

碳纳米管增强复合材料板的混沌动力学研究*

孙海翰 张伟[†]

(北京工业大学机械工程与应用电子技术学院, 北京 100124)

摘要 基于碳纳米管增强复合材料板结构的非线性动力学方程, 利用多尺度法得到该系统在 1:3 内共振情况下的平均方程. 运用规范型理论对平均方程化简, 研究了化简后系统未受扰动部分的非线性动力学行为和扰动项对系统流形的影响. 同时, 利用能量-相位法验证了系统存在多脉冲跳跃轨线, 进而证明在一定参数条件下碳纳米管增强复合材料板结构中存在 Smale 马蹄意义下的混沌. 所得结论具有重要理论价值, 对实际工程具有指导意义.

关键词 碳纳米管, 复合材料板, 能量相位法, 多脉冲, 混沌

DOI: 10.6052/1672-6553-2015-045

引言

碳纳米管复合材料具有质量轻, 强度大和多功能等突出的优点, 在航空航天、汽车工业、化工、纺织甚至医疗领域都有广泛的用途. 从力学角度来看, 碳纳米管的硬度很高, 而柔韧性却十分良好, 可以拉伸, 在材料中引入碳纳米管可以使材料的横向力学性能大幅提高, 大大增加剪切强度和抗冲击性能. 近年来国内和国际的相关学者在对碳纳米管复合材料领域做了大量的研究. 如 Kireitseu 等人^[1]讨论了碳纳米管在增强复合材料的刚度和结构强度方面的作用. Jana 等人^[2-3]在环氧树脂基中加入碳纳米管, 发现这种复合材料在受热过程中, 可以改善残余应力问题, 提高材料性能. Jia 等人^[4]指出多壁碳纳米管复合材料中, 基体与碳纳米管之间可以进行能量传导, 因而这种设计的复合材料具有减震的效果.

而复合材料板结构的研究近年来也是十分热门的项目, 复合材料板在航天器、发动机制造等领域有着重要应用, 而传统的线性理论早已不能满足研究需要, 通过非线性理论才能更好的解释结构的复杂的动力学行为, 而解析的求解系统的动力学行为, 目前来看还存在着诸多困难, 但意义重大, 有不少学者在这方面取得了丰硕的成果. 1995 年, Hal-

ler 等^[5]建立了完整的能量相位法理论体系, 这种方法与广义 Melnikov 法相比具有计算相对简单且意义直观等优点, 因此迅速的被运用到工程实际问题中. Zhang^[6]研究了参数激励下的薄板 1:1 内共振情况的单脉冲混沌动力学, 并通过数值模拟发现了板在一定的参数条件下存在混沌运动现象, 用数值实验验证了理论分析的正确性. Yao 等^[7]利用能量相位法研究了外激励和参数激励作用下四边简支矩形板的多脉冲混沌动力学. Zhang 等^[8]研究了压电材料层合板的混沌动力学. Zhang 等^[9]利用能量相位法研究了功能梯度材料矩形板 1:1 内共振情况下的多脉冲混沌动力学. 但总体来看, 目前高维非线性系统非线性动力学解析研究的相关理论较少, 且对系统限制条件很多, 现有的研究成果远远不能满足工程实际问题的需要.

本文对碳纳米管增强复合材料板结构的非线性动力学方程进行摄动分析, 运用多尺度法得到系统在 1:3 内共振情况下的平均方程组. 该方程组为一个四维非线性系统, 运用规范型理论对系统进行了化简, 讨论了化简后系统的未受扰动部分的动力学行为和扰动项对系统流形的影响. 运用能量-相位法验证了系统中存在多脉冲跳跃轨线, 进而证明了在一定的参数条件下碳纳米管增强复合材料板结构中存在 Smale 马蹄意义下的混沌. 本文的研究

2015-04-03 收到第 1 稿, 2015-05-05 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11290152)

[†] 通讯作者 E-mail: sandyzhang0@yahoo.com

具有重要学术价值并对实际工程问题具有重要指导意义。

1 控制方程和规范型

碳纳米管增强复合材料板的动力学模型如图1所示. 考虑边界条件为四边简支, 板的长、宽、厚度分别为 a 、 b 和 h , 基体材料为环氧树脂. 板受到横向载荷 $F = F_0 - F_1 \cos \Omega_2 t$ 和面内载荷 $P = P_0 - P_1 \cos \Omega_2 t$. 并假设碳纳米管在板内均匀铺设.

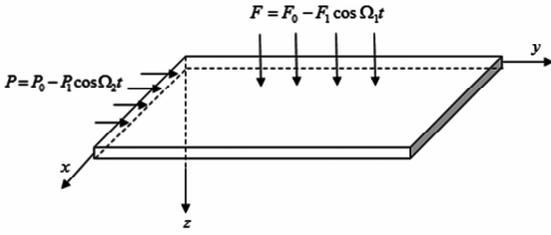


图1 碳纳米管复合材料板力学模型

Fig. 1 Mechanical model of the CNT composite plate

根据 Reddy 三阶剪切理论, Hamilton 原理及 Galerkin 离散我们可以得到二自由度碳纳米管增强复合材料板的非线性控制方程^[10]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \mu \dot{x}_1 + (\omega_1^2 + a_1 \cos \Omega_2 t) x_1 + a_2 x_1^3 + a_3 x_2^3 + \\ a_4 x_1^2 x_2 + a_5 x_1 x_2^2 + a_6 x_1 x_2 + a_7 x_1^2 + \\ a_8 x_2^2 = f_1 \cos \Omega_2 t \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 + \mu \dot{x}_2 + (\omega_2^2 + b_1 \cos \Omega_2 t) x_2 + b_2 x_1^3 + b_3 x_2^3 + \\ b_4 x_1^2 x_2 + b_5 x_1 x_2^2 + b_6 x_1 x_2 + b_7 x_1^2 + \\ b_8 x_2^2 = f_2 \cos \Omega_2 t \end{aligned} \quad (1b)$$

其中具体参数参照 Guo 的文献^[10].

运用多尺度法对方程组(1)进行摄动分析, 考虑 1:3 内共振的情况, 共振关系为

$$\omega_1^2 = \frac{1}{4} \Omega_2^2 + \varepsilon \sigma_1, \omega_2^2 = \frac{9}{4} \Omega_2^2 + \varepsilon \sigma_2, \quad (2a)$$

$$\Omega_2 = 1, \Omega_1: \Omega_2 = 3: 2 \quad (2b)$$

在此共振关系下可以得到平均方程:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = -\frac{1}{2} \mu x_1 - (\sigma_1 - \frac{a_1}{2}) x_2 - 3a_2 x_2 (x_1^2 + x_2^2) - \\ a_4 x_4 x_1^2 + a_4 x_4 x_2^2 - 2a_5 x_2 (x_3^2 + x_4^2) + 2a_4 x_1 x_2 x_3 \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = -\frac{1}{2} \mu x_2 + (\sigma_1 + \frac{a_1}{2}) x_1 + 3a_2 x_1 (x_1^2 + x_2^2) + \\ a_4 x_3 x_1^2 - a_4 x_3 x_2^2 + 2a_3 x_1 (x_3^2 + x_4^2) + 2a_4 x_1 x_2 x_4 \end{aligned} \quad (3b)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = -\frac{1}{2} \mu x_3 - \frac{\sigma_2}{3} x_4 + \frac{b_2}{3} x_2^3 - b_2 x_1^2 x_2 - b_3 x_4 x_3^2 - \\ b_3 x_4^3 - \frac{2}{3} b_4 x_4 (x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \quad (3c)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = -\frac{1}{2} \mu x_4 + \frac{\sigma_2}{3} x_3 + \frac{b_2}{3} x_1^3 - b_2 x_1 x_2^2 + b_3 x_3^3 + \\ b_3 x_3 x_4^2 + \frac{2}{3} b_4 x_3 (x_1^2 + x_2^2) - \frac{f_2}{6} \end{aligned} \quad (3d)$$

易见, 方程(3)有一个平凡解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$, 其特征方程为:

$$\left(\lambda^2 + \mu \lambda + \frac{1}{4} \mu^2 + \sigma_1^2 - \frac{a_1^2}{4} \right) \left(\lambda^2 + \mu \lambda + \frac{1}{4} \mu^2 + \frac{\sigma_2^2}{9} \right) = 0 \quad (4)$$

当 $\mu = 0, \frac{1}{4} \mu^2 + \sigma_1^2 - \frac{a_1^2}{4} = 0, \frac{1}{4} \mu^2 + \frac{\sigma_2^2}{9} > 0$ 三个条件都满足时, 特征方程有一对零特征根和一对纯虚根, $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} = \pm i \frac{|\sigma_2|}{3}$. 这里可以引入变换,

令 $\sigma_1 = -\frac{a_1}{2} + \bar{\sigma}_1$, 且不失一般性可令 $a_1 = 1$, 并将 $\bar{\sigma}, \mu, f_2$ 作为摄动参数. 根据 Zhang 的程序^[11], 可以用规范型理论对不含摄动参数的方程进行进一步化简. 再引入开折变换和极坐标变换:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{|a_5|}}{\sqrt{\frac{1}{3}|b_4|}} \begin{bmatrix} 1 - \bar{\sigma}_1 & 0 \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (5a)$$

$$x_3 = I \cos \varphi, x_4 = I \sin \varphi \quad (5b)$$

消去 $\bar{\sigma}_1$ 的非线性项, 得到最终的规范型:

$$\dot{u}_1 = u_2 \quad (6a)$$

$$\dot{u}_2 = -\varepsilon \mu u_2 - \mu_1 u_1 + \gamma_1 u_1^3 + 2a_5 u_1 I^2 \quad (6b)$$

$$\dot{I} = -\varepsilon \mu I - \varepsilon \frac{f_2}{6} \sin \varphi \quad (6c)$$

$$\dot{\varphi} I = \frac{1}{3} \sigma_2 I + b_3 I^3 + 2a_5 u_1^2 I - \varepsilon \frac{f_2}{6} \cos \varphi \quad (6d)$$

其中 $\mu_1 = \frac{\mu^2}{4} - \bar{\sigma}_1 (1 - \bar{\sigma}_1), \gamma_1 = \frac{9a_3 a_5}{b_4}$, 可以看出系统的未扰动部分是 Hamilton 系统, Hamilton 函数为

$$\begin{aligned} H(u_1, u_2, I, \varphi) = \frac{1}{2} u_2^2 - \frac{\mu_1}{2} u_1^2 + \frac{\gamma_1}{4} u_1^4 + a_5 u_1^2 I^2 + \\ \frac{1}{6} \sigma_2 I + \frac{b_3}{4} I^4 \end{aligned} \quad (7)$$

于是系统可以简化的写成如下形式

$$\dot{u}_1 = \frac{\partial H}{\partial u_2} + \varepsilon g_{u_1} \quad (8a)$$

$$\dot{u}_2 = -\frac{\partial H}{\partial u_1} + \varepsilon g_{u_2} \quad (8b)$$

$$I = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} + \varepsilon g_I - \varepsilon \frac{f_2}{6} \sin \varphi \quad (8c)$$

$$\dot{\varphi} I = \frac{\partial H}{\partial I} + \varepsilon g_\varphi - \varepsilon \frac{f_2}{6} \cos \varphi \quad (8d)$$

其中

$$g_{u_1} = 0, g_{u_2} = -\mu u_2, g_I = -\mu I, g_\varphi = 0.$$

2 能量相位法

2.1 未扰动系统动力学

当 $\varepsilon = 0$ 时, 我们得到系统(8)的未受扰动系统, 此时有 $I = 0$, 因此 I 可以看作一个常数, 系统的前二维方程就可以解耦得到

$$\dot{u}_1 = u_2 \quad (9a)$$

$$\dot{u}_2 = -\mu_1 u_1 + \gamma_1 u_1^3 + 2a_5 u_1 I^2 \quad (9b)$$

Hamilton 函数为

$$H(u_1, u_2) = \frac{1}{2} u_2^2 - \frac{\mu_1}{2} u_1^2 + \frac{\gamma_1}{4} u_1^4 + a_5 u_1^2 I^2 \quad (10)$$

容易看出, 当 $\frac{\mu_1 - 2a_5 I^2}{\gamma_1} < 0$ 时, 系统(9)只有 $(0, 0)$

点一个奇点, 当 $\frac{\mu_1 - 2a_5 I^2}{\gamma_1} > 0$ 时, 系统(9)有三个奇

点 $(0, 0)$, $(\pm \sqrt{\frac{\mu_1 - 2a_5 I^2}{\gamma_1}}, 0)$. 在 $(0, 0)$ 点处的特征

方程为 $\lambda^2 = 2a_5 I^2 - \mu_1$, 我们在这里只讨论 $2a_5 I^2 - \mu_1 > 0, \gamma_1 < 0$ 的情况. 此时 $(0, 0)$ 是鞍点. 在 $(\pm$

$\sqrt{\frac{\mu_1 - 2a_5 I^2}{\gamma_1}}, 0)$ 处的特征方程为 $\lambda^2 = 2\mu_1 - 4a_5 I^2$ 此

时特征根为一对共轭纯虚复根, 所以 $(\pm$

$\sqrt{\frac{\mu_1 - 2a_5 I^2}{\gamma_1}}, 0)$ 是一对中心点. 并且系统存在一对

链接鞍点的同宿轨线, 由 Hamilton 原理可知鞍点处的能量等于同宿轨线上的能量, 由此可以得到同宿轨线的表达式.

$$H(u_1, u_2) = H(0, 0) \quad (11)$$

结合(9), (10)和(11)式, 可以解出一对同宿轨线为:

$$u_1^h(T_1) = \pm \sqrt{\frac{-2R}{\gamma_1} \operatorname{sech}(\sqrt{R}T_1)} \quad (12a)$$

$$u_2^h(T_1) = \mp \sqrt{\frac{2}{-\gamma_1} R \tanh(\sqrt{R}T_1) \operatorname{sech}(\sqrt{R}T_1)} \quad (12b)$$

其中 $R = 2a_5 I^2 - \mu_1$.

在 $(0, 0)$ 处使得 $D_I H(0, 0, I_r) = 0$ 成立的值 I_r 成为共振值, 由上式可以解出系统存在三个共振值, $I_1 = 0, I_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{-\sigma_2}{b_3}}$, 结合实际物理意义, 只需要考虑 $I_r = \sqrt{\frac{-\sigma_2}{b_3}}$, 当 $I_r^2 > \frac{\mu_1}{2a_5}$ 时, 在 I_r 的充分小的邻域内系统奇点的类型不变, 即存在区间 $I_r \in [I_1, I_2]$, 系统存在双曲不动点和一对同宿轨线链接. 于是在四维相空间 (u_1, u_2, I, φ) 中有一正规双曲不变流形:

$$S = \{(u, I, \varphi) \in R^2 \times R^2 \times T \mid u = (0, 0), I \in [I_1, I_2], \varphi \in [0, 2\pi]\} \quad (13)$$

不变流形 S 有三维稳定流形 $W^s(S)$ 和三维不稳定流形 $W^u(S)$, 它们在同宿流形上相互融合. 图2给出正规双曲不变流形 S 附近的几何结构.

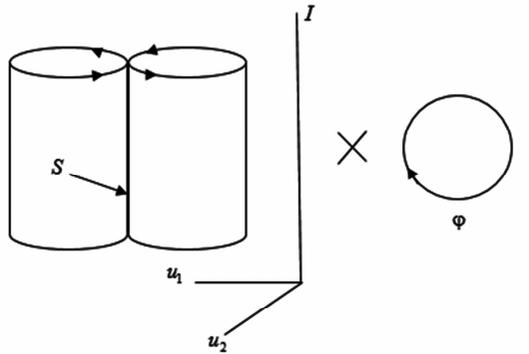


图2 正规双曲不变流形附近的几何结构

Fig. 2 The geometric structure of manifolds $S, W^s(S)$ and $W^u(S)$

计算相位漂移角, 相位漂移角表示同宿轨线两端点的相位差

$$\Delta \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} D_I H(u_1, u_2, I_r) dT_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3} \sigma_2 + b_3 I_r^2 + 2a_5 \left(\sqrt{\frac{-2R}{\gamma_1} \operatorname{sech}(\sqrt{R}T_1)} \right)^2 dT_1 = -\frac{8a_5 \sqrt{R}}{\gamma_1} \quad (14)$$

2.2 受扰动系统动力学

正规双曲不变流形受扰动后由 S 变为慢变流形 S_ε , 其中

$$S_\varepsilon = \{(u, I, \varphi) \in R^2 \times R^2 \times T \mid u = (0, 0) + O(\varepsilon), I \in [I_1, I_2], \varphi \in [0, 2\pi]\} \quad (15)$$

但由于流形 S 是正规双曲不变流形, 所以在受扰动之后仍保持其双曲流形的性质.

进一步,我们研究后两维系统受扰动的情况,引入时间尺度变换

$$I = I_r + \sqrt{\varepsilon}h, \tau = \sqrt{\varepsilon}T_1 \quad (16)$$

将(16)式代入(6c),(6d)得到系统的慢变流形.

$$h' = -\mu I_r - \frac{f_2}{6}\sin\varphi - \sqrt{\varepsilon}\mu h \quad (17a)$$

$$\varphi' = 2b_3 h I_r + \sqrt{\varepsilon}(b_3 h^2 - \frac{f_2}{6I_r}\cos\varphi) \quad (17b)$$

当 $\varepsilon=0$ 时,系统为 Hamilton 系统,Hamilton 函数为

$$\hat{H}(h, \varphi) = \mu I_r \varphi - \frac{f_2}{6}\cos\varphi + b_3 h^2 I_r \quad (18)$$

令(17)式右端得零,可求得系统的两个奇点,

$$q_s = (0, -\arcsin \frac{6\mu I_r}{f_2}), q_c = (0, \pi + \arcsin \frac{6\mu I_r}{f_2}).$$

奇点处的特征方程为

$$\lambda^2 + \frac{1}{3}b_3 I_r f_2 \cos\varphi = 0 \quad (19)$$

在 $b_3 < 0$ 时, q_s 点处的特征根为两异号实根,所以为鞍点. q_c 点处的特征根为两共轭纯虚数,所以为中心点.

考虑 $\varepsilon \neq 0$ 时,系统在小扰动下几何结构的变化情况. 奇点处的特征方程变为

$$(\lambda^2 + \varepsilon\mu)^2 + \frac{1}{3}b_3 I_r f_2 \cos\varphi = 0 \quad (20)$$

可以看出在小扰动下 q_s 仍然保持为鞍点,而 q_c 由中心点变为了焦点. 慢变流形的受扰动系统的几何结构的变化如图3所示.

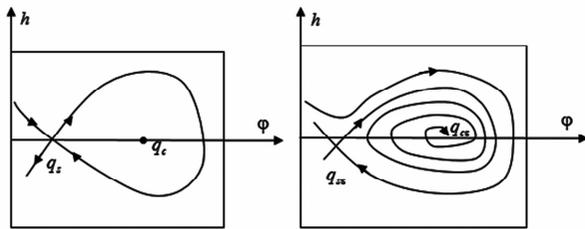


图3 正规双曲不变流形的几何结构

Fig. 3 The geometric structure of the normally hyperbolic invariant manifold

2.3 验证多脉冲轨道存在性

首先,我们要计算能量差分函数. 由于 $g_\varphi = 0$, g_x, g_y 中都不含有 I 和 φ , 所以能量差分函数可以写成以下形式

$$\Delta^n \hat{H}_D(\varphi) = \Delta^n \hat{H}(\varphi) -$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \langle DH, g \rangle \Big|_{u^{(i)}(t)} dt = \Delta^n \hat{H}(\varphi) - n \int_A \left[\frac{d}{dx} g_{u_1} + \frac{d}{dy} g_{u_2} \right] du_1 du_2 - n \int_{\partial A} g_I d\varphi \quad (21)$$

其中 A 表示有同宿轨线所围成区域. ∂A 表示 A 的边界. 由(18)式可得

$$\Delta^n \hat{H}(\varphi) = \hat{H}(h, \varphi + n\Delta\varphi) - \hat{H}(h, \varphi) = -\frac{f_2}{6}(\cos(\varphi + n\Delta\varphi) - \cos\varphi) + n\mu I_r \Delta\varphi \quad (22)$$

由 $g_I = -\mu I$ 可得 $-n \int_{\partial A} g_I d\varphi = n\mu I_r \Delta\varphi$.

再由 $g_{u_1} = 0, g_{u_2} = -\mu u_2$ 可以计算出(21)式中的第二项

$$\begin{aligned} -n \int_A \left[\frac{d}{dx} g_{u_1} + \frac{d}{dy} g_{u_2} \right] du_1 du_2 &= n\mu \int_A du_1 du_2 = \\ &2n\mu \int_0^{\sqrt{\frac{-2R}{\gamma}}} \sqrt{\frac{2}{-\gamma_1}} R \tanh(\sqrt{RT_1}) \operatorname{sech}(\sqrt{RT_1}) \cdot \\ &du_1 = -\frac{2n\mu R}{\gamma_1} = \frac{n\mu \sqrt{R}}{4a_5} \Delta\varphi \end{aligned} \quad (23)$$

于是得到能量差分函数的表达式

$$\Delta^n \hat{H}(\varphi) = \frac{f_2}{3} \sin(\varphi + \frac{n}{2} \Delta\varphi) \sin(\frac{n}{2} \Delta\varphi) + \frac{n\mu \sqrt{R}}{4a_5} \Delta\varphi + 2n\mu \sqrt{\frac{-\sigma_2}{3b_3}} \Delta\varphi \quad (24)$$

根据上式得到的能量差分函数的表达式计算能量差分函数的零点.

$$\begin{aligned} Z^n &= \left\{ (h, \varphi) \mid \Delta^n \hat{H}(\varphi) = 0, D_\varphi \Delta^n \hat{H}(\varphi) \neq 0, \right. \\ &\left. \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

将(24)式代入(25)式得

$$\varphi + \frac{n}{2} \Delta\varphi = k\pi + (-1)^k \alpha \quad (26)$$

$$\text{其中 } \alpha = \frac{\frac{n\mu \sqrt{R}}{4a_5} \Delta\varphi + 2n\mu \sqrt{\frac{-\sigma_2}{3b_3}} \Delta\varphi}{\frac{f_2}{2} \sin \frac{n}{2} \Delta\varphi}.$$

在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 上的能量差分零点为

$$\varphi_{-1}^n = \frac{3\pi}{2} - \left[-\alpha + \frac{n}{2} \Delta\varphi \right] \bmod 2\pi \quad (27a)$$

$$\varphi_{-2}^n = \frac{3\pi}{2} - \left[\pi + \alpha + \frac{n}{2} \Delta\varphi \right] \bmod 2\pi \quad (27b)$$

为了对慢变时间系统内部轨线进行分类,我们根据未扰动系统是 Hamilton 系统的特性,考虑定义范围内的内部轨线的能级. 设有同宿链接的鞍点处的能

量为,中心点处的能量为 H_∞ ,在同宿链接所围成的范围内的 n 阶能级周期轨线的能量为 H_n . 可以分别求得

$$H_0(q_s) = \mu I_r \left(-\arcsin \frac{6\mu I_r}{f_2} \right) - \frac{f_2}{6\sqrt{1 - \left(\frac{6\mu I_r}{f_2} \right)^2}} \quad (28a)$$

$$H_\infty(q_c) = \mu I_r \left(\pi + \arcsin \frac{6\mu I_r}{f_2} \right) + \frac{f_2}{6\sqrt{1 - \left(\frac{6\mu I_r}{f_2} \right)^2}} \quad (28b)$$

$$H_n = \max[\hat{H}(0, \varphi_{-,1}^n), \hat{H}(0, \varphi_{-,2}^n)] \quad (28c)$$

通过这样的定义,我们在后两维未扰动系统中链接鞍点的同宿轨线范围内,定义了一个单调的能级序列, $H_0 < H_n < H_\infty$.

接下来只需要验证以中心点 q_c 为起跳点经过 n 次脉冲跳跃后的渐进着陆点 $(0, \varphi_c + n\Delta\varphi)$ 落在吸引域内,即可证明系统存在多脉冲跳跃轨线. 对着陆点进行平移,定义在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 上距离着陆点 $2k\pi$ 的点如下

$$\varphi_s^n = \varphi_s + [\varphi_c + n\Delta\varphi - \varphi_s] \bmod 2\pi \quad (29)$$

其中 $\varphi_c = \pi + \arcsin \frac{6\mu I_r}{f_2}$, $\varphi_s = -\arcsin \frac{6\mu I_r}{f_2}$. 根据我们对轨线能级的划分,若要验证渐进着陆点落在吸引域内,只需要验证平移后的渐进着陆点处的能量大于鞍点处的能量即可,由(18)式可得

$$\hat{H}(0, \varphi_s^n) > \hat{H}(0, \varphi_s) \quad (30)$$

化简不等式得到

$$\frac{f_2}{6} (\cos \varphi_s - \cos \varphi_s^n) > \mu I_r (\varphi_s - \varphi_s^n) \quad (31)$$

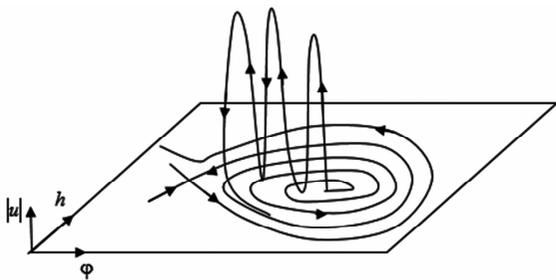


图4 Shilnikov 多脉冲跳跃轨线

Fig. 4 Multi-pulse orbits of Shilnikov type

即只要参数满足(31)式,那么对充分小的 $\varepsilon > 0$ 有渐进着陆点落在双曲汇的吸引域内. 此时系统存在

Shilnikov 型多脉冲跳跃轨线. 进而说明系统中存在混沌动力学现象. 图4给出了 Shilnikov 型多脉冲跳跃轨线的结构示意图.

3 小结

目前对高维非线性系统的动力学研究仍然是一项非常有挑战性的工作. 本文首次研究了碳纳米管增强复合材料板在 1:3 内共振情况下所对应的四维非线性系统的复杂动力学行为. 运用规范型理论对系统四维平均方程进行化简,讨论了未受扰动系统的动力学行为和扰动项对动力学行为的影响,用能量相位法验证了系统中 Shilnikov 型多脉冲轨线的存在性,进而说明了受横向载荷和面内载荷联合作用下的碳纳米管增强复合材料板在一定的参数条件下存在 Smale 马蹄意义下的混沌. 实际工程中,板结构横向振动呈现混沌运动状态会造成结构的疲劳积累等问题,对整个系统的长期的安全性和稳定性造成隐患,所以在工程设计时应尽量避免文中指出的系统中存在混沌运动的参数范围.

参 考 文 献

- 1 Kireitseu M, Hui D, Tomlinson G. Advanced shock-resistant and vibration damping of nanoparticle-reinforced composite material. *Composites: Part B*, 2008, 39(1): 128 ~ 138
- 2 Jana S, Zhamu A, Zhong W H, et al. Experimental evaluation of adhesion property of UHMWPE fibers/nano-epoxy by a pullout test. *The Journal of Adhesion*, 2006, 82(12): 1157 ~ 1175
- 3 Jana S, Zhamu A, Zhong W H, et al. Effect of reactive graphitic nanofibers (r-GNFs) on tensile behavior of UHMWPE fiber/nano-epoxy bundle composites. *Master Manufacturing Procedure*, 2007, 23(1): 102 ~ 110
- 4 Jia J Y, Liao W H. Modeling of vertically aligned carbon nanotubes composites for vibration damping. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 2011, 8(9): 1784 ~ 1791
- 5 Haller G, Wiggins S. N-pulse homoclinic orbits in perturbations of resonant Hamiltonian systems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1995, 130(1): 25 ~ 101
- 6 Zhang W. Global and chaotic dynamics for a parametrically excited thin plate. *Journal of Sound and Vibration*, 2001,

- 239(5);1013 ~ 1036
- 7 姚明辉. 多自由度非线性机械系统的全局分叉和混沌动力学研究. 北京:北京工业大学,2006 (Yao M H. Studies on global bifurcations and chaotic dynamics in multi-degree of freedom nonlinear mechanical systems. Beijing: Beijing University of Technology, 2006 (in Chinese))
- 8 Zhang W, Gao M J, Yao M H, et al. Higher-dimensional chaotic dynamics of a composite laminated piezoelectric rectangular plate. *Science in China Series G: Physics, Mechanics & Astronomy*, 2009,52(12):1989 ~ 2000
- 9 Li S B, Zhang W, Hao Y X. Multi-pulse chaotic dynamics of a functionally graded material rectangular plate with one-to-one internal resonance. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2010,11(5):351 ~ 362
- 10 郭翔鹰. 复合材料板结构的非线性动力学. 北京:北京工业大学,2011 (Guo X Y. Nonlinear dynamics of composite laminated plates. Beijing: Beijing University of Technology, 2011 (in Chinese))
- 11 Zhang W, Wang F X, Zu J W. Computation of normal forms for high dimensional nonlinear systems and application to nonplanar motions of a cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, 2004,278(4-5):949 ~ 974

CHAOTIC DYNAMICS OF A CARBON NANOTUBE-REINFORCED COMPOSITE PLATE *

Sun Haihan Zhang Wei[†]

(College of Mechanical Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract Based on the nonlinear governing equation of the carbon nanotube-reinforced composite plate, the averaged equation under 1:3 internal resonances is obtained by using the method of multiple scales. It is then simplified by means of the normal form theory. The nonlinear dynamics of the unperturbed system and the effect of the perturbation terms on the manifold are investigated. Energy-phase method is used to validate the existence of the multi-pulse jumping orbits. It is eventually approved that chaotic dynamics in the sense of Smale horseshoes takes place at the carbon nanotube-reinforced composite plate under certain parameters. The results also provides essential data for theoretical analysis and engineering practice.

Key words carbon nanotube, composite material plate, energy-phase method, multi-pulse orbit, chaotic motion