第 13 卷第 5 期 2015 年 10 月
1672-6553/2015/13(5)/343-5
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 13 No. 5
Oct. 2015

一类耦合抽象非线性梁方程组的整体解 *

郝晓荣　张建文†
（太原理工大学数学学院，太原　030024）

摘要　研究了一类抽象耦合非线性梁方程组在 Hilbert 空间中的初值问题. 首先运用 Galerkin 方法对两个方程进行一定的处理,然后证明收敛性,最后证明了上述非线性梁方程组的整体弱解的存在性.

关键词　非线性，　耦合，　梁方程，　整体解

DOI：10.6052/1672-6553-2014-073

引言

2008 年,Pedro Pablo Durand Lazo[1] 运用 Galerkin 方法证明了以下抽象方程

$$\ddot{u}+M(|A^{\frac{1}{2}}u|^2)Au+N(|A^{\alpha}u|^2)A^{\alpha}\dot{u}=f)$$

整体解的存在性,其中 $0<\alpha\leqslant 1$, $M(s)$, $N(s)\in C([0,+\infty);R)$,且对 $\forall s\geqslant 0$, $m_0,n_0>0$,有 $M(s)\geqslant m_0$, $N(s)\geqslant n_0$.

2010 年,李润民,张建文[2] 等研究了以下一类抽象非线性梁方程

$$\ddot{u}+A^2u+M(|A^{\frac{1}{2}}u|^2)Au+N(|A^{\alpha}u|^2)A^{\alpha}\dot{u}=f$$

在初始条件 $u(x,0)=u_0$, $\dot{u}(x,0)=u_1$, $x\in\Omega$ 下整体弱解的存在性问题,其中 $\Omega=(0,l)$, $0<\alpha\leqslant 1$.

2011 年,张建文,丁霞霞[3] 等研究了以下抽象耦合非线性方程组

$$\begin{cases}\ddot{u}+M(|A^{\frac{1}{2}}u|^2+|A^{\frac{1}{2}}v|^2)Au+N(|A^{\alpha}u|^2)A^{\alpha}\dot{u}=f\\ \ddot{v}+M(|A^{\frac{1}{2}}u|^2+|A^{\frac{1}{2}}v|^2)Av+N(|A^{\alpha}v|^2)A^{\alpha}\dot{v}=g\end{cases}$$

在一定的初始条件下整体弱解的存在性问题,其中 $\Omega=(0,l)$, $l>0$, $0<\alpha\leqslant 1$.

在本文中,我们将研究如下的一类抽象耦合非线性梁方程组

$$\begin{cases}\ddot{u}+A^2u+M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u|^2+|A^{\frac{\alpha}{2}}v|^2)A^{\alpha}u+\\ \quad N(|A^{\beta}u|^2)A^{\beta}\dot{u}=f\\ \ddot{v}+A^2v+M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u|^2+|A^{\frac{\alpha}{2}}v|^2)A^{\alpha}v+\\ \quad N(|A^{\beta}v|^2)A^{\beta}\dot{v}=g\end{cases}\tag{1}$$

在初始条件

$$\begin{cases}u(x,0)=u_0, v(x,0)=v_0, x\in\Omega\\ \dot{u}(x,0)=u_1, \dot{v}(x,0)=v_1, x\in\Omega\end{cases}\tag{2}$$

下整体弱解的存在性问题,其中 $\Omega=(0,l)$, $l>0$, $0<\alpha\leqslant 1$, $0<\beta\leqslant 1$,函数 $M(\cdot)$, $N(\cdot)$ 的定义同文[1], $\dot{u}=\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\ddot{u}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $t\in[0,T]$ $(0<T<\infty)$.

1　预备知识

设 $\{V,((\cdot,\cdot))\}$ 和 $\{H,(\cdot,\cdot)\}$ 均为实的 Hilbert 空间, V 连续且稠密地嵌入到 H 中,算子 A 是由三重结构 $(V,H,((\cdot,\cdot)))$ 定义的,则 A 是定义在 Hilbert 空间 H 上的正定自共轭算子, A 的特征值 $\{\lambda_j\}$ 满足 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$ 及 $\lambda_n\to+\infty$ $(n\to+\infty)$,它所对应的特征值向量 $\{\omega_j(x)\}_{j\in N_+}$.

空间 $D(A^s)=\{u\in D(A^{\frac{1}{2}}), A^su\in H\}$,其中的内积及范数定义如下

$$(u,v)_{D(A^s)}=(A^su,A^sv)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{2s}(u,\omega_j)(v,\omega_j)$$

$$\forall u,v\in D(A^s)$$

$$\|u\|^2_{D(A^s)}=|A^su|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{2s}(u,\omega_j)^2$$

$$\forall u\in D(A^s)$$

特别, $s=0$,时,记 $H=D(A^0)$;并且记 $V=D(A^{\frac{\alpha}{2}})$.

引理 1[4]　(Gronwall 不等式) 设 $f\in L^{\infty}(0,T)$, $k\geqslant 0$, c_0 为常数,若对一切 $t\in[0,T]$ 下式成立:

$$f(t)\leqslant c_0+k\int_0^t f(s)ds,$$

则

2014-06-10 收到第 1 稿,2014-09-27 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(11172194)
† 通讯作者 E-mail：zhangjianwen@tyut.edu.cn

$f(t)\leqslant c_0e^{kt}$.

引理 2[4] 设 X,Y 为 Hilbert 空间或可分的 Banach 空间,其对偶空间为 X',Y',设 Y 连续且稠密地嵌入到 X 中,若 $u_\mu\to u$ 在 $L^\infty(0,T;X')$ 中弱 * 收敛;且 $\dot u_\mu\to\chi$ 在 $L^\infty(0,T;Y')$ 中弱 * 收敛;则 $\chi=\dot u$ 在 $L(0,T;Y')$ 中成立.

2 弱解的存在性

定理 设 $0<\alpha\leqslant1,0<\beta\leqslant1,M(\cdot),N(\cdot)\in C([0,+\infty);R)$,存在 $m_0,n_0>0$,且对 $\forall z\geq0$,有 $M(z)\geq m_0,N(z)\geq n_0$,$A$ 是定义在 Hilbert 空间 H 上的正定自共轭算子,若

$$\begin{cases}(u_0,u_1,f)\in D(A)\times H\times L^2(0,T;H)\\(v_0,v_1,g)\in D(A)\times H\times L^2(0,T;H)\end{cases}\tag{3}$$

则问题(1)和(2)存在一个弱解 $(u,v)=(u(x,t),v(x,t))$,对 $\forall\varphi\in V$,在 $D'(0,T)$ 中,满足方程

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}(\dot u,\varphi)+(Au,A\varphi)+M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u|^2+\\ \quad|A^{\frac{\alpha}{2}}v|^2)(A^{\frac{\alpha}{2}}u,A^{\frac{\alpha}{2}}\varphi)+N(|A^{\beta}u|^2)\cdot\\ \quad(A^{\frac{\beta}{2}}\dot u,A^{\frac{\beta}{2}}\varphi)=(f,\varphi)\\ \dfrac{d}{dt}(\dot v,\varphi)+(Av,A\varphi)+M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u|^2+\\ \quad|A^{\frac{\alpha}{2}}v|^2)(A^{\frac{\alpha}{2}}v,A^{\frac{\alpha}{2}}\varphi)+N(|A^{\beta}v|^2)\cdot\\ \quad(A^{\frac{\beta}{2}}\dot v,A^{\frac{\beta}{2}}\varphi)=(g,\varphi)\end{cases}\tag{4}$$

及初始条件

$$\begin{cases}u(x,0)=u_0,v(x,0)=v_0\\ \dot u(x,0)=u_1,\dot v(x,0)=v_1\end{cases}\tag{5}$$

且

$$u,v\in L^\infty(0,T;V\cap D(A^\beta))\cap L^2(0,T;D(A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}))\tag{6}$$

$$\dot u,\dot v\in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;D(A^{\frac{\beta}{2}}))\tag{7}$$

证明: 记 V_m 为 A 的前 m 个特征向量 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$ 所张成的子空间,显然 $V_m\subset D(A)$,构造初值问题(1),(2)的近似解序列 $\{u_m(x,t),v_m(x,t)\}$ 如下:

$$u_m(x,t)=\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)\omega_j,$$

$$v_m(x,t)=\sum_{j=1}^m h_{jm}(t)\omega_j,$$

使得 $\forall\varphi\in V_m$ 满足以下方程

$$\begin{cases}(\ddot u_m,\varphi)+(A^2u_m,\varphi)+M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u_m|^2+\\ \quad|A^{\frac{\alpha}{2}}v_m|^2)(A^{\alpha}u_m,\varphi)+N(|A^{\beta}u_m|^2)\cdot\\ \quad(A^{\beta}\dot u_m,\varphi)=(f,\varphi) \qquad (8)\\ (\ddot v_m,\varphi)+(A^2v_m,\varphi)+M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u_m|^2+\\ \quad|A^{\frac{\alpha}{2}}v_m|^2)(A^{\alpha}v_m,\varphi)+N(|A^{\beta}v_m|^2)\cdot\\ \quad(A^{\beta}\dot v_m,\varphi)=(g,\varphi) \qquad (9)\end{cases}$$

在(8),(9)中分别取 $\varphi=\omega_j(j=1,2\cdots,m)$,得

$$\begin{cases}(\ddot u_m,\omega_j)+(A^2u_m,\omega_j)+M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u_m|^2+\\ \quad|A^{\frac{\alpha}{2}}v_m|^2)(A^{\alpha}u_m,\omega_j)+N(|A^{\beta}u_m|^2)\cdot\\ \quad(A^{\beta}\dot u_m,\omega_j)=(f,\omega_j) \qquad (10)\\ (\ddot v_m,\omega_j)+(A^2v_m,\omega_j)+M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u_m|^2+\\ \quad|A^{\frac{\alpha}{2}}v_m|^2)(A^{\alpha}v_m,\omega_j)+N(|A^{\beta}v_m|^2)\cdot\\ \quad(A^{\beta}\dot v_m,\omega_j)=(g,\omega_j) \qquad (11)\end{cases}$$

及初始条件

$$u_m(x,t)=u_{0m}=\sum_{j=1}^m g_{jm}(0)\omega_j=\sum_{j=1}^m(u_0,\omega_j)\omega_j\to u_0$$

在 $D(A)$ 中强收敛;

$$v_m(x,0)=v_{0m}=\sum_{j=1}^m h_{jm}(0)\omega_j=\sum_{j=1}^m(v_0,\omega_j)\omega_j\to v_0$$

在 $D(A)$ 中强收敛;

$$\dot u_m(x,0)=u_{1m}=\sum_{j=1}^m\dot g_{jm}(0)\omega_j=\sum_{j=1}^m(u_1,\omega_j)\omega_j\to u_1$$

在 H 中强收敛;

$$\dot v_m(x,0)=v_{1m}=\sum_{j=1}^m\dot h_{jm}(0)\omega_j=\sum_{j=1}^m(v_1,\omega_j)\omega_j\to v_1$$

在 H 中强收敛.

由常微分方程理论知,存在 $t_j>0$,使得方程组(10)和(11)在相应的初始条件下,在 $[0,T]$ $(T=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{t_j\})$ 上存在解 $\{g_{jm}(t),h_{jm}(t)\}$,从而可得近似解 $\{u_m(x,t),v_m(x,t)\}$.

(10)式乘 $2\dot g_{jm}(t)$,(11)式乘 $2\dot h_{jm}(t)$,并且对 j 求和后得

$$\begin{cases}(\ddot u_m,2\dot u_m)+(A^2u_m,2\dot u_m)+M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u_m|^2+\\ \quad|A^{\frac{\alpha}{2}}v_m|^2)(A^{\alpha}u_m,2\dot u_m)+N(|A^{\beta}u_m|^2)\cdot\\ \quad(A^{\beta}\dot u_m,2\dot u_m)=(f,2\dot u_m)\\ (\ddot v_m,2\dot v_m)+(A^2v_m,2\dot v_m)+M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u_m|^2+\\ \quad|A^{\frac{\alpha}{2}}v_m|^2)(A^{\alpha}v_m,2\dot v_m)+N(|A^{\beta}v_m|^2)\cdot\\ \quad(A^{\beta}\dot v_m,2\dot v_m)=(g,2\dot v_m)\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}|\dot u_m|^2+\dfrac{d}{dt}|Au_m|^2+M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u_m|^2+|A^{\frac{\alpha}{2}}v_m|^2)\dfrac{d}{dt}|A^{\frac{\alpha}{2}}u_m|^2+2N(|A^{\beta}u_m|^2)\cdot|A^{\frac{\beta}{2}}\dot u_m|^2=(f,2\dot u_m) & (12)\\ \dfrac{d}{dt}|\dot v_m|^2+\dfrac{d}{dt}|Av_m|^2+M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u_m|^2+|A^{\frac{\alpha}{2}}v_m|^2)\dfrac{d}{dt}|A^{\frac{\alpha}{2}}v_m|^2+2N(|A^{\beta}v_m|^2)\cdot|A^{\beta}\dot v_m|^2=(g,2\dot v_m) & (13)\end{cases}$$

对(12),(13)两式分别从 0 到 t 积分并相加得

$$|\dot u_m(t)|^2+|Au_m(t)|^2+|\dot v_m(t)|^2+|Av_m(t)|^2+|2\int_0^t N(|A^{\beta}u_m(\tau)|^2)|A^{\frac{\beta}{2}}\dot u_m(\tau)|^2)d\tau+2\int_0^t N(|A^{\beta}v_m(\tau)|^2)|A^{\frac{\beta}{2}}\dot v_m(\tau)|^2)d\tau+\int_0^t M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u_m(\tau)|^2)|A^{\frac{\alpha}{2}}v_m(\tau)|^2)\cdot\frac{d}{dt}(|A^{\frac{\alpha}{2}}u_m(\tau)|^2+|A^{\frac{\alpha}{2}}v_m(\tau)|^2)d\tau=2\int_0^t(f(\tau),\dot u_m(\tau))d\tau+|\dot u_m(0)|^2+2\int_0^t(g(\tau),\dot v_m(\tau))d\tau+|\dot v_m(0)|^2+|Au_m(0)|^2+|Av_m(0)|^2$$

记 $\hat F(s)=\int_0^s F(\tau)d\tau$,由 $N(z)\geqslant n_0$ 则上式可化为

$$|\dot u_m(t)|^2+|\dot v_m(t)|^2+|Au_m(t)|^2+|Av_m(t)|^2+2n_0\int_0^t|A^{\frac{\beta}{2}}\dot u_m(\tau)|^2)d\tau+2n_0\int_0^t|A^{\frac{\beta}{2}}\dot v_m(\tau)|^2)d\tau+\hat M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u_m(t)|^2)+|A^{\frac{\alpha}{2}}v_m(t)|^2)\leqslant|\dot u_m(0)|^2+|\dot v_m(0)|^2+|Au_m(0)|^2+|Av_m(0)|^2+\int_0^t|\dot u_m(\tau)|^2d\tau+\int_0^t|\dot v_m(\tau)|^2d\tau+\int_0^t(|f(\tau)|^2+|g(\tau)|^2)d\tau+\hat M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u_m(0)|^2+|A^{\frac{\alpha}{2}}v_m(0)|^2)$$

类似于文献[1]由 Gronwall 不等式可得

$$\begin{cases}|\dot u_m(t)|^2\leqslant C,\ |\dot v_m(t)|^2\leqslant C\\ |Au_m(t)|^2\leqslant C,\ |Av_m(t)|^2\leqslant C\\ |A^{\frac{\alpha}{2}}u_m(t)|^2\leqslant C,\ |A^{\frac{\alpha}{2}}v_m(t)|^2\leqslant C\end{cases}\tag{14}$$

且容易得出

$$\begin{cases}\int_0^t|A^{\frac{\beta}{2}}\dot u_m(\tau)|^2d\tau\leqslant C,\\ \int_0^t|A^{\frac{\beta}{2}}\dot v_m(\tau)|^2d\tau\leqslant C\end{cases}\tag{15}$$

其中 C 表示与 m,t 无关的正常数,且在不同的地方表示不同的值.

(8),(9)两式中分别取 $\varphi=A^{\beta}u_m(t)$,$\varphi=A^{\beta}v_m(t)$,可得

$$\begin{cases}(\ddot u_m,A^{\beta}u_m)+(A^2u_m,A^{\beta}u_m)+M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u_m|^2+|A^{\frac{\alpha}{2}}v_m|^2)(A^{\alpha}u_m,A^{\beta}u_m)+N(|A^{\beta}u_m|^2)\cdot(A^{\beta}\dot u_m,A^{\beta}u_m)=(f,A^{\beta}u_m) & (16)\\ (\ddot v_m,A^{\beta}v_m)+(A^2v_m,A^{\beta}v_m)+M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u_m|^2+|A^{\frac{\alpha}{2}}v_m|^2)(A^{\alpha}v_m,A^{\beta}v_m)+N(|A^{\beta}v_m|^2)\cdot(A^{\beta}\dot v_m,A^{\beta}v_m)=(g,A^{\beta}v_m) & (17)\end{cases}$$

将(16),(17)分别从 0 到 t 积分,并将两式相加得

$$|\dot u_m(t),A^{\beta}u_m(t))-(\dot u_m(0),A^{\beta}u_m(0))-\int_0^t|A^{\frac{\beta}{2}}\dot u_m(\tau)|^2d\tau+(\dot v_m(t),A^{\beta}v_m(t))-(\dot v_m(0),A^{\beta}v_m(0))-\int_0^t|A^{\frac{\beta}{2}}\dot v_m(\tau)|^2)d\tau+\int_0^t M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u_m(\tau)|^2)+|A^{\frac{\alpha}{2}}v_m(\tau)|^2)\cdot(|A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}u_m(\tau)|^2+|A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}v_m(\tau)|^2)d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t N(|A^{\beta}u_m(\tau)|^2)\frac{d}{dt}|A^{\beta}u_m(\tau)|^2d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t N(|A^{\beta}v_m(\tau)|^2)\frac{d}{dt}|A^{\beta}v_m(\tau)|^2d\tau+\int_0^t|A^{1+\frac{\beta}{2}}u_m(\tau)|^2d\tau+\int_0^t|A^{1+\frac{\beta}{2}}v_m(\tau)|^2d\tau=\int_0^t(f(\tau),A^{\beta}u_m(\tau))d\tau+\int_0^t(g(\tau),A^{\beta}v_m(\tau))d\tau$$

所以

$$\int_0^t M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u_m(\tau)|^2)+|A^{\frac{\alpha}{2}}v_m(\tau)|^2)\cdot(|A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}u_m(\tau)|^2+|A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}v_m(\tau)|^2)d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t N(|A^{\beta}u_m(\tau)|^2)\frac{d}{dt}|A^{\beta}u_m(\tau)|^2d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t N(|A^{\beta}v_m(\tau)|^2)\frac{d}{dt}|A^{\beta}v_m(\tau)|^2d\tau+\int_0^t|A^{1+\frac{\beta}{2}}u_m(\tau)|^2d\tau+\int_0^t|A^{1+\frac{\beta}{2}}v_m(\tau)|^2d\tau=-(\dot u_m(t),A^{\beta}u_m(t))+(\dot u_m(0),A^{\beta}u_m(0))-(\dot v_m(t),A^{\beta}v_m(t))+(\dot v_m(0),A^{\beta}v_m(0))+$$

$$\int_0^t |A^{\frac{\beta}{2}}\dot{u}_m(\tau)|^2 d\tau + \int_0^t |A^{\frac{\beta}{2}}\dot{v}_m(\tau)|^2 d\tau +$$

$$\int_0^t (f(\tau), A^\beta u_m(\tau)) d\tau + \int_0^t (g(\tau), A^\beta v_m(\tau)) d\tau$$

因 $M(z) \geqslant m_0, N(z) \geqslant n_0$,所以

$$m_0\int_0^t (|A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}u_m(\tau)|^2 + |A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}v_m(\tau)|^2) d\tau +$$

$$\int_0^t |A^{1+\frac{\beta}{2}}u_m(\tau)|^2 d\tau + \int_0^t |A^{1+\frac{\beta}{2}}v_m(\tau)|^2 d\tau +$$

$$\frac{n_0}{2}(|A^\beta u_m(t)|^2 + |A^\beta v_m(t)|^2) \leqslant$$

$$|\dot{u}_m(0), A^\beta u_m(0))| + |-\dot{u}_m(t), A^\beta u_m(t))| +$$

$$|\dot{v}_m(0), A^\beta v_m(0))| + |-\dot{v}_m(t), A^\beta v_m(t))| +$$

$$\int_0^t |A^{\frac{\beta}{2}}\dot{u}_m(\tau)|^2 d\tau + \int_0^t |A^{\frac{\beta}{2}}\dot{v}_m(\tau)|^2 d\tau +$$

$$\int_0^t |f(\tau)|\,|A^\beta u_m(\tau)| d\tau +$$

$$\int_0^t |g(\tau)|\,|A^\beta v_m(\tau)| d\tau +$$

$$\frac{n_0}{2}(|A^\beta u_m(0)|^2 + |A^\beta v_m(0)|^2)$$

即

$$m_0\int_0^t (|A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}u_m(\tau)|^2 + |A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}v_m(\tau)|^2) d\tau +$$

$$\int_0^t |A^{1+\frac{\beta}{2}}u_m(\tau)|^2 d\tau + \int_0^t |A^{1+\frac{\beta}{2}}v_m(\tau)|^2 d\tau +$$

$$\frac{n_0}{2}(|A^\beta u_m(t)|^2 + |A^\beta v_m(t)|^2) \leqslant$$

$$\frac{1}{2}[\,|\dot{u}_m(t)|^2 + |\dot{v}_m(t)|^2 +$$

$$n_0(|A^\beta u_m(0)|^2 + |A^\beta v_m(0)|^2) +$$

$$\int_0^t |f(\tau)|^2 d\tau + \int_0^t |g(\tau)|^2 d\tau +$$

$$\frac{1}{2}(|A^\beta u_m(t)|^2 + |A^\beta v_m(t)|^2 +$$

$$\int_0^t |A^\beta u_m(\tau)|^2 d\tau + \int_0^t |A^\beta v_m(\tau)|^2 d\tau +$$

$$\int_0^t |A^{\frac{\beta}{2}}\dot{u}_m(\tau)|^2 d\tau + \int_0^t |A^{\frac{\beta}{2}}\dot{v}_m(\tau)|^2 d\tau +$$

$$|(\dot{u}_m(0), A^\beta u_m(0))| + |(\dot{v}_m(0), A^\beta v_m(0))|$$

所以

$$\frac{n_0}{2}(|A^\beta u_m(t)|^2 + |A^\beta v_m(t)|^2) \leqslant C +$$

$$\frac{1}{2}(|A^\beta u_m(t)|^2 + \int_0^t |A^\beta u_m(\tau)|^2 d\tau +$$

$$|A^\beta v_m(t)|^2 + \int_0^t |A^\beta v_m(\tau)|^2 d\tau)$$

对上式应用 Gronwall 不等式得

$$|A^\beta u_m(t)|^2 \leqslant C, |A^\beta v_m(t)|^2 \leqslant C \tag{18}$$

且

$$\int_0^t (|A^{1+\frac{\beta}{2}}u_m(\tau)|^2 d\tau \leqslant C;$$

$$\int_0^t (|A^{1+\frac{\beta}{2}}v_m(\tau)|^2 d\tau \leqslant C;$$

$$\int_0^t (|A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}u_m(\tau)|^2 d\tau \leqslant C;$$

$$\int_0^t (|A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}v_m(\tau)|^2 d\tau \leqslant C \tag{19}$$

由(15),(19)知 $\{u_m\},\{v_m\} \in L^2(0,T;D(A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}))$,$\{\dot{u}_m\},\{\dot{v}_m\} \in L^2(0,T;D(A^{\frac{\beta}{2}}))$,由 Aubin-Lions[5] 的紧性理论知,分别存在 $\{u_m\},\{v_m\}$ 的子序列 $\{u_\mu\},\{v_\mu\}$ 及函数 u,v 使得 $\{u_\mu\},\{v_\mu\}$ 在 $L^2(0,T;D(A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}))$ 中分别弱收敛于 u,v;$\{\dot{u}_\mu\},\{\dot{v}_\mu\}$ 在 $L^2(0,T;D(A^{\frac{\beta}{2}}))$ 中分别弱收敛于也 $\dot{u},\dot{v}$.

由(14),(18)知 $\{u_m\},\{v_m\} \in L^\infty(0,T;V\cap D(A^\beta))$,$\{\dot{u}_m\}\{\dot{v}_m\} \in L^\infty(0,T;H)$,因为可分的赋范线性空间的一致有界泛函序列必可取出一个弱 * 收敛的子序列($\{u_m\},\{v_m\}$ 的子序列记为 $\{u_\mu\},\{v_\mu\}$),使得 $\{u_\mu\},\{v_\mu\}$)在 $L^\infty(0,T);V\cap D(A^\beta))$ 中分别弱 * 收敛于 χ,η;$\{\dot{u}_\mu\},\{\dot{v}_\mu\}$ 在 $L^\infty(0,T;H)$ 中分别弱 * 收敛于 $\tilde{\chi},\tilde{\eta}$,由引理 2 得 $\tilde{\chi}=\dot{\chi},\tilde{\eta}=\dot{\eta}$ 在 $L^\infty(0,T;H)$ 中成立.

进一步可证 $\chi=u,\eta=v$ 在 $L^\infty(0,T;V\cap D(A^\beta))\cap L^2(0,T;D(A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}))$ 中成立;$\tilde{\chi}=\dot{u},\tilde{\eta}=\dot{v}$ 在 $L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;D(A^{\frac{\beta}{2}}))$ 中成立.

现在固定 j,取 $\mu>j$,可证得

$$\frac{d}{dt}(\dot{u}_\mu,\omega_j) \to \frac{d}{dt}(\dot{u},\omega_j)$$

在 $D'(0,T)$ 中收敛;

$$\frac{d}{dt}(\dot{v}_\mu,\omega_j) \to \frac{d}{dt}(\dot{v},\omega_j)$$

在 $D'(0,T)$ 中收敛;

$$(A^2u_\mu,\omega_j) \to (A^2u,\omega_j)$$

在 $L^\infty(0,T)$ 中弱 * 收敛;

$$(A^2v_\mu,\omega_j) \to (A^2v,\omega_j)$$

在 $L^\infty(0,T)$ 中弱 * 收敛;

$$M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u_\mu|^2 + |A^{\frac{\alpha}{2}}v_\mu|^2)(A^\alpha u_\mu,\omega_j) \to$$

$$M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u|^2 + |A^{\frac{\alpha}{2}}v|^2)(A^\alpha u,\omega_j)$$

在 $L^\infty(0,T)$ 中弱半收敛;

$$M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u_\mu|^2+|A^{\frac{\alpha}{2}}v_\mu|^2)(A^\alpha v_\mu,\omega_j)\to M(|A^{\frac{\alpha}{2}}u|^2+|A^{\frac{\alpha}{2}}v|^2)(A^\alpha v,\omega_j)$$

在 $L^\infty(0,T)$ 中弱半收敛;

$$N(|A^\beta u_\mu|^2)(A^\beta \dot{u}_\mu,\omega_j)\to N(|A^\beta u|^2)(A^\beta \dot{u},\omega_j)$$

在 $L^\infty(0,T)$ 中弱 * 收敛;

$$N(|A^\beta v_\mu|^2)(A^\beta \dot{v}_\mu,\omega_j)\to N(|A^\beta v|^2)(A^\beta \dot{v},\omega_j)$$

在 $L^\infty(0,T)$ 中弱 * 收敛.

令 $\mu\to\infty$,则 $m\to\infty$,再由基 $\{\omega_j\}$ 在 V 中的稠密性,故 $\forall\varphi\in V$,当 $\sum_{j=1}^{m}c_j\omega_j\to\varphi$ 时,(u,v) 在 $D'(0,T)$ 中满足方程(4),所以问题(1),(2)的弱解存在.

再证定理中的弱解满足初始条件(5),引入连续函数空间

$$C_T^1[0,T]=\{\varphi\in C^1[0,T];\ \varphi(T)=\varphi'(T)=0\}$$

作 $\psi=\sum_{j=1}^{k}\varphi_j\omega_j$, $\forall\varphi_j\in C_T^1[0,T]$,有 $\psi(T)=0$, $\psi'(T)=0$,对 $\int_0^T(\ddot{u}_m,\psi)dt$ 和 $\int_0^T(\ddot{u},\psi)dt$ 分别利用分部积分,可证得 $\dot{u}(0)=u_1$,同理有 $\dot{v}(0)=v_1$;再对 $\int_0^T(\dot{u}_m,\dot{\psi})dt$ 和 $\int_0^T(\dot{u},\dot{\psi})dt$ 利用分部积分,可证得 $u(0)=u_0$,同理可证得 $v(0)=v_0$,定理证毕.

3　结论

本文研究了一类抽象耦合非线性梁方程组在 Hilbert 空间中的初值问题,并证明了方程组的整体弱解的存在性和解的收敛性.

参　考　文　献

1　Pedro Pablo Durand Lazo. Global solutions for a nonlinear wave equation. *Applied Mathematics and Computation*, 2008,(200):596~601

2　李润民,张建文. 一类抽象非线性梁方程的整体解. 太原理工大学学报,2010,41(4):449~452 (Li R M,Zhang J W. The global solution for an abstract nonlinear beam equation. *Journal of Taiyuan*, *University of Technology*, 2010,41(4):449~452 (in Chinese))

3　张建文,丁霞霞. 一类耦合非线性方程组的整体解. 数学的实践与认识,2011,41(13):202~207 (Zhang J W, Ding X X. The global solution for a coupled nonlinear equations. *Mathematics in Practice and Theory*, 2011, 41(13):202~207 (in Chinese))

4　Ball J M. Intial-boundary value problems for an extensible beam. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1973(42):61~88

5　Lions J L. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires. Dunod: Gauthier-Villars, Paris, 1969

THE GLOBAL SOLUTION FOR A CLASS COUPLED OF NONLINEAR ABSTRACT BEAM EQUATIONS *

Hao Xiaorong　Zhang Jianwen†

(*College of Mathematics*, *Taiyuan University of Technology*, *Taiyuan*　030024, *China*)

Abstract　This paper studied the abstract coupled nonlinear beam equations with initial conditions in a Hilbert space. Two equations were solved effectively by using Faedo-Galerkin method, the convergence was studied and the existence of the global weak solution for the nonlinear beam equations was proved.

Key words　nonlinear,　coupling,　beam equation,　global solution

Received 10 June 2014, revised 27 September 2014.

* The project supported by the Natural science Foudation of china(11172194)

† Corresponding author E-mail: zhangjianwen@ tyut. edu. cn