑块的广义坐标, $\ddot{\mathbf{q}}$ 为广义坐标对时间的二阶导数, \mathbf{K} 为滑块的总体刚度矩阵, \mathbf{F}^e 为作用于滑块的外载荷向量(包含自身重力,主动力,其它构件对其的作用力,但不包括滑道对其的作用力), \mathbf{v} 为滑块上处于接触状态的节点的速度在切向投影的列向量。

应用牛顿欧拉法建立处滑移铰外其它刚体的动力学方程,方程的一般形式如下:

$$\tilde{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \mathbf{F}', t) \quad (7)$$

其中: $\tilde{\mathbf{M}}$ 为广义质量矩阵, \mathbf{q} 为其广义坐标, \mathbf{F}' 为滑移铰与其它物体间的相互作用力。当用 Newmark 方法等经典的有限元数值算法联立求解方程(6)和(7),在迭代过程中,由于加速度的震荡和接触状态的判断耦合,会使得迭代过程不收敛。本文利用试算法、柔性滑移铰多体系统动力学方法的 KED 方法^[14]和 Newmark 方法^[23]联立迭代求解方程组(6)和(7)可求出系统的所有运动量和物体间所有的相互作用力。

3 算例

设含柔性滑移铰的机械系统如图4所示,摆杆 AB 铰接于滑块 B 并由电机驱动以角速度 ω_0 转动。滑道与滑块间的摩擦为 Karnopp 摩擦,用本文给出的方法对其进行动力学仿真。

在如图4所示系统中,均质滑块长为 a ,高为 b ,质量为 m_2 ,水平弹簧的刚度系数为 k ,外激励 $F = F_0 \sin(\Omega t)$ 作用于滑块质心。滑块和滑道之间的动摩擦系数和静摩擦系数分别为 μ 和 μ' 。摆杆 AB

质量为 m_1 , 长度为 L , 摆杆质心 C 坐标为 x_1, y_1 , 滑块质心 B 的坐标为 x_2, y_2 . 柔性滑块的弹性模量为 E , 泊松比为 ν , 滑块被划分为 684 个平面三节点三角形单元. 相关的参数设定如下:

$$m_1 = 2.0\text{kg}, m_2 = 1.0\text{kg}, a = 0.6\text{m}, b = 0.5\text{m},$$

$$F_0 = 3.0\text{N}, \omega_0 = \pi/4\text{s}^{-1}, k = 1.0, L_0 = 0.25\text{m},$$

$$\Omega = \pi/2\text{s}^{-1}, \mu = 0.03, \mu' = 0.04, L = 2.0\text{m},$$

$$E = 2.1 \times 10^{11}\text{pa}, \nu = 0.25$$

系统初始条件为:

$$x_1 = 1.0\text{m}, y_1 = 0.0\text{m}, \theta_1 = 0.0\text{rad}$$

$$x_2 = 0.0\text{m}, y_2 = 0.0\text{m}$$

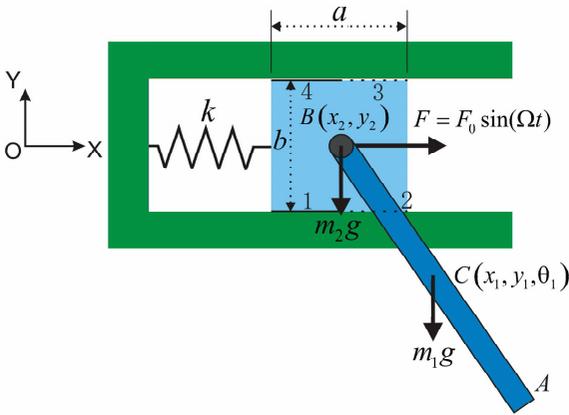


图4 滑移铰摆杆机构示意图

Fig. 4 Slider-bar system with driving constraint

图5为滑块质心 x_2 的时间历程图, 图6为 \dot{x}_2 的时间历程图, 由图可以看出系统的稳态运动为周期运动, 其周期为 8s, 滑块呈现出 stick-slip 运动状态.

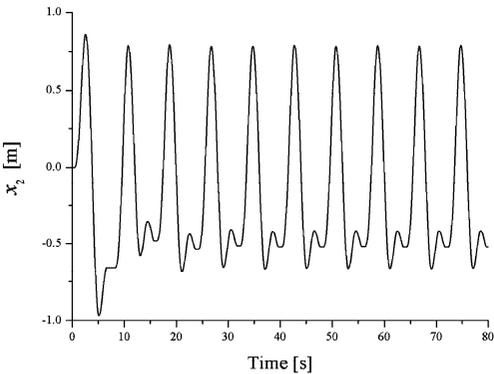


图5 滑块质心坐标 x_2 的时间历程图

Fig. 5 Time history of coordinate x_2 for slider mass center

图7为 \ddot{x}_2 的时间历程图, 可以看出加速度会有突变, 这是因为当速度方向变化时, 摩擦力方向也发生变化, 从而引起加速度.

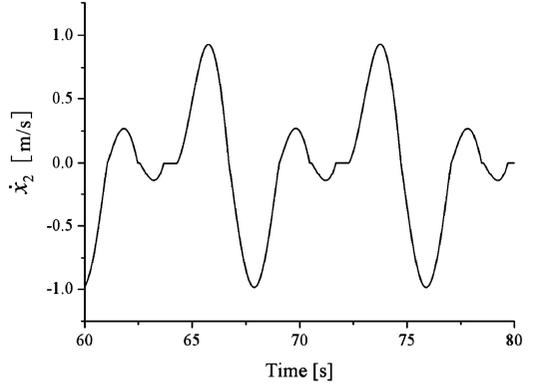


图6 滑块质心速度 \dot{x}_2 的时间历程图

Fig. 6 Time history of velocity \dot{x}_2 for slider mass center

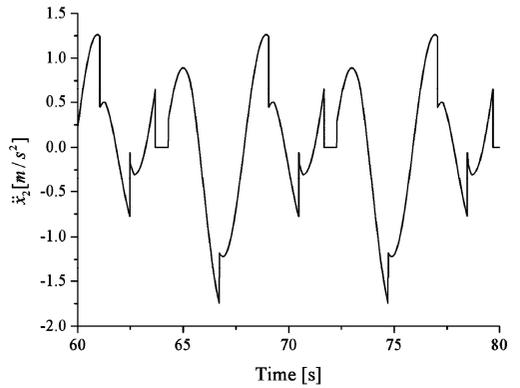


图7 滑块质心加速度 \ddot{x}_2 的时间历程图

Fig. 7 Time history of acceleration \ddot{x}_2 for slider mass center

图8为驱动力矩的时间历程图, 可以看到在某几个时刻会发生微小突变. 该突变是由于摩擦力的突变引起滑移铰加速度的突变导致驱动力矩的突变.

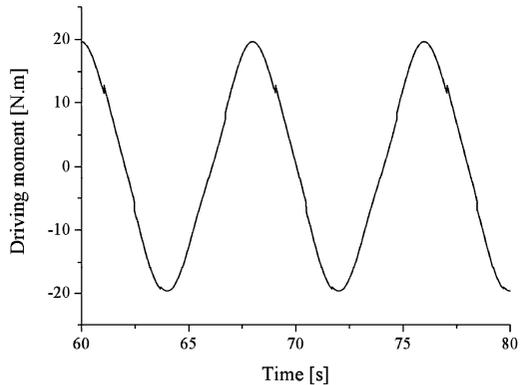


图8 驱动力矩的时间历程图

Fig. 8 Time history of driving moment

图9给出了柔性滑移铰四个区域摩擦力的时间历程图, 其中摩擦力在某段时间区间内恒为零, 则表明该区域处于未接触状态.

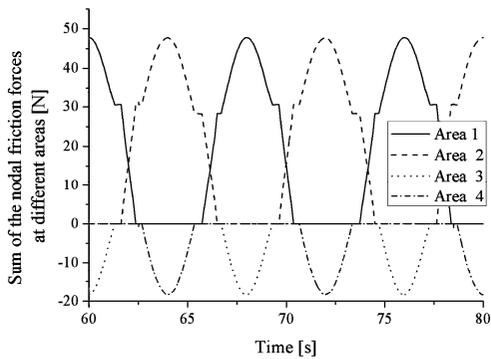


图9 不同区域摩擦力的时间历程图

Fig. 9 Time history of the nodal friction forces at different areas

4 结论

本文提出了含 Karnopp 摩擦的柔性滑移铰系统的建模与仿真方法,研究了 Karnopp 摩擦、滑块变形、驱动约束和间隙对滑移铰动力学行为的影响. 基于有限元方法和罚函数方法,建立含 Karnopp 摩擦的柔性滑移铰的接触模型并建立其动力学方程,用试算迭代法确定柔性滑块各节点的接触状态系数并计算各节点摩擦力,基于 KED 方法和 Newmark 方法对含 Karnopp 摩擦的柔性滑移铰和驱动摆杆构成的机械系统进行了数值仿真. 仿真结果表明了该方法的有效性,并揭示了滑块的摩擦与变形,以及驱动摆杆对滑移铰动力学行为的影响. 与基于滑块刚体模型的方法相比,该方法不但能计算滑块变形对该滑移铰动力学行为的影响,也能求解该滑块处于双面接触且处于 stick 状态时的接触力.

参 考 文 献

- Flores P, Leine R, Glocker C. Modeling and analysis of planar rigid multibody systems with translational clearance joints based on the non-smooth dynamics approach. *Multibody System Dynamics*, 2010,23(2):165~190
- Flores P, Ambrósio J, Claro J C P, Lankarani H M. Translational joints with clearance in rigid multibody systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2008,3(1):112~113
- Thümmel T, Funk K. Multibody modelling of linkage mechanisms including friction, clearance and impact. In: Proceedings of Tenth World Congress on the Theory of Machine and Mechanisms, Oulu University, Finland, 1999,

- 4:1375~1386
- Farahanchi F, Shaw S. Chaotic and periodic dynamics of a slider-crank mechanism with slider clearance. *Journal of Sound and Vibration*, 1994,177(3):307~324
- Klepp H J. The existence and uniqueness of solutions for a single-degree-of-freedom system with two friction-affected sliding joints. *Journal of Sound and Vibration*, 1995,185(2):364~371
- Klepp H J. Modes of contact and uniqueness of solutions for systems with friction-affected sliders. *Journal of Sound and Vibration*, 2002,254(5):987~996
- Zhuang F F, Wang Q. Modeling and simulation of the non-smooth planar rigid multibody systems with frictional translational joints. *Multibody System Dynamics*, 2013,29(4):403~423
- Wang Q, Peng H L, Zhuang F F. A constraint-stabilized method for multibody dynamics with friction affected translational joints based on HLCP. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, 2011,2(2):589~605
- 罗晓明,齐朝晖,孔宪超. 平面棱柱铰内考虑摩擦效应的接触分析. 计算力学学报,2012,29(3):387~392 (Luo X M, Qi Z H, Kong X C. Non-colliding contact analysis with friction in the planar prismatic joint. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012,29(3):387~392 (in Chinese))
- Qi Z H, Luo X M, Huang Z H. Frictional contact analysis of spatial prismatic joints in multibody systems. *Multibody System Dynamics*, 2011,26(4):441~468
- Qi Z H, Xu Y S, Luo X M, Yao S J. Recursive formulations for multibody systems with frictional joints based on the interaction between bodies. *Multibody System Dynamics*, 2010,24(2):133~166
- 王晓军,王琪. 含摩擦与碰撞平面多刚体系统动力学线性互补算法. 力学学报,2015,47(5):814~821 (Wang X J, Wang Q. A lcp method for the dynamics of planar multibody systems with impact and friction. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015,47(5):814~821 (in Chinese))
- 王晓军,王琪. 含非对称摩擦平面运动刚体动力学 LCP 方法. 北航学报,2015,41(11):2023~2028 (Wang X J, Wang Q. A lcp method for dynamics of planar-motion rigid-body with non-symmetric friction. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2015,41(11):2023~2028 (in Chinese))
- Zhang J, Wang Q. Modeling and simulation of a frictional

- translational joint with a flexible slider and clearance. *Multibody System Dynamics*, 2015; 1 ~ 23
- 15 Zhuang F F, Wang Q. Modeling and analysis of rigid multibody systems with driving constraints and frictional translation joints. *Acta Mechanica Sinica*, 2014, 30(3): 437 ~ 446
- 16 王晓军, 王琪, 庄方方. 含摩擦滑移铰及驱动约束多刚体系统数值算法. *动力学与控制学报*, 2014, 12(4): 336 ~ 340 (Wang X J, Wang Q, Zhuang F F. The numerical method for multibody system with frictional translational joints and driving constraints. *Journal of Dynamics and Control*, 2014, 12(4): 336 ~ 340 (in Chinese))
- 17 刘丽兰, 刘宏昭, 吴子英, 王忠民. 机械系统中摩擦模型的研究进展. *力学进展*, 2008, 38(2): 201 ~ 213 (Liu L L, Liu H Z, Wu Z Y, Wang Z M. An overview of friction models in mechanical systems. *Advances in Mechanics*, 2008, 38(2): 201 ~ 213 (in Chinese))
- 18 王琪, 庄方方, 郭易圆, 章杰, 房杰. 非光滑多体系统动力学数值算法的研究进展. *力学进展*, 2013, 43(1): 101 ~ 111 (Wang Q, Zhuang F F, Guo Y Y, Zhang J, Fang J. Advances in the research on the numerical method for non-smooth dynamics of multibody systems. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(1): 101 ~ 111 (in Chinese))
- 19 Karnopp D. Computer simulation of stick slip friction in mechanical dynamic systems. *ASME Journal of Dynamic systems, Measurement and Control*, 1985, 107(1): 100 ~ 403
- 20 Iurian C. Identification of a system with dry friction [PhD Thesis]. Catalunya: University Politcnica de Catalunya, 2005: 45 ~ 49
- 21 Machado M, Moreira P, Flores P, et al. Compliant contact force models in multibody dynamics: evolution of the Hertz contact theory. *Mechanism and Machine Theory*, 2012, 53(7): 99 ~ 121
- 22 Wasfy T M. Asperity spring friction model with application to belt-drives. In: Proceedings of ASME 2003 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, September 2 - 6, Chicago, USA, 2003: 371 ~ 378
- 23 王勖成. 有限单元法. 北京: 清华大学出版社, 2003 (Wang X C. Finite element method. Beijing: Tsinghua University Press, 2003 (in Chinese))

MODELING AND ANALYSIS OF FLEXIBLE TRANSLATION JOINT WITH KARNOPP FRICTION*

Zhang Jie[†] Wang Qi

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract A dynamic model of flexible translational joint with Karnopp friction is presented in this paper. The slider of translational joint is treated as flexible body, while the guides are treated as rigid. Meanwhile, the influences of clearance on the dynamics of systems are considered. Since the friction forces and contact states between the slider and guides are complicated, a mechanical model is proposed using finite element method, where a contact model is developed based on Penalty method and the time-varying contact states of nodes are determined by applying trial-and-error algorithm. Based on KED method and Newmark method, a simulation method is proposed to solve kinetic equations of the translational joint. Eventually, a planar slider-bar system with Karnopp friction and flexible slider is simulated, and the dynamic response of the mechanical system is analyzed. Moreover, the numerical results reveal the reasonability of the new developed method.

Key words flexible translational joint, Karnopp friction, clearance, finite element model