

# 基于 Duffing 振子的随机共振研究\*

赵志宏<sup>1†</sup> 杨绍普<sup>2</sup> 刘永强<sup>2</sup>

(1. 石家庄铁道大学信息科学与技术学院, 石家庄 050043) (2. 河北省交通安全与控制重点实验室, 石家庄 050043)

**摘要** 随机共振是非线性系统中的一种动力学现象. 本文对基于 Duffing 振子的随机共振现象进行研究, 研究了 Duffing 系统噪声强度与信噪比的关系, 不同频率正弦信号与信噪比的关系, 以及阻尼比参数对随机共振的影响. 研究表明, Duffing 系统的阻尼比参数对随机共振的影响非常重要, 阻尼比参数与输出信号信噪比之间存在着一种复杂的非线性关系, 并且会随着 Duffing 系统参数的改变而变化.

**关键词** 随机共振(SR), 杜芬振子, 信噪比, 双稳系统, 微弱信号

DOI: 10.6052/1672-6553-2014-029

## 引言

随机共振的思想是由 Benzi<sup>[1]</sup> 在 1981 年首次提出的. 在 Benzi 的模型中, 地球气候由一个双势阱函数表示, 其中一个极小值代表地球被大面积冰川覆盖时的气温. 地球对其轨道离心率的微小调节由一个微弱的周期力表示, 短期的气候波动, 如每年太阳辐射量的波动, 是由高斯噪声来模拟的. 按照 Benzi 的理论, 当噪声强度被调节到满足某一条件时, 则与其同步发生的气候在寒冷与温暖两种情况之间的跳跃行为, 将显著增强地球气候对于由于调节离心率而造成的微弱刺激的反应. 由于绝热近似理论的限制, 基于随机共振的方法通常只能检测频率很低的信号<sup>[2]</sup>.

随机共振作为一种非常有潜力的信息处理工具受到了研究者的普遍关注. 1995 年, Collins<sup>[3]</sup> 基于 Fitzhugh - Nagumo 神经网络提出了非周期随机共振的理论, 推广了随机共振的周期限制条件, 尝试了随机共振与信息理论新的结合. 目前, 除了在微弱信号检测得到广泛应用外, 随机共振在其它领域也得到了成功地应用, 包括语音识别<sup>[4]</sup>, 量子计算<sup>[5]</sup>, 图像复原<sup>[6]</sup>等.

随机共振模型一般包括 3 个基本要素<sup>[7]</sup>: (1) 微弱的输入信号; (2) 噪声; (3) 用于信号处理的非线性系统. 以有用信号与噪声的混合信号作为系

统输入, 经非线性系统处理以后得到输出信号. 目前, 用于随机共振的非线性系统模型研究最多的是基于双稳态的 Langevin 方程, 这方面出现了大量的研究成果. 相比而言, 基于其它非线性方程的随机共振研究还非常少, 李娟娟等<sup>[8]</sup>研究了基于 Lévy 噪声的 Duffing 系统的随机共振与相转移. Anishchenko<sup>[9]</sup>研究了具有混沌行为的离散动力系统随机共振现象. 本文研究基于高斯白噪声的 Duffing 系统的随机共振现象.

## 1 基于 Duffing 振子随机共振理论

一个由周期性信号  $s(t)$  和噪声信号  $n(t)$  驱动的 Duffing 振子方程为:

$$\ddot{x} + k\dot{x} - ax + bx^3 = s(t) + n(t) \quad (1)$$

其中参数  $k$  是阻尼比,  $-ax + bx^3$  项是非线性恢复力, 参数  $a$  与  $b$  是大于零的实数. 当  $s(t)$  为正弦信号时, 可表示为  $s(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$  的形式,  $A$  为幅值,  $f_0$  为频率.  $n(t) = \sqrt{2D}\xi(t)$  表示噪声强度为  $D$  的高斯白噪声, 其中  $\xi(t)$  为方差为 1、均值为 0 的高斯白噪声. 此时, Duffing 方程变为由正弦信号和高斯白噪声信号共同驱动, 方程变为:

$$\ddot{x} + k\dot{x} - ax + bx^3 = A\sin(2\pi f_0 t) + n(t) \quad (2)$$

文献[10]对上面形式的 Duffing 系统进行分析, 指出当无外加信号时, 系统势函数为  $U(x) = -$

$\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4$ , 因此, Duffing 系统是一个双稳系统. 在只有正弦信号  $A\sin(2\pi f_0 t)$  输入的情况下, 双稳系统存在一临界幅值  $A_c = \sqrt{4a^3/27b}$ . 当  $A < A_c$  时, 系统输出将在某一势阱附近进行局域的周期运动; 当  $A > A_c$  时, 系统输出会围绕着两个势阱作大范围的跃迁运动. 若正弦信号和噪声信号  $n(t)$  同时作用于系统, 即使  $A < A_c$ , 只要信号、噪声和系统达到协同作用, 噪声将产生积极作用, 使一部分噪声能量转移到信号身上, 从而信号能量得到增强, 系统输出会形成两个势阱间的大范围跃迁运动, 即系统达到随机共振.

随机共振的一个应用是微弱信号检测. 假设

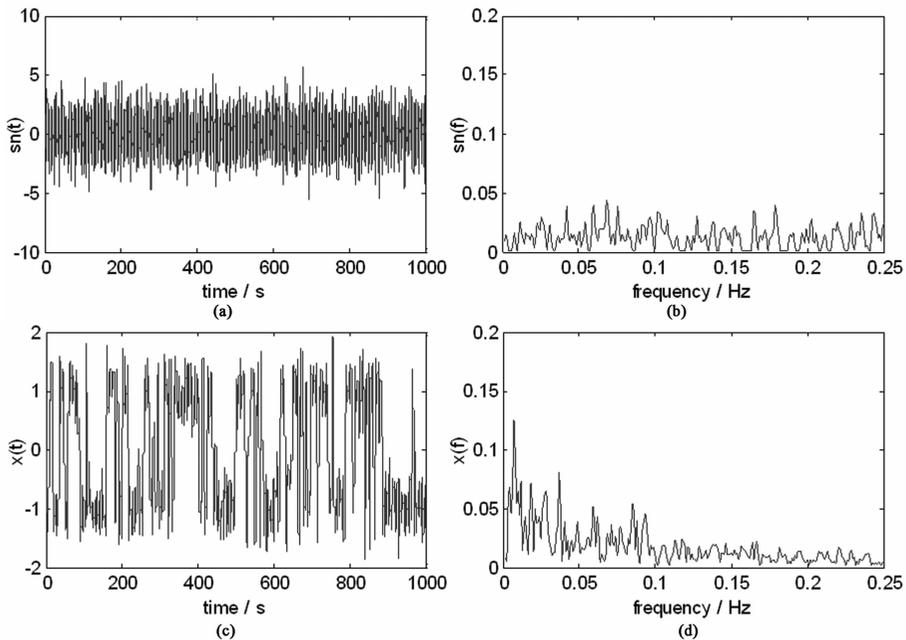


图1 基于 Duffing 振子的随机共振 (a) 输入信号时域波形; (b) 输入信号频谱; (c) 输出信号时域波形; (d) 输出信号频谱

Fig. 1 Stochastic resonance based on Duffing oscillator (a) time waveform of input signal (b) frequency of input signal (c) time waveform of output signal (d) frequency of output signal

## 2 仿真实验

衡量随机共振的一个非常重要的指标是输出信号的信噪比, 这里主要研究输出信号信噪比与噪声强度, 正弦信号频率以及阻尼比参数  $k$  的关系.

### 2.1 噪声强度与输出信号信噪比的关系

保持 Duffing 方程(2)中其它参数的值不变, 改变噪声强度的值, 研究噪声强度对输出信号信噪比的影响. Duffing 方程中各参数的取值为  $k = 0.5$ ,  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $A = 0.1$ ,  $f_0 = 0.03$ . 噪声强度  $D$  的取值为  $0.02 - 2$ . 输出信号信噪比与噪声强度的变化规律

正弦信号为待测微弱信号  $A\sin(2\pi f_0 t)$  时,  $n(t)$  为背景噪声, 当微弱正弦信号和噪声共同输入 Duffing 系统产生随机共振时, 在 Duffing 系统输出信号的频谱中, 在正弦信号的频率  $f_0$  处会有明显的峰值, 根据这一特征检测出噪声中的微弱正弦信号.

一个基于 Duffing 振子的随机共振如图 1 所示, 其中 Duffing 方程的各参数为:  $k = 0.5$ ,  $a = 1$ ,  $b = 1$ , 正弦信号幅值为  $0.12$ , 频率为  $0.01\text{Hz}$ , 噪声强度  $D = 0.99$ , 采用 Runge - Kutta 法对 Duffing 方程进行数值求解. 从图 1 可以看出, 在噪声强度  $D = 0.99$  时系统出现了随机共振现象, 输出信号的频谱在正弦信号频率  $f_0$  处谱值最大, 并且比输入信号频谱  $f_0$  处的值大了许多.

如图 2 所示. 从图 2 可以看到, 含噪声正弦信号经过 Duffing 系统后, 输出信号的信噪比与噪声强度之间存在着非线性的关系, 总的来说, 开始信噪比随着噪声强度的增加而增加, 当达到某一个值后随噪声强度的增加而减少, 但并不是严格地增加或减少. 信噪比在某个噪声强度值时达到最优, 这是随机共振的典型特征.

图 3 是噪声强度  $D$  取不同值时得到的 Duffing 系统相图, 其中噪声强度  $D$  的取值依次为  $0.1, 0.5, 1, 2$ . 从图 3 中可以发现, 当  $D$  取值很小时, 例如  $D = 0.1$ , Duffing 系统输出主要在某个势阱中运动.

当噪声强度  $D$  大于某个值时, Duffing 系统输出在两个势阱中运动, 并且, 噪声强度  $D$  的取值越大, Duffing 系统相图的轨迹越复杂.

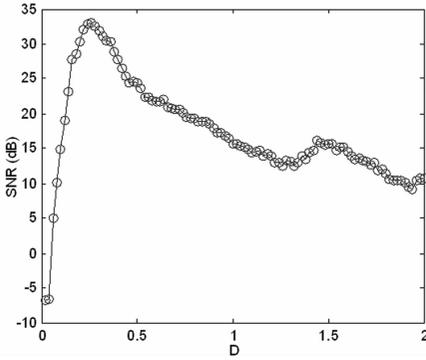


图2 输出信号信噪比随噪声强度的变化规律

Fig.2 The relation between output SNR and noise strength

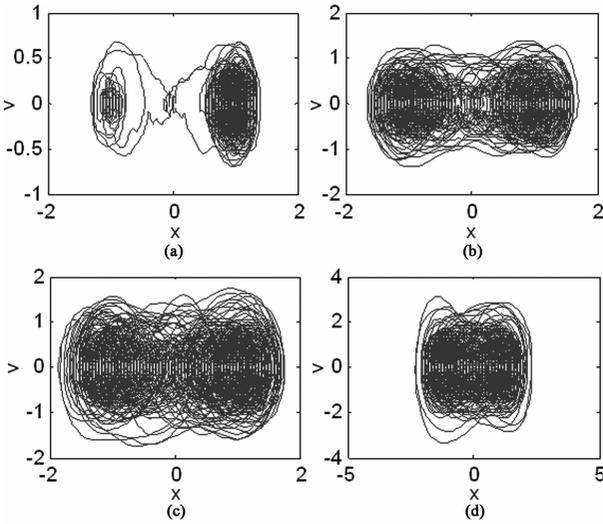


图3 不同噪声强度  $D$  得到的相图

(a)  $D=0.1$ ; (b)  $D=0.5$ ; (c)  $D=1$ ; (d)  $D=2$

Fig.3 The phase diagram of the system with different noise strength

(a)  $D=0.1$ ; (b)  $D=0.5$ ; (c)  $D=1$ ; (d)  $D=2$

### 2.2 正弦信号频率与输出信号信噪比的关系

研究 Duffing 系统对不同频率微弱正弦信号的检测效果. Duffing 方程参数的取值为  $k=0.5, a=1, b=1, A=0.12, f_0=0.03, D=0.99$ . 不同频率正弦信号经过 Duffing 系统后得到的信噪比如图 4 所示. 从图 4 可以看到 Duffing 系统对低频正弦信号得到的输出信号信噪比较高. 另外, 如果将 Duffing 系统用于微弱正弦信号检测, 有一个适用的检测频率范围.

### 2.3 阻尼比参数 $k$ 对随机共振的影响

与用于随机共振的 Langevin 方程相比, Duffing

方程增加了一项阻尼比  $k$ , 阻尼比参数  $k$  的引入, 使得 Duffing 系统表现出现了更丰富的非线性动力学行为, 这里研究阻尼比参数  $k$  对随机共振的影响.

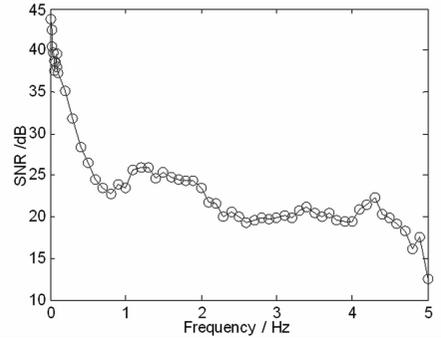


图4 不同频率正弦信号经过 Duffing 系统得到的信噪比

Fig.4 The output SNR of the Duffing system with the different frequency of the sine signal

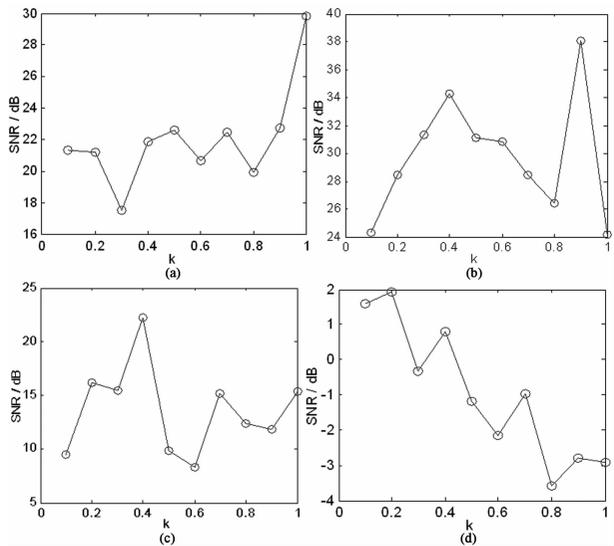


图5 阻尼比  $k$  与信噪比的关系 (a)  $a=1, b=1$ ; (b)  $a=0.5, b=1$ ;

(c)  $a=1, b=0.5$ ; (d)  $a=1, b=-1$

Fig.5 The relation between the damping ratio and the output SNR

(a)  $a=1, b=1$ ; (b)  $a=0.5, b=1$ ;

(c)  $a=1, b=0.5$ ; (d)  $a=1, b=-1$

保持正弦信号和噪声信号不变, 研究在不同 Duffing 系统参数  $a, b$  取值的情况下, 阻尼比参数  $k$  值的改变对随机共振的影响. 正弦信号的频率  $f_0$  为  $0.03\text{Hz}$ , 幅值  $A$  为  $0.12$ , 高斯白噪声信号的强度  $D$  为  $0.75$ . Duffing 系统参数  $a, b$  取 4 组不同的值, (1)  $a=1, b=1$ ; (2)  $a=0.5, b=1$ ; (3)  $a=1, b=0.5$ ; (4)  $a=1, b=-1$ . 阻尼比  $k$  的取值与信噪比的关系如图 5 所示. 从图 5 可以看到, (1) 随着系统参数  $a, b$  取值的改变, 阻尼比  $k$  与输出信号信噪比的关系也不相同. (2) 阻尼比参数  $k$  与输出信号信噪比

之间是一个复杂的非线性关系,(3) 阻尼比  $k$  的取值对输出信号信噪比的影响非常大,针对不同参数  $a, b$  取值的 Duffing 系统,应该根据系统参数的值慎重选择阻尼比  $k$  的值.

进一步研究阻尼比  $k = 0.1, 0.2, 0.5, 0.8$  的情况下 Duffing 系统的相图. 得到的典型 Duffing 系统相图如图 6 所示. 其中  $a = 1, b = 1$ . 从图 6 可以看出,总体而言,随着阻尼比参数  $k$  值的增加, Duffing 系统相图的轨迹范围缩小.

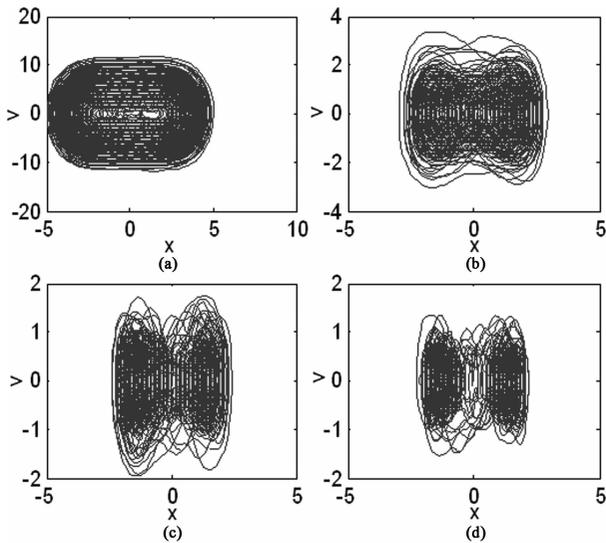


图6 阻尼比  $k$  不同取值得到的相图

(a)  $k=0.1$ ; (b)  $k=0.2$ ; (c)  $k=0.5$ ; (d)  $k=0.8$

Fig. 6 The phase diagram of the Duffing system with different  $k$

(a)  $k=0.1$ ; (b)  $k=0.2$ ; (c)  $k=0.5$ ; (d)  $k=0.8$

### 3 结论与展望

本文对基于 Duffing 振子的随机共振进行了研究,建立了基于正弦信号与高斯白噪声的 Duffing 方程随机共振模型. 研究了噪声强度与输出信号信噪比的关系,正弦信号频率与输出信号信噪比的关系,以及阻尼比参数  $k$  对随机共振的影响. 经过仿真信号实验结果表明,阻尼比参数  $k$  对随机共振的影响非常重要,阻尼比与输出信号信噪比之间存在着一种复杂的非线性关系. 设计并实现一个实用的基于 Duffing 系统的随机共振系统是下一步要研究的内容.

### 参 考 文 献

- Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1981, 14: 453 ~ 457
- 胡岗. 随机力与非线性系统. 上海: 上海科技教育出版社, 1994 (Hu G. Stochastic force and nonlinear system. Shanghai: Shanghai Science and Technology Education Press, 1994 (in Chinese))
- Collins J J, Chow C C, Imhoff T T. Aperiodic stochastic resonance in excitable systems. *Physical Review E*, 1995, 52: 3321 ~ 3324
- Moskowitz M T, Dickinson B W. Stochastic resonance in speech recognition: differentiating between /b/ and /v/. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems* 3, 2002, 855 - 858
- Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F. Stochastic resonance: a remarkable idea that changed our perception of noise. *European Physical Journal B*, 2009, 69 (1): 1 ~ 3
- 龚振宇, 庞全, 范影乐. 自适应随机共振的图像复原研究. *计算机工程与科学*, 2009, 31(5): 46 ~ 48 (Gong Z Y, Pang Q, Fan Y L. The image restoration research by auto-adapted stochastic resonating. *Computer Engineering & Science*, 2009, 31(5): 46 ~ 48 (in Chinese))
- 胡鸢庆. 随机共振微弱特征信号检测理论与方法. 北京: 国防工业出版社, 2012 (Hu N Q. Theory and method of weak characteristic signal detection based on stochastic resonance. Beijing: National Defense Industry Press, 2012 (in Chinese))
- 李娟娟, 许勇, 冯晶. Duffing 系统中 Lévy 噪声诱导的随机共振与相转移. *动力学与控制学报*, 2012, 03: 278 ~ 282 (Li J J, Xu Y, Feng J. Levy noise induced stochastic resonance and phase transition in Duffing system. *Journal of Dynamics and Control*, 2012, 03: 278 ~ 282 (in Chinese))
- Anishchenko V S, Neiman A B, Safanova M A. Stochastic resonance in chaotic systems. *Journal of Statistical Physics*, 1993, 70(1-2): 183 ~ 196
- 冷永刚, 赖志慧, 范胜波等. 二维 Duffing 振子的大参数随机共振及微弱信号检测研究. *物理学报*, 2012, 61(23): 1 ~ 10 (Leng Y G, Lai Z H, Fan S B, et al. Large parameter stochastic resonance of two-dimensional Duffing oscillator and its application on weak signal detection. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(23): 1 ~ 10 (in Chinese))

# STUDY OF STOCHASTIC RESONANCE BASED ON DUFFING OSCILLATOR \*

Zhao Zhihong<sup>1†</sup> Yang Shaopu<sup>2</sup> Liu Yongqiang<sup>2</sup>

(1. *School of Computing and Informatics, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China*)

(2. *Key Laboratory of Traffic Safety and Control of Hebei Province, Shijiazhuang 050043, China*)

**Abstract** Stochastic resonance is a kind of nonlinear phenomenon, which can enhance the weak input signal through the nonlinear system. This paper investigated the phenomenon of stochastic resonance for duffing oscillator. Following experiments were studied: the relation between the output SNR with the noise strength, the relation between the output SNR of the Duffing system with the different frequency of the sine signal, and the relation between the output SNR with the damping ratio. The experimental results show that the damping ratio parameter has an important role in the stochastic resonance and there exist a complex nonlinear relationship between the damping ratio parameter with the output SNR.

**Key words** stochastic resonance (SR), Duffing oscillator, signal to noise ratio, bi-stable system, weak signal

---

Received 6 July 2013, revised 6 December 2013.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11172182, 11227201, 11202141), Natural Science Foundation of Hebei Province(A2013210013)

† Corresponding author E-mail:hb\_zhaozhihong@126.com