

基于整体-局部高阶剪切理论的层合板 多体系统的动静力学分析*

田立智^{1†} 刘锦阳²
(上海交通大学, 上海 200240)

摘要 基于高阶剪切理论, 推导了整体-局部 1,2-3 高阶位移模式. 在满足层间位移连续, 层间剪应力连续, 以及上下表面自由的条件下, 层合板每个节点的独立变量变为 13, 并且不随层合板层数的增加而变化. 在此基础上将整体-局部 1,2-3 高阶位移模式推广到刚-柔耦合层合板多体系统, 利用混合坐标法, 基于虚功原理, 建立了考虑层合板层间应力连续的多体系统动力学方程. 通过静力学算例, 验证了整体-局部 1,2-3 高阶位移模式的准确性, 得到了层合板层间应力沿着厚度的分布情况. 通过多体系统动力学算例, 对比了传统方法的计算结果, 揭示了本文方法与传统方法在计算层合板多体系统中层间应力的差异, 说明了刚-柔耦合层合板多体系统考虑层间剪应力连续的必要性.

关键词 整体-局部高阶剪切位移模式, 层间剪应力连续, 层合板多体系统, 应力分析

DOI: 10.6052/1672-6553-2015-021

引言

在航空、汽车、机械等工业领域, 很多运动机构为复合材料层合板结构多体系统, 例如直升机机翼和风电叶片等. 通常情况下, 层合板多体系统的刚-柔耦合动力学分析仅限于层合板表面的响应和应变分析, 没有深入到多体系统层合板的层间应力, 而层合结构特有的层间破坏问题要求准确计算层间应力, 对于多体系统中的层合板结构, 同样有必要进行层间应力的研究.

复合材料层合板的理论^[1-2]主要包括: 基于 Kirchhoff 假设的经典层合板理论 CLT, 基于 Mindlin 假设的一阶剪切理论 FSDT, 高阶剪切理论, 分层理论以及 Zigzag 等理论. 由于复合材料的各向异性和呈层性等特点, 较厚层合板间的剪切和拉压应力对于结构的刚度和强度的影响较大, 采用 CLT 和 FSDT 理论得到的结果很难满足精度要求. 高阶剪切理论^[3]可以较好地研究层合板的动力学响应, 例如张伟等^[4]基于高阶剪切理论研究了厚板振动的解析解, 但是在层间应力的描述上仍存不足. Layer-

wise 理论^[5]可以较好计算层间应力, 但是节点的独立变量随复合材料层数的增加而增加, 对于层数较多的层合板, 严重影响了计算效率并且增加了理论的复杂性. Zigzag 理论^[6]可以很好地计算层合板响应和层间应力, 但对于较厚的板, 需要借助平衡方程来计算横向剪切应力以提高精度.

1997 年, X. Li 等^[7]针对正交铺设层合板提出了整体-局部高阶剪切理论. 该理论在 Reddy 型高阶剪切理论的基本位移模式中增添了截取三次的局部位移, 可以很好地计算层间应力. Zhen Wu 等^[8]将这种位移模式推广到了角铺设层合板结构. 这种位移模式满足层间位移连续, 剪应力连续和上下表面自由条件, 每个节点的独立变量为 13, 并且不随层合板的层数而变化.

对于刚-柔耦合层合板, 前人主要应用基于 Mindlin 假设的一阶剪切理论 FSDT^[9], 在此基础上侧重考虑薄板的几何非线性效应. 潘科琪等^[10]采用 Mindlin 假设计算了多体系统层合板的表面应变. 但是对于较厚的层合板, 非线性效应变弱, 层合板层间的剪切应力连续条件需要给予考虑.

2014-10-29 收到第 1 稿, 2014-12-17 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目 (11272203, 11132007)

† 通讯作者 E-mail: tli19901216@163.com

本文将基于整体-局部高阶剪切理论,针对上下表面外剪应力为零的复合材料层合板刚-柔耦合多体系统层间应力进行研究.首先综合前人研究的整体-局部位移模式,验证了该位移模式能准确计算沿厚度方向的层间位移和应力分布,得到了层间应力沿着厚度的变化趋势,然后将整体-局部位移模式推广到复合材料层合板多体系统.通过刚柔耦合动力学算例,将应用整体-局部位移模式的刚-柔耦合层合板计算结果与传统方法的计算结果进行对比,得到刚-柔耦合层合板的层间应力变化趋势,可以看出考虑了层间剪应力连续的整体-局部位移模式与不考虑剪应力连续的理论在计算层间应力的差异,说明了在刚-柔耦合层合板多体系统中考虑层间剪应力连续的必要性.

1 整体-局部高阶剪切位移模式

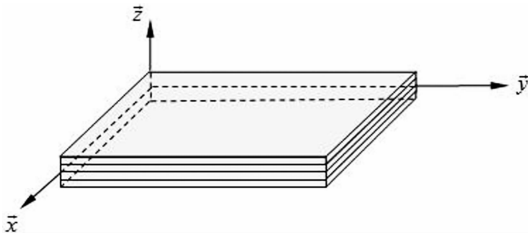


图1 层合板坐标系

Fig. 1 Coordinate system of composite laminated plate

Reddy 型高阶剪切理论的基本位移模式为:

$$\begin{aligned} u_c &= u_0 + zu_1 + z^2u_2 + z^3u_3 \\ v_c &= v_0 + zv_1 + z^2v_2 + z^3v_3 \\ w_c &= w_0 \end{aligned} \quad (1)$$

其中, vu_0, u_1, u_2, u_3 为描述节点沿 \vec{x} 方向位移的独立变量, v_0, v_1, v_2, v_3 为描述节点沿 \vec{y} 方向位移的独立变量, w_0 为描述节点沿 \vec{z} 方向位移的独立变量, u_c, v_c, w_c 为对应非中面上整体坐标为 z 的节点的位移, 后文以 HSDT 来简称这种位移模式.

这种位移模式考虑了剪切应力,但没有考虑层间剪应力连续和上下表面自由条件,因此不能准确计算出层间应力.整体-局部位移模式在 Reddy 型高阶剪切理论的基本位移模式 HSDT 基础上增加了局部位移,位移模式由两部分构成:

$$u^k = u_c + u_L^k, v^k = v_c + v_L^k, w^k = w_c \quad (2)$$

其中, u_c, v_c, w_c 为式(1)中的基本位移模式,这里称为整体位移;添加的变量 u_L^k, v_L^k 各层均不相同,称为

局部位移.与整体位移类似,局部位移可以写为:

$$\begin{aligned} u_L^k &= u_0^k + \xi_k u_1^k + \xi_k^2 u_2^k + \xi_k^3 u_3^k + \dots + \xi_k^m u_m^k \\ v_L^k &= v_0^k + \xi_k v_1^k + \xi_k^2 v_2^k + \xi_k^3 v_3^k + \dots + \xi_k^m v_m^k \end{aligned} \quad (3)$$

其中, ξ_k 为层合板两层之间沿 \vec{z} 方向的局部坐标,可以写为:

$$\xi_k = \frac{z - (z_{k+1} + z_k)/2}{(z_{k+1} - z_k)/2} = \xi_k = \frac{2z - (z_{k+1} + z_k)}{z_{k+1} - z_k} =$$

$$a_k z - b_k, \text{ 其中, } a_k = \frac{2}{z_{k+1} - z_k}, b_k = \frac{z_{k+1} + z_k}{z_{k+1} - z_k}, k = 1, 2, \dots, n-1$$

z_k 为板各层在整体坐标系下沿 \vec{z} 方向的坐标, z 为沿 \vec{z} 方向的整体坐标.式(3)中的 u_0^k 与 v_0^k 可以归于整体位移,根据文献[6]与[7]的建议,局部位移截取到三次就可以取得较好的结果,即所谓的整体-局部高阶 1,2-3 理论,此时局部位移模式为:

$$u_L^k = \xi_k u_1^k + \xi_k^2 u_2^k + \xi_k^3 u_3^k, v_L^k = \xi_k v_1^k + \xi_k^2 v_2^k + \xi_k^3 v_3^k \quad (4)$$

为了减少独立变量,文献[6]与[7]将局部位移(4)分为两组应用位移连续条件,即双位移连续条件:

$$\begin{aligned} u_L^k &= \bar{u}_L^k + \hat{u}_L^k, v_L^k = \bar{v}_L^k + \hat{v}_L^k \\ \bar{u}_L^k &= \xi_k u_1^k + \xi_k^2 u_2^k, \hat{u}_L^k = \xi_k^3 u_3^k \\ \bar{v}_L^k &= \xi_k v_1^k + \xi_k^2 v_2^k, \hat{v}_L^k = \xi_k^3 v_3^k \end{aligned}$$

在整体-局部 1,2-3 位移模式下,对于 n 层的层合板,共有 $6n + 9$ 自由度,利用层间位移连续条件可以消去 $4(n-1)$ 自由度,利用层间剪应力连续可以消去 $2(n-1)$ 自由度,那么剩下 15 自由度,最后利用上下表面自由条件,最终的自由度数变为 13.

1.1 层间位移连续条件

应用双位移连续条件:

$$\bar{u}_L^k = \bar{u}_L^{k-1}, \hat{u}_L^k = \hat{u}_L^{k-1}, \bar{v}_L^k = \bar{v}_L^{k-1}, \hat{v}_L^k = \hat{v}_L^{k-1}$$

可以将局部位移模式(4)中 $u_2^k, u_3^k, v_2^k, v_3^k$ 消去,即:

$$\begin{aligned} u_2^k &= u_1^k + u_1^{k-1} + u_2^{k-1}, u_3^k = -u_3^{k-1} \\ v_2^k &= v_1^k + v_1^{k-1} + v_2^{k-1}, v_3^k = -v_3^{k-1} \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$.

1.2 层间剪力连续条件

应用层间剪切应力连续条件:

$$\tau_{yz}^k = \tau_{yz}^{k-1}, \tau_{xz}^k = \tau_{xz}^{k-1}$$

其中:

$$\tau_{yz}^k = Q_{44k} \gamma_{yz}^k + Q_{45k} \gamma_{xz}^k, \tau_{xz}^k = Q_{45k} \gamma_{yz}^k + Q_{55k} \gamma_{xz}^k \quad (6)$$

$Q_{44k}, Q_{45k}, Q_{55k}$ 为第 k 层转换后的刚度系数, 它们的具体表达式见参考文献[11], $\gamma_{yz}^k, \gamma_{xz}^k$ 为剪切应变, 可表示为:

$$\gamma_{yz}^k = \frac{\partial v^k}{\partial z} + \frac{\partial w^k}{\partial y}, \gamma_{xz}^k = \frac{\partial u^k}{\partial z} + \frac{\partial w^k}{\partial x} \quad (7)$$

将式(5)代入(4)、(6)、(7)以及层间剪应力连续条件, 可以得到 $u_1^k, v_1^k, u_2^k, v_2^k, u_3^k, v_3^k$ 与 $u_1^{k-1}, v_1^{k-1}, u_2^{k-1}, v_2^{k-1}, u_3^{k-1}, v_3^{k-1}$ 的递推关系:

$$\begin{aligned} u_1^k &= -(1 + e_k)u_1^{k-1} - 2e_k u_2^{k-1} - 3e_k u_3^{k-1} + \\ &\quad \gamma_k B_{k-1} + \beta_k C_k + \rho_k D_k \\ v_1^k &= -(1 + f_k)v_1^{k-1} - 2f_k v_2^{k-1} - 3f_k v_3^{k-1} + \\ &\quad \theta_k A_{k-1} + \psi_k C_k + \eta_k D_k \\ u_2^k &= -e_k u_1^{k-1} - (-1 + 2e_k)u_2^{k-1} - \\ &\quad 3e_k u_3^{k-1} + \gamma_k B_{k-1} + \beta_k C_k + \rho_k D_k \\ v_2^k &= -f_k v_1^{k-1} - (-1 + 2f_k)v_2^{k-1} - 3f_k v_3^{k-1} + \\ &\quad \theta_k A_{k-1} + \psi_k C_k + \eta_k D_k \\ u_3^k &= -u_3^{k-1}, v_3^k = -v_3^{k-1} \end{aligned} \quad (8)$$

其中: $e_k = 1 + \alpha_k, f_k = 1 + \zeta_k$

$$A_{k-1} = u_1^{k-1} + 2u_2^{k-1} + 3u_3^{k-1}$$

$$B_{k-1} = v_1^{k-1} + 2v_2^{k-1} + 3v_3^{k-1}$$

$$C_k = w_{0,x} + u_1 + 2z_k u_2 + 3z_k^2 u_3$$

$$D_k = w_{0,y} + v_1 + 2z_k v_2 + 3z_k^2 v_3$$

$\alpha_k, \gamma_k, \beta_k, \rho_k, \zeta_k, \theta_k, \psi_k, \eta_k$ 的具体表达式可以参见参考文献[8].

1.3 下表面自由条件

应用下表面剪应力为0的条件:

$$\tau_{yz}^1 = Q_{44k}\gamma_{yz}^1 + Q_{45k}\gamma_{xz}^1 = 0, \tau_{xz}^1 = Q_{45k}\gamma_{yz}^1 + Q_{55k}\gamma_{xz}^1$$

$$= 0 \text{ 即: } \gamma_{xz}^1 = 0, \gamma_{yz}^1 = 0$$

将式(2)、(4)、(7)代入上式可以得到:

$$w_{0,y} + v_1 + 2z_1 v_2 + 3z_1^2 v_3 + a_1 v_1^1 - 2a_k v_2^1 + 3a_1 v_3^1 = 0$$

$$w_{0,x} + u_1 + 2z_1 u_2 + 3z_1^2 u_3 + a_1 u_1^1 - 2a_1 u_2^1 + 3a_1 u_3^1 = 0$$

$$(9)$$

则 u_3^1, v_3^1 可以利用 $u_1^1, v_1^1, u_2^1, v_2^1, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, w_{0,x}, w_{0,y}$ 表示.

结合式(8)的递推关系, 可以假设局部位移变量为:

$$u_3^k = \begin{pmatrix} H_1^k u_1^1 + H_2^k u_2^1 + H_3^k u_1 + H_4^k u_2 + H_5^k u_3 \\ + H_6^k w_{0,x} + H_7^k v_1^1 + H_8^k v_2^1 + H_9^k v_1 + H_{10}^k v_2 \\ + H_{11}^k v_3 + H_{12}^k w_{0,y} \end{pmatrix}$$

$$v_3^k = \begin{pmatrix} N_1^k u_1^1 + N_2^k u_2^1 + N_3^k u_1 + N_4^k u_2 + N_5^k u_3 \\ + N_6^k w_{0,x} + N_7^k v_1^1 + N_8^k v_2^1 + N_9^k v_1 + N_{10}^k v_2 \\ + N_{11}^k v_3 + N_{12}^k w_{0,y} \end{pmatrix}$$

$$u_1^k = \begin{pmatrix} F_1^k u_1^1 + F_2^k u_2^1 + F_3^k u_1 + F_4^k u_2 + F_5^k u_3 \\ + F_6^k w_{0,x} + F_7^k v_1^1 + F_8^k v_2^1 + F_9^k v_1 + F_{10}^k v_2 \\ + F_{11}^k v_3 + F_{12}^k w_{0,y} \end{pmatrix}$$

$$u_2^k = \begin{pmatrix} G_1^k u_1^1 + G_2^k u_2^1 + G_3^k u_1 + G_4^k u_2 + G_5^k u_3 \\ + G_6^k w_{0,x} + G_7^k v_1^1 + G_8^k v_2^1 + G_9^k v_1 + G_{10}^k v_2 \\ + G_{11}^k v_3 + G_{12}^k w_{0,y} \end{pmatrix}$$

$$v_1^k = \begin{pmatrix} L_1^k u_1^1 + L_2^k u_2^1 + L_3^k u_1 + L_4^k u_2 + L_5^k u_3 \\ + L_6^k w_{0,x} + L_7^k v_1^1 + L_8^k v_2^1 + L_9^k v_1 + L_{10}^k v_2 \\ + L_{11}^k v_3 + L_{12}^k w_{0,y} \end{pmatrix}$$

$$v_2^k = \begin{pmatrix} M_1^k u_1^1 + M_2^k u_2^1 + M_3^k u_1 + M_4^k u_2 \\ + M_5^k u_3 + M_6^k w_{0,x} + M_7^k v_1^1 + M_8^k v_2^1 \\ + M_9^k v_1 + M_{10}^k v_2 + M_{11}^k v_3 + M_{12}^k w_{0,y} \end{pmatrix} \quad (10)$$

将上述表达式(10)代入式(8)可以得到:

$$F_i^k = \begin{bmatrix} -(1 + e_k)F_i^{k-1} - 2e_k G_i^{k-1} - 3e_k H_i^{k-1} \\ + \gamma_k L_i^{k-1} + 2\gamma_k M_i^{k-1} + 3\gamma_k N_i^{k-1} + S O_i \end{bmatrix}$$

$$L_i^k = \begin{bmatrix} -(1 + f_k)L_i^{k-1} - 2f_k M_i^{k-1} - 3f_k N_i^{k-1} \\ + \theta_k F_i^{k-1} + 2\theta_k G_i^{k-1} + 3\theta_k H_i^{k-1} + S S_i \end{bmatrix}$$

$$G_i^k = F_i^k + F_i^{k-1} + G_i^{k-1}, H_i^k = -H_i^{k-1}$$

$$M_i^k = L_i^k + L_i^{k-1} + M_i^{k-1}, N_i^k = -N_i^{k-1}$$

由式(9)和(10)可以得到 H_i^1, N_i^1 , 令式(10)中 $k = 1$, 容易得到 $F_i^1, G_i^1, L_i^1, M_i^1, i = 1, 2, \dots, 12$. 其中:

$$S O_1 = S O_2 = S O_7 = S O_8 = 0, S O_3 = S O_6 = \beta_k$$

$$S S_1 = S S_2 = S S_7 = S S_8 = 0, S S_3 = S S_6 = \psi_k$$

$$S O_4 = 2z\beta_k, S S_4 = 2z\psi_k, S O_5 = 3z^2\beta_k, S S_5$$

$$= 3z^2\psi_k$$

$$S O_{10} = 2z\rho_k, S S_{10} = 2z\eta_k, S O_{11} = 3z^2\rho_k, S S_{11}$$

$$= 3z^2\eta_k$$

$$S O_9 = S O_{12} = \rho_k, S S_9 = S O_{12} = \eta_k$$

1.4 上表面自由条件

同理, 应用上表面剪应力为0的条件:

$$\tau_{yz}^n = Q_{44k}\gamma_{yz}^n + Q_{45k}\gamma_{xz}^n = 0$$

$$\tau_{xz}^n = Q_{45k}\gamma_{yz}^n + Q_{55k}\gamma_{xz}^n = 0$$

得到:

$$\begin{aligned}
 &w_{0,x} + u_1 + 2z_{n+1}u_2 + 3z_{n+1}^2u_3 + a_nu_1^n + \\
 &2a_nu_2^n + 3a_nu_3^n = 0 \\
 &w_{0,y} + v_1 + 2z_{n+1}v_2 + 3z_{n+1}^2v_3 + a_nv_1^n + \\
 &2a_nv_2^n + 3a_nv_3^n = 0 \tag{11}
 \end{aligned}$$

将式(10)代入上述两式,可求出 u_2^1 和 v_2^1 :

$$\begin{aligned}
 u_2^1 &= \begin{pmatrix} A_1u_1^1 + B_1u_1 + C_1u_2 + D_1u_3 + E_1w_{0,x} \\ + F_1v_1^1 + G_1v_1 + H_1v_2 + J_1v_3 + K_1w_{0,y} \end{pmatrix} \\
 v_2^1 &= \begin{pmatrix} A_2u_1^1 + B_2u_1 + C_2u_2 + D_2u_3 + E_2w_{0,x} \\ + F_2v_1^1 + G_2v_1 + H_2v_2 + J_2v_3 + K_2w_{0,y} \end{pmatrix} \tag{12}
 \end{aligned}$$

其中,系数 $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, J_1, K_1, A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2, H_2, J_2, K_2$ 可以用 $F_i^n, G_i^n, H_i^n, L_i^n, M_i^n, N_i^n$ 表示. 将式(12)代入式(10),并代入整体位移模式,最终可以得到:

$$\begin{aligned}
 u^k &= \begin{pmatrix} u_0 + \varphi_1^k u_1^1 + \varphi_2^k u_1 + \varphi_3^k u_2 + \varphi_4^k u_3 + \varphi_5^k w_{0,x} \\ + \varphi_6^k v_1^1 + \varphi_7^k v_1 + \varphi_8^k v_2 + \varphi_9^k v_3 + \varphi_{10}^k w_{0,y} \end{pmatrix} \\
 v^k &= \begin{pmatrix} v_0 + \psi_1^k u_1^1 + \psi_2^k u_1 + \psi_3^k u_2 + \psi_4^k u_3 + \psi_5^k w_{0,x} \\ + \psi_6^k v_1^1 + \psi_7^k v_1 + \psi_8^k v_2 + \psi_9^k v_3 + \psi_{10}^k w_{0,y} \end{pmatrix} \\
 w^k &= w_0 \tag{13}
 \end{aligned}$$

其中: $\varphi_i^k = \xi_k R_i^k + \xi_k^2 S_i^k + \xi_k^3 T_i^k + Z_i$

$$\psi_i^k = \xi_k O_i^k + \xi_k^2 P_i^k + \xi_k^3 Q_i^k + ZZ_i$$

$$Z_2 = z, Z_3 = z^2, Z_4 = z^3$$

$$ZZ_7 = z, ZZ_8 = z^2, ZZ_9 = z^3, \text{其余均为 } 0.$$

$R_i^k, S_i^k, T_i^k, O_i^k, P_i^k, Q_i^k$ 为 $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, J_1, K_1, A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2, H_2, J_2, K_2, F_i^k, G_i^k, H_i^k, L_i^k, M_i^k, N_i^k$ 的函数.

2 刚柔耦合板的动力学描述

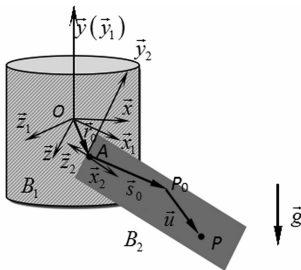


图2 刚-柔耦合复合材料层合板

Fig.2 Rigid-flexible coupling composite laminated plate

如图2所示,刚-柔动力学系统由作旋转运动的中心刚体 B_1 和复合材料层合板 B_2 组成. B_2 与

B_1 在点 A 处相固接. 建立惯性坐标系 $\vec{e}(O - \vec{xyz})$, B_1 的连体基 $\vec{e}_1(O - \vec{x_1y_1z_1})$ 和 B_2 的浮动坐标系 $\vec{e}_2(A - \vec{x_2y_2z_2})$. 设 θ 表示中心刚体绕 y 负向的转角, \vec{e}_1 相对 \vec{e} 的方向余弦阵为:

$$\underline{A}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

则: $\dot{\underline{A}}_\theta = \underline{\Pi}\underline{A}_\theta\dot{\theta} = \underline{A}_\theta\underline{\Pi}\dot{\theta}, \ddot{\underline{A}}_\theta = -\underline{A}_\theta\underline{\mathbf{I}}\dot{\theta}^2 + \underline{A}_\theta\underline{\Pi}\ddot{\theta}$ 其中:

$$\underline{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \underline{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

设 \vec{y}_1 与 \vec{y}_2 的夹角为 φ , 由于 B_2 与 B_1 相固接, φ 为常数. 因为 $\vec{x}_1 // \vec{x}_2$, B_2 浮动坐标系 \vec{e}_2 相对于 B_1 连体基 \vec{e}_1 绕 x_1 负向的转角为 φ , \vec{e}_2 相对于 \vec{e}_1 的方向余弦阵为:

$$\underline{A}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

则板上任一点 P 在惯性坐标系下坐标阵可表示为:

$$\underline{r} = \underline{A}_\theta \underline{r}_0 + \underline{A}_\theta \underline{A}_c (s_0 + \underline{u}') \tag{14}$$

其中, $\underline{r}_0 = [x_0 \ y_0 \ z_0]^T$ 为浮动基 \vec{e}_2 的基点在 \vec{e}_1 下的位置坐标阵, 为常值阵, $s_0 = [X_b \ Y_b \ Z_b]^T$ 为变形前板上任意一点在浮动基 \vec{e}_2 下的位置坐标阵, 也为常值阵. $\underline{u}' = [u^k \ v^k \ w^k]^T$ 为变形位移 \vec{u} 在浮动基 \vec{e}_2 下的坐标阵.

$$\text{令 } \underline{\rho} = \underline{r}_0 + \underline{A}_c \underline{u}', \text{ 则: } \dot{\underline{\rho}} = \underline{A}_c \dot{\underline{u}}'$$

那么可以得到:

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{r}} &= \underline{\Pi}\underline{A}_\theta\dot{\theta} + \underline{A}_\theta\underline{A}_c\dot{\underline{u}}' \\
 \ddot{\underline{r}} &= \underline{\Pi}(\underline{\Pi}\underline{A}_\theta\dot{\theta} + 2\underline{A}_\theta\underline{A}_c\dot{\underline{u}}')\dot{\theta} + \underline{\Pi}\underline{A}_\theta\ddot{\theta} + \underline{A}_\theta\underline{A}_c\ddot{\underline{u}}' \tag{15}
 \end{aligned}$$

3 整体局部位移模式的层合板有限元离散

采用四节点矩形单元, 每个单元的广义坐标阵可表示为: $\underline{p}^e = [\underline{p}_1^e \ \underline{p}_2^e \ \underline{p}_3^e \ \underline{p}_4^e]^T$

$$\text{其中, } \underline{p}_k^e = [u_k^T \ v_k^T \ w_k^T]^T, k = 1, 2, 3, 4$$

$$\begin{aligned}
 \underline{u}_k &= [u_{0k} \ u_{1k} \ u_{2k} \ u_{3k}]^T, \underline{v}_k \\
 &= [v_{0k} \ v_{1k} \ v_{2k} \ v_{3k}]^T
 \end{aligned}$$

$$\underline{w}_k = [u_{1k}^1 \quad v_{1k}^1 \quad w_{0k} \quad w_{0,xk} \quad w_{0,yk}]^T.$$

对面内变量采取双线性插值;对 w_0 基于薄板非协调单元进行插值,即:

$$\begin{aligned} u_j &= S_{j+1} p^e, v_j = S_{j+5} p^e, u_1^1 = S_9 p^e, v_1^1 = S_{10} p^e \\ w_0 &= S_{11} p^e, w_{0,x} = S_{12} p^e, w_{0,y} = S_{13} p^e, j \\ &= 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{其中, } S_{12} = \partial S_{11} / \partial x = (\partial S_{11} / \partial \xi) (\partial \xi / \partial x)$$

$$S_{13} = \partial S_{11} / \partial y = (\partial S_{11} / \partial \eta) (\partial \eta / \partial y)$$

将式(16)代入式(13),可以得到:

$$\underline{u}' = [u^k \quad v^k \quad w^k]^T = \underline{S}_m p^e \quad (17)$$

$$\text{其中, } \underline{S}_m = \begin{bmatrix} S_{m1} \\ S_{m2} \\ S_{m3} \end{bmatrix}$$

$$S_{m1} = \begin{pmatrix} S_1 + \varphi_1^k S_9 + \varphi_2^k S_2 + \varphi_3^k S_3 + \varphi_4^k S_4 + \varphi_5^k S_{12} \\ + \varphi_6^k S_{10} + \varphi_7^k S_6 + \varphi_8^k S_7 + \varphi_9^k S_8 + \varphi_{10}^k S_{13} \end{pmatrix}$$

$$S_{m2} = \begin{pmatrix} S_5 + \psi_1^k S_9 + \psi_2^k S_2 + \psi_3^k S_3 + \psi_4^k S_4 \\ + \psi_5^k S_{12} + \psi_6^k S_{10} + \psi_7^k S_6 + \psi_8^k S_7 \\ + \psi_9^k S_8 + \psi_{10}^k S_{13} \end{pmatrix} S_{m3}$$

$$= S_{11}$$

而文献[10]所采用的 FSDT 理论的离散为:

$$\begin{aligned} u &= N_1 p^e, v = N_2 p^e, w_0 = N_3 p^e, w_{0,x} = N_4 p^e, w_{0,y} \\ &= N_5 p^e = [u \quad v \quad w]^T = \underline{N}_m p^e \end{aligned}$$

其中:

$$p^e = [p_1^e \quad p_2^e \quad p_3^e \quad p_4^e]^T$$

$$p_k^e = [u_k \quad v_k \quad w_{0k} \quad w_{0,xk} \quad w_{0,yk}]^T$$

$$\underline{N}_m = \begin{bmatrix} N_1 + zN_4 \\ N_2 + zN_5 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} N_4 \\ N_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可以明显地看出,本文 S_m 不仅与 z 有关系,还与 z 所在的层数有关系,与文献[10]所采用的基于一阶剪切理论离散的 N_m 相比,本文整体-局部位移模式中系数 φ_i^k , ψ_i^k 的具体表达式尤为复杂,因此,对于体积分,不能尝试采用如文献[10]所述的将体积分拆为长度积分和面积分的方法,这里选取三重高斯积分进行计算。

设 J_0 为中心刚体的转动惯量, p 为层合板的广义坐标阵, p_h 为活动坐标,令:

$$p^e = B_e p, p = D p_h \quad (18)$$

应变可表示为:

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{13}]^T \\ &= \left[\frac{\partial u^k}{\partial s} \quad \frac{\partial v^k}{\partial y} \quad \frac{\partial u^k}{\partial y} + \frac{\partial v^k}{\partial s} \quad \frac{\partial v^k}{\partial z} + \frac{\partial w_c}{\partial y} \quad \frac{\partial u^k}{\partial z} + \frac{\partial w^k}{\partial s} \right]^T \\ &= \{\partial\} [u^k \quad v^k \quad w^k]^T \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{其中, } \{\partial\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T$$

将式(17)和式(18)代入式(19)可以得到:

$$\underline{\varepsilon} = \{\partial\} \underline{S}_m p^e = \underline{B} \underline{B}_e D p_h \quad (20)$$

其中, $\underline{B} = \{\partial\} \underline{S}_m$.

$\underline{\sigma}$ 与应变阵 $\underline{\varepsilon}$ 的关系为 $\underline{\sigma} = \underline{Q}_k \underline{\varepsilon}$, \underline{Q}_k 为刚度系数矩阵. 那么弹性力虚功率为:

$$\delta W_b = \int_v -\delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dv = \delta \underline{q}^T \underline{f} \quad (21)$$

$$\underline{q} = [\theta \quad p_h^T]^T, \underline{f} = [0 \quad -f_b^T]^T$$

$$f_b = \sum_{e=1}^{N_e} D^T B_e^T \int_{v_e} B^T Q_k B dv_e B_e D p_h$$

将式(17)代入式(15)可以得到:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{r}} &= \underline{\Pi} \underline{A}_\theta \dot{\theta} + \underline{A}_\theta \underline{A}_c \underline{S}_m \underline{B}_e D \dot{p}_h \\ \ddot{\underline{r}} &= \underline{\Pi} (\underline{\Pi} \underline{A}_\theta \ddot{\theta} + 2 \underline{A}_\theta \underline{A}_c \underline{S}_m \underline{B}_e D \dot{p}_h) \dot{\theta} + \underline{\Pi} \underline{A}_\theta \rho \ddot{\theta} \\ &\quad + \underline{A}_\theta \underline{A}_c \underline{S}_m \underline{B}_e D \ddot{p}_h \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{令: } \underline{A} = \underline{\Pi} \underline{A}_\theta \rho, \underline{B} = \underline{A}_\theta \underline{A}_c \underline{S}_m \underline{B}_e, \underline{C} = [\underline{A} \quad \underline{B} D],$$

$$\underline{G} = [\underline{A} \quad 2 \underline{B} D]$$

$$\text{则: } \dot{\underline{r}} = \underline{C} \dot{\underline{q}}, \ddot{\underline{r}} = \underline{C} \ddot{\underline{q}} + \underline{\Pi} \underline{G} \ddot{\theta} \quad (23)$$

设 J_0 为中心刚体关于 \vec{y} 轴的转动惯量,那么惯性力的虚功率为:

$$\delta W_i = \int_v -\delta \dot{\underline{r}}^T (\rho \dot{\underline{r}}) dv - \delta \dot{\theta} (J_0 \dot{\theta}) \quad (24)$$

将式(23)代入式(24)可以得到:

$$\delta W_i = -\delta \dot{\underline{q}}^T \underline{M} \dot{\underline{q}} + \delta \dot{\theta}^T \underline{Q} \quad (25)$$

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{M}_{\theta\theta} + J_0 & \underline{M}_{\theta p} \\ \underline{M}_{p\theta} & \underline{M}_{pp} \end{bmatrix}, \quad \underline{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \underline{J} \\ \underline{J}^T & -2 \underline{L} \end{bmatrix} \dot{\underline{q}} \dot{\theta}$$

$$\begin{aligned} \underline{M}_{\theta\theta} &= \int_v \rho \underline{A}^T \underline{A} dv \\ &= \sum \int_{ve} \rho (\underline{E}^T + \underline{p}_h^T \underline{F}^T) \underline{I} (\underline{E} + \underline{F} \underline{p}_h) dv_e \\ \underline{M}_{\theta p} &= \int_v \rho \underline{A}^T \underline{B} D dv \\ &= \sum \int_{ve} \rho (\underline{E}^T \underline{I}^T \underline{F} + \underline{p}_h^T \underline{F}^T \underline{I}^T \underline{F}) dv_e \\ \underline{M}_{pp} &= \int_v \rho \underline{D}^T \underline{B}^T \underline{B} D dv \\ &= \sum \underline{D}^T \underline{B}_e^T \int_{ve} \rho \underline{S}_m^T \underline{S}_m dv_e \underline{B}_e D \end{aligned}$$

其中: $\underline{E} = \underline{r}_0 + \underline{A}_c \underline{s}_0, \underline{F} = \underline{A}_c \underline{S}_m \underline{B}_e D$

$$\underline{J} = \rho \sum \int_{ve} [\underline{E}^T \underline{I} \underline{A}_c \underline{S}_m \underline{B}_e + (\underline{F} \underline{p}_h)^T \underline{I} \underline{A}_c \underline{S}_m \underline{B}_e] dv_e$$

$$\underline{L} = \rho \sum \int_{ve} (\underline{A}_c \underline{S}_m \underline{B}_e)^T \underline{\Pi} \underline{A}_c \underline{S}_m \underline{B}_e dv_e$$

设重力加速度在惯性基下的坐标阵为 \underline{g}_f , 重力的虚功率为:

$$\delta W_g = \int_v \delta \underline{r}^T \underline{g}_f dv = \delta \underline{q}^T \underline{Q}_g \quad (26)$$

其中: $\underline{Q}_g = \int_v \underline{C}^T \underline{g}_f dv =$

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum \int_{ve} [\underline{E}^T \underline{A}_\theta^T \underline{\Pi}^T \underline{g}_f + (\underline{A}_\theta \underline{F} \underline{p}_h)^T \underline{\Pi}^T \underline{g}_f] dv_e \\ &\sum \int_{ve} (\underline{A}_\theta \underline{A}_c \underline{S}_m \underline{B}_e)^T \underline{g}_f dv_e \end{aligned} \right\}$$

根据虚功原理, 有如下关系:

$$\delta W_b + \delta W_i + \delta W_g = 0$$

将式(21)、(25)、(26)代入上式可以得到:

$$\delta \underline{q}^T \underline{f} - \delta \underline{q}^T \underline{M} \underline{\dot{q}} + \delta \underline{q}^T \underline{Q} + \delta \underline{q}^T \underline{Q}_g = 0$$

可以得到系统的动力学方程为:

$$\underline{M} \underline{\dot{q}} = \underline{f} + \underline{Q} + \underline{Q}_g \quad (27)$$

4 整体-局部位移模式的验证

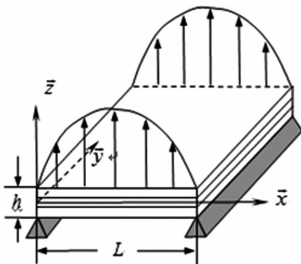


图3 两边简支复合材料层合板

Fig. 3 Composite laminated plate with simply supported edges

如上图所示复合材料层合板的总体刚度阵 \underline{K} 为:

$$\underline{K} = \sum \underline{B}_e^T \int_{ve} \underline{B}^T \underline{Q}_k \underline{B} dv_e \underline{B}_e$$

单位体积分布载荷在总体坐标系下的坐标列阵为 \underline{f} , 上下表面的单位面积的分布载荷在总体坐标系下的坐标列阵分布为 \underline{F}_1 和 \underline{F}_2 . 广义力阵 \underline{Q} 为:

$$\underline{Q} = \sum \underline{B}_e^T \left\{ \begin{aligned} &\int_{A_e} \left(\underline{N}_m(x, y, h/2)^T \underline{F}_1 \right. \\ &\quad \left. + \underline{N}_m(x, y, -h/2)^T \underline{F}_2 \right) dA_e \\ &+ \int_{ve} \underline{N}_m^T \underline{f} dv_e \end{aligned} \right\}$$

设 \underline{q} 为层合板的广义坐标阵, 那么复合材料层合板的静平衡方程为: $\underline{K} \underline{q} = \underline{Q}$. 采用 Pagano^[12-13] 的经典算例, 考虑层合板两边简支边界条件. 三层方板上下表面受沿 \underline{z} 方向的载荷作用, 单位面积载荷大小为 $q = q_0 \sin(\pi x/L)$, 计算层间应力. 方板的铺层角为: $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$. 材料常数:

$$\begin{aligned} E_1 &= 2.5 \times 10^7 Pa, E_2 = 10^6 Pa, G_{12} = G_{13} \\ &= 0.5 \times 10^6 Pa, \end{aligned}$$

$G_{23} = 0.2 \times 10^6 Pa, v_{12} = v_{13} = v_{23} = 0.25$, 长厚比 $L/h = 4$, 所有变量均无量纲化.

此时无量纲变量为: $u = E_2 u(0, 0, z)/q_0 L$

$$\sigma_x = \sigma_x(L/2, 0, z)/q_0, \tau_{xz} = \tau_{xz}(0, 0, z)/q_0$$

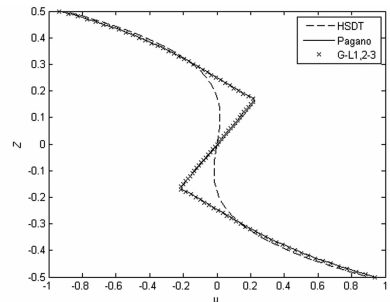


图4 两边简支面内位移 u 沿厚度的变化

Fig. 4 Relationship of in-plane displacement u and the thickness z

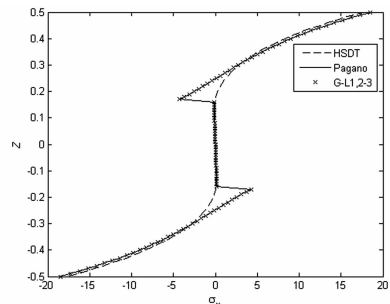


图5 两边简支面内正应力 σ_x 沿厚度的变化

Fig. 5 Relationship of in-plane normal stress σ_x and the thickness z

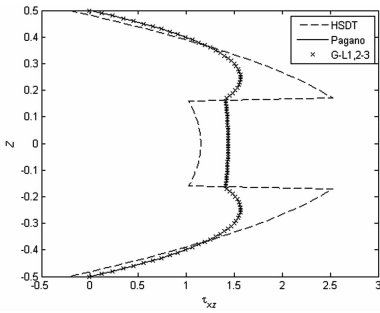


图 6 两边简支面外剪切应力 τ_{xz} 沿厚度的变化

Fig. 6 Relationship of out - plane shear stress τ_{xz} and the thickness Z

图 4 ~ 图 6 为两边简支条件下位移与应力沿厚度方向的变化. 图 4 为分别利用 Reddy 型高阶剪切理论基本位移模式 (HSDT), Pagano 解析解以及本文整体-局部 1,2-3 位移模式 (G-L1, 2-3) 得到的点 (0,0) 处位移 u 与厚度的关系, 整体局部 1,2-3 与解析解吻合得很好, 而高阶剪切理论在分层处开始出现误差, 不能很好地反映出层间的位移变化; 图 5 为分别利用三种方法求得的点 $(L/2, 0)$ 处正应力 σ_x 与厚度的关系, 整体局部 1,2-3 位移模式可以很好地反映出面内应力的变化, 而 HSDT 平滑变化, 仅大致描述了应力变化的平均值; 图 6 为面外剪切应力 τ_{xz} 与厚度的关系, HSDT 与解析解差异很大, 且不满足上下表面剪力为 0 的条件, 而 G-L1, 2-3 与解析解吻合很好. 不难看出, 整体局部 1,2-3 位移模式可以精确地计算出分层处出现的层间剪应力, 很好地反映出层间应力沿着厚度的变化, 精度明显高于传统的高阶剪切论.

5 整体-局部位移模式的刚柔耦合板研究

如图 2 所示的复合材料板刚柔耦合动力学模型. $r_0 = [x_0 \ y_0 \ z_0]^T$,

其中, $x_0 = 0.1\text{m}, y_0 = z_0 = 0, J_0 = 1 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$
 层合板的参数为: 长 $L = 0.8\text{m}$, 宽 $H = 0.1\text{m}$,
 厚 $h = 0.01\text{m}$, 铺层角 $(0/90/0)$, 材料常数:

$$E_1 = 1.81 \times 10^{11} \text{ Pa}, E_2 = 1.03 \times 10^{11} \text{ Pa},$$

$$v_{12} = v_{13} = v_{23} = 0.28,$$

$$G_{12} = G_{13} = 7.7 \times 10^9 \text{ Pa}, G_{23} = 2.87 \times 10^9 \text{ Pa},$$

令倾斜角 φ 为 45° , 由于层合板的大变形效应, 中心刚体会转动. 取时间历程 2s 时, 计算 $t = 0.1\text{s}$ 时层合板应力沿着厚度的变化. 研究如图 2 所示刚-柔耦合系统中浮动坐标系 $\vec{e}_2(A - \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ 下的四个节点: B($L/2, 0$), C($L/2, -H/2$), D($L, 0$), E

($L, -H/2$). 计算四个节点的应力沿着厚度的变化.

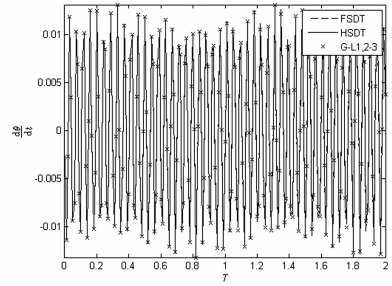


图 7 中心刚体角速度与时间变化

Fig. 7 Angular velocity - time relationships of the central rigid body

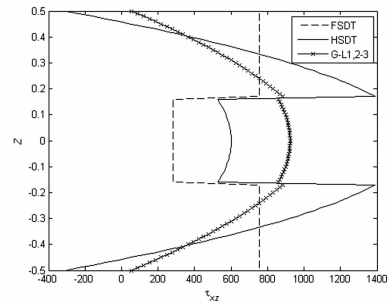


图 8 点 B 面外剪切应力 τ_{xz} 沿厚度变化

Fig. 8 Relationship of out-plane shear stress τ_{xz} and the thickness Z at Point B

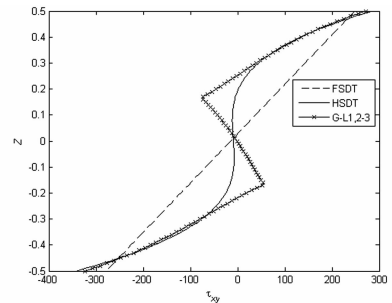


图 9 点 C 面内正应力 τ_{xy} 沿厚度变化

Fig. 9 Relationship of in-plane normal stress τ_{xy} and the thickness Z at Point C

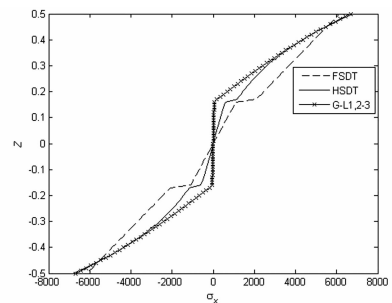


图 10 点 D 面内正应力 σ_x 沿厚度变化

Fig. 10 Relationship of in-plane normal stress σ_x and the thickness Z at Point D

图7为分别利用文献[10]的一阶剪切理论 FSDT,高阶剪切理论 HSDT,以及本文的整体-局部 1,2-3 理论 G-L1,2-3 计算出来的中心刚体的转动角速度.图8到图14为分别利用一阶剪切理论,高阶剪切理论,以及整体-局部 1,2-3 理论,计算的多体系统刚柔耦合系统中,绕着中心刚体转动的层合板在 $t=0.1s$ 时各点的应力沿着厚度的变化.

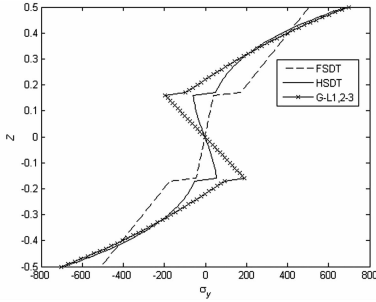


图 11 点 D 面内正应力 σ_y 沿厚度变化

Fig. 11 Relationship of in-plane normal stress σ_y and the thickness Z at Point D

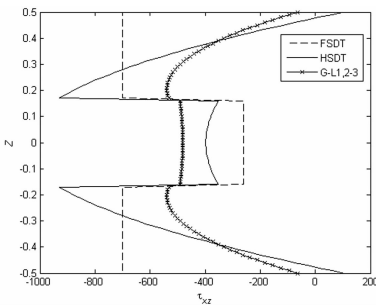


图 12 点 D 面外剪切应力 τ_{xz} 沿厚度变化

Fig. 12 Relationship of out-plane shear stress τ_{xz} and the thickness Z at Point D

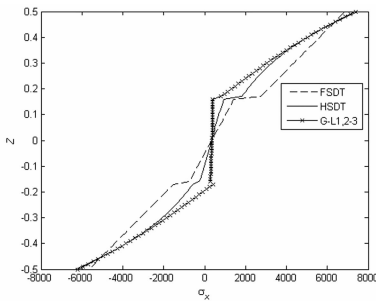


图 13 点 E 面内正应力 σ_x 沿厚度变化

Fig. 13 Relationship of in-plane normal stress σ_x and the thickness Z at Point E

图7为分别利用三种模型计算出来的中心刚体的角速度时间历程,三种模型在计算中心刚体的角速度相同,说明了层合板模型对于刚体的影响可以忽略.图8为点B的 τ_{xz} 沿厚度变化,可以看出,一阶剪切理论与高阶剪切理论所得到的应力沿厚

度呈不规则变化,而本文模型反映出应力在层间出现的变化与静力学中的面外剪切应力的变化趋势大致符合;图9为点C的 τ_{xy} 沿着厚度的变化,一阶理论的应力值呈线性变化,高阶剪切理论仅描述了平均值,而本文模型的应力结果可以较好地反映出层间变化.图10与图11分别为点D的 σ_x 与 σ_y 沿厚度的变化,图中显示,一阶剪切理论差异较为明显,在分层处,一阶理论和高阶理论均有明显的突变,而本文模型与静力学中面内正应力的变化趋势相符.图12为点D处的 τ_{xz} 沿厚度变化,图中显示,一阶剪切理论和高阶剪切理论差异均较大,本文基于整体-局部高阶剪切理论的动力学模型满足上下表面自由条件,可以较好地反映出层间应力的变化.图13为点E的 σ_x 沿厚度的变化.图14为点E处的 τ_{xy} 沿厚度的变化,其变化规律与点C相同.由于一阶剪切和高阶剪切没有考虑层间应力连续,对于层合板,几种方法计算出来的应力在分层处差异最大.由此可见,本文模型可以很好地反映出刚柔耦合多体系统中层合板的层间应力的变化.

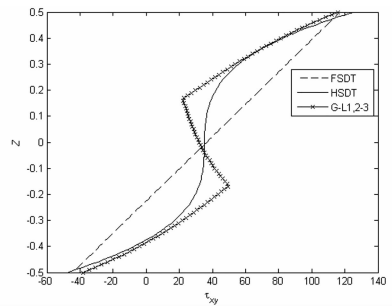


图 14 点 E 面内剪切应力 τ_{xy} 沿厚度变化

Fig. 14 Relationship of in-plane shear stress τ_{xy} and the thickness Z at Point E

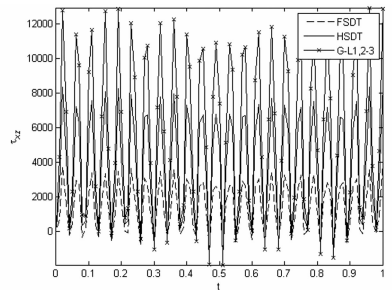


图 15 点 B 面外剪切应力 τ_{xz} 变化

Fig. 15 Time history of out-plane shear stress τ_{xz} at Point B

通过图7到图14可以看出,一阶剪切理论在计算层间应力会出现很大误差.高阶剪切理论和本文的整体-局部高阶剪切理论在分层处应力开始

出现区别.考虑了层合板层间剪切应力连续的刚柔耦合层合板可以更合理的反映出具有转动效应的层合板的层间应力的变化.为了更好地对比三种模型计算出来的应力区别.现在选取层合板上四个位置的对应中面上的四个点,计算时间历程.

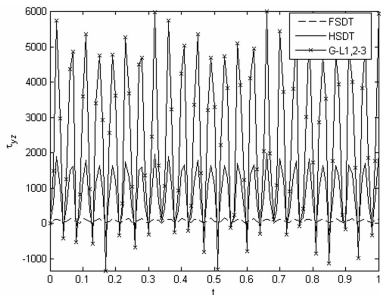


图 16 点 C 面外剪切应力 τ_{yz} 变化

Fig. 16 Time history of out-plane shear stress τ_{yz} at Point C

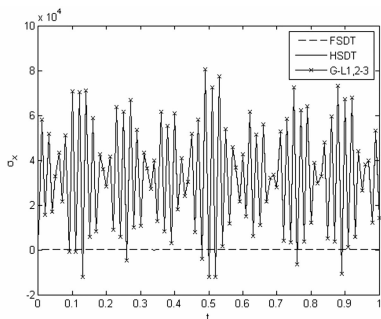


图 17 点 D 面内正应力 σ_x 变化

Fig. 17 Time history of in-plane normal stress σ_x at Point D

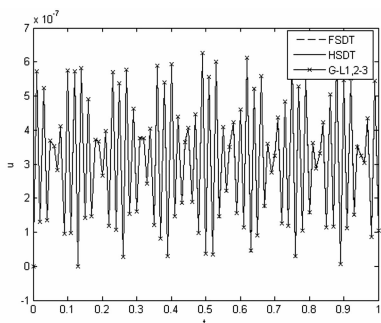


图 18 点 C 面内位移 u 变化

Fig. 18 Time history of in-plane displacement u at Point C

图 15 为位置 B 对应的点的面外剪切应力 τ_{xz} 的时间历程;图 16 为位置 C 对应的点的面外剪切应力 τ_{yz} 的时间历程;图 17 为位置 D 对应的点的面内正应力 σ_x 的时间历程;图 18 为位置 C 对应的点的面内位移 u 的时间历程;图 19 为位置 E 对应的点的面内位移 v 的时间历程.可以看出不考虑层间剪切应力连续的一阶剪切理论、高阶剪切理论计算出来的应力与考虑了层间剪切应力连续的整体-

局部高阶剪切理论的计算结果差异较大.而三种方法在计算响应的时候差异较小.由此可以看出来针对计算层间应力的精度问题而考虑层间剪切应力连续条件的必要性.

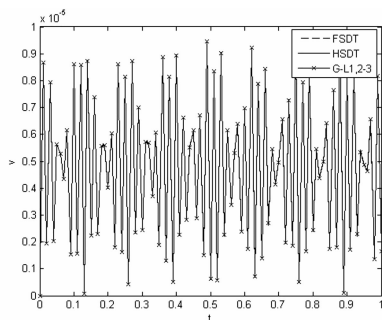


图 19 点 E 面内位移 v 变化

Fig. 19 Time history of in-plane displacement v at Point E

6 结论

(1) 创新性地将整体局部高阶剪切理论扩展到刚-柔耦合多体系统,可以反映出刚柔耦合层合板层间应力沿着厚度的层间变化.

(2) 在层合板刚-柔耦合多体系统中,层合板模型对于中心刚体的角速度影响较小.

(3) 层合板多体系统的层间应力在分层处会出现较明显的变化,考虑了层间应力连续的模型,计算出来的层间应力的变化与静力学基本相符,但是由于惯性力的存在,面外应力在层间的变化与静力学的变化趋势存在差异,在层合板多体系统中需要考虑层间剪应力连续.

参 考 文 献

- 1 Zhanga Y X, Yang C H. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates. *Composite Structures*, 2009, 88(1):147 ~ 157
- 2 Carrera E, Brischitto S. A survey with numerical assessment of classical and refined theories for the analysis of sandwich plates. *Applied Mechanics Review*, 2009, 62(1):1 ~ 17
- 3 Fiedler L, Lacarbonara W, Vestroni F. A generalized higher-order theory for buckling of thick multi-layered composite plates with normal and transverse shear strains. *Composite Structures*, 2010, 92(12):3011 ~ 3019
- 4 陈丽华,孙玥,张伟.三阶剪切变形板的振东特性研究. *动力学与控制学报*, 2014, 12(1):50 ~ 55 (Chen L H, Sun Y, Zhang W. Study on vibration characteristic of third

- order shear deformation theory of plate. *Journal of Dynamics and Control*, 2014, 12(1): 50 ~ 55 (in Chinese))
- 5 Plagianakos T S, Saravanos D A. High-order layerwise finite element for the damped free-vibration response of thick composite and sandwich composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, 77(11): 1593 ~ 626
 - 6 Brischetto S, Carrera E, Demasi L. Improved bending analysis of sandwich plates using a zig-zag function. *Composite Structures*, 2009, 89(3): 408 ~ 415
 - 7 XiaoYuLi, Dahsin Liu. Generalized laminate theories based on double superposition hypothesis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40(7): 1197 ~ 1212
 - 8 Wu Z, Chen b R G, Chen W J. Refined laminated composite plate element based on global - local higher-order theory. *Composite Structures*, 2005, 70(2): 135 ~ 152
 - 9 吴根勇, 和兴锁. 旋转复合材料板的动力学性能研究. 振动与冲击, 2008, 27(8): 149 ~ 154 (Wu G Y, He X S, Deng F Y. Dynamic analysis of rotating composite plate. *Journal of Vibration and Shock*, 2008, 27(8): 149 ~ 154 (in Chinese))
 - 10 Pan K Q, Liu J Y. Dynamic investigation on composite flexible multi - body system considering thermal effect. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2010, 15(4): 414 ~ 422
 - 11 Mohamad S. Qatu. Vibration of laminated shells and plates. San Diego: Elsevier, 2004: 7 ~ 12
 - 12 Pagano N J. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *Journal of Composite Materials*, 1969, 3(3): 398 ~ 411
 - 13 Pagano N J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *Journal of Composite Materials*, 1970, 4(1): 20 ~ 34

TATIC AND DYNAMINC ANALYSIS OF LAMINATED PLATE MULTIBODY SYSTEM BASED ON GLOBAL-LOCAL HIGHER ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY *

Tian Lizhi[†] Liu Jinyang

(Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract Based on the higher order shear deformation theory, the global-local 1, 2-3 mode is derived in this paper. Given the conditions of the continuity of in-plane deformation and shear stress, as well as the free conditions of the upper and lower surfaces, the number of the independent variables for each node of laminated plate is reduced to 13, which is independent of the number of laminate layers. The displacement mode is then developed through rigid-flexible coupling dynamics for laminated plate mutibody system. Based on the principle of virtual work, the dynamic equations for mutibody system are established through the hybrid coordinate formulation, where the continuity of the interlaminar stress is taken into consideration for laminated plate. The global-local 1, 2-3 displacement mode is obtained and verified against the exact solution in statics example. Finally, the comparison of the results obtained by the proposed method and the traditional method for laminated plate mutibody system illustrates the necessity of considering the continuity of interlaminar shear stress in simulation of laminated plate mutibody system.

Key words global-local higher order theory, continuity of interlaminar shear stress, laminated plate mutibody system, stress analysis