

锥齿轮传动系统的非线性动力学行为*

李明[†] 阿梅

(西安科技大学力学系, 西安 710054)

摘要 主要研究了锥齿轮传动转子系统的非线性动力学行为. 在滑动轴承或挤压油膜阻尼器中, 油膜力是齿轮传动转子系统非线性的一个重要来源, 并且与轴承的结构参数、转子的转速和作用力等多个因素有关. 首先在刚性转子、齿轮不脱啮等假设条件下, 考虑了锥齿轮间的广义位移约束关系, 建立在非线性油膜力作用下锥齿轮传动的多转子耦合系统动力学模型. 由于油膜力具有强非线性特性, 因此采用数值分析方法, 结合系统的稳态响应、Poincaré映射和分叉图等多种手段分析系统的动力学行为. 通过初步研究得到如下结论: 对于不平衡锥齿轮传动的转子系统, 在低转速时转子轴心的运动与转速同步; 随着转速的增加系统出现2倍周期运动等复杂的分叉现象. 这些振动特征可以为这类系统的动力学设计、结构参数优化和运动状态监测等提供必要的理论依据.

关键词 锥齿轮, 转子-轴承系统, 非线性油膜力, 非线性动力学

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-066

引言

锥齿轮耦合的转子系统是一种非常重要的传动系统, 常被用于在某些空间布置受到限制和运动需变向的场合, 例如, 在直升机和车辆动力系统中锥齿轮传动占有十分重要的地位, 而且这类系统对振动标准有着极其严格的要求, 因此研究锥齿轮传动转子系统的非线性动力学特性对系统的动力学设计、制造和安装具有重要意义.

在滑动轴承或挤压油膜阻尼器支承的转子系统中, 油膜力是齿轮传动转子系统非线性的一个重要来源, 并且与轴承的结构参数、转子的转速和作用力等因素有关. 当系统的振幅较小时, 一般可以通过在转子的静平衡位置处将油膜力进行线性化处理, 但是当转子的转速突破线性临界转速后, 一般而言系统的振幅变化较大, 油膜力的线性化处理可能会产生较大的误差, 甚至影响到系统的动力学定性性态, 实践证明, 在某些参数下油膜轴承支承的转子系统会出现相当大的振动. 研究在非线性油膜力作用下锥齿轮传动系统的动力学行为, 一方面由于它有着广泛的工程应用背景; 另一方面, 它

着许多非线性转子动力学机理方面的问题值得深入的研究, 借此可以揭示一些现在尚未被人们认识的规律.

近年来, 国内外关于锥齿轮传动系统的动力学研究已做了一些研究工作, 例如, 在考虑了圆锥轮齿之间的广义啮合关系后, 本文作者^[1-2]分别研究直齿和螺旋齿锥齿轮耦合的转子-轴承系统的纵弯扭耦合的线性动力学特性; 在文献^[3]中, 我们讨论了具有油膜力轴承的锥齿轮传动转子系统的非线性动态特性, 分别从平衡点、极限环、稳态和分叉分析了系统在平衡和不平衡状态下的非线性动力学行为. 在计及了齿面侧隙和时变啮合刚度的因素后, 文献^[4]研究了一个具有弹性支承的弧齿锥齿轮传动系统非线性振动特性, 文献^[5]则主要讨论了斜交弧齿锥齿轮传动转子系统线性动力学问题, 分析了系统的固有特性和稳态响应和涡动轨迹等; 文献^[6]建立了弧齿锥齿轮多自由度非线性动力学模型, 重点讨论了时变摩擦因数对齿轮系统动力学特性的影响; 文献^[7]分析了具有非线性悬架特性的支承在滑动轴承和推力轴承上的锥齿轮传动转子系统动力学行为, 文献^[8]在考虑了轮齿的时变啮合刚

2013-02-22 收到第1稿, 2013-06-26 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11072190, 11372245)

[†] 通讯作者 E-mail: lim@xust.edu.cn

度、传动误差和间隙等因素后,建立了螺旋锥齿轮传动系统的非线性动力学模型.在现有有关滑动轴承支承的齿轮传动转子系统中,一般研究对象为平行轴齿轮传动系统^[9-11],例如,文献^[9]考虑了非线性悬浮作用和非线性齿轮啮合力等因素后,分析了滑动轴承支撑的齿轮副系统的动态特性.

与圆柱齿轮传动相比对锥齿轮传动转子系统的非线性动力学研究要少得多,而且在已有的研究中所涉及的数学模型也进行了非常多的简化.本文在文献[3]的基础上,同时考虑了四个滑动轴承支承的锥齿轮传动转子的运动,重点考察在具有非线性油膜力作用下系统的动力学建模以及相应的动力学行为,了解和掌握这类系统的动力学特性对相关系统的动力学设计提供理论依据.

1 系统的运动方程

本文的目的是研究在滑动轴承支承下锥齿轮传动转子系统的非线性动力学行为,为简化问题的讨论,同时又考虑到系统的复杂性、系统参数的多变和非线性问题的难度,特作如下假设:(1)转子为刚性,限制齿轮轴向运动的推力轴承支承简化为一线性弹簧;(2)转子系统运动时齿轮不脱啮,齿轮啮合刚度的时变部分按正弦变化.

1.1 运动方程

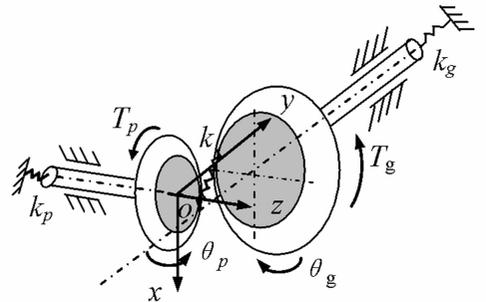
图1所示为一个简单的锥齿轮振动系统, (x, y, z) 为小齿轮质心坐标, θ_1 和 θ_2 分别表示二个齿轮的扭转角位移.

根据牛顿定律,小齿轮和大齿轮的运动微分方程可表示为:

$$\begin{aligned} m_p \ddot{x}_p &= F_{px} + k u \cos \alpha + m_p g + \\ & m_p e_p (i \Omega)^2 \cos i \Omega t \\ m_p \ddot{y}_p &= F_{py} - k u \sin \alpha \cos \delta_p + \\ & m_p e_p (i \Omega)^2 \sin i \Omega t \\ m_p \ddot{z}_p &= -k_{pa} z_p - k u \sin \alpha \sin \delta_p \\ m_g \ddot{x}_g &= F_{gx} - k u \cos \alpha + m_g g + \\ & m_g e_g \Omega^2 \cos(\Omega t + \gamma) \\ m_g \ddot{y}_g &= F_{gy} + k u \sin \alpha \cos \delta_g + \\ & m_g e_g \Omega^2 \sin(\Omega t + \gamma) \\ m_g \ddot{z}_g &= -k_{ga} z_g - k u \sin \alpha \sin \delta_g \\ J_p \ddot{\theta}_p &= T_p - r_{pb} k u \\ J_g \ddot{\theta}_g &= -T_g + r_{gb} k u \end{aligned} \quad (1)$$

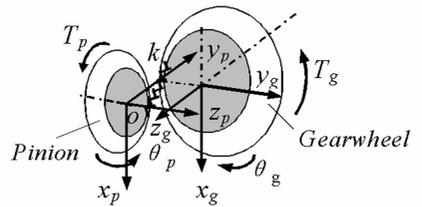
其中 $m_j (j = p, g)$ 为齿轮的质量; J_j 分别为齿轮的转动惯量; δ_j 为齿轮的圆锥角; α 为锥齿轮的压力角; r_{jb} 为齿轮的基圆半径; e_j 为质量偏心距; Ω 为转速; u 为齿间的相对位移, 本文设压缩变形为正; F_{jx}, F_{jy} 分别为作用于齿轮 x, y 方向上的外力; φ 为大齿轮与小齿轮质量偏心间的夹角; T_j 为作用于齿轮上的扭矩. 如果扭矩较小, 则 F_{jx}, F_{jy} 主要由径向滑动轴承油膜力组成. 当扭矩转向相反时, T_j 和 u 应取负值; k 为锥齿轮的啮合刚度, k_{ja} 为推力轴承的轴向刚度, i 为齿轮的传动比, n 是整数, 它可以等于齿轮的齿数或转子转速的整数倍, k 和 u 可以分别表示为:

$$k = k_m + k_a \sin n \Omega t \quad (2)$$



(a) 锥齿轮传动转子系统

(a) Bevel geared rotor system



(b) 广义坐标

(b) Generalized coordinates

图1 锥齿轮系统的动力学模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the dynamic model of Bevel geared rotor system

$$\begin{aligned} u &= r_{b1} \theta_p - x_p \cos \alpha + y_p \sin \alpha \cos \delta_p + z_p \sin \alpha \sin \delta_p - \\ & r_{b2} \theta_g + x_g \cos \alpha - y_g \sin \alpha \cos \delta_g + z_g \sin \alpha \sin \delta_g \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)实际上就是考虑了轮齿变形后,图1所示系统的约束方程.将(3)求导,再将(1)式代入(3)式可得:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \left(\frac{r_{pb} T_p}{J_p} + \frac{r_{gb} T_g}{J_g} \right) - \left(\frac{r_{pb}^2}{J_p} + \frac{r_{gb}^2}{J_g} + \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_g} \right) k u + \\ & \left(\frac{F_{gx}}{m_g} - \frac{F_{px}}{m_p} \right) \cos \alpha + \left(\frac{F_{py}}{m_p} \cos \delta_p - \frac{F_{gy}}{m_g} \cos \delta_g \right) \sin \alpha - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{k_{pa}z_p}{m_p}\sin\alpha\sin\delta_p - \frac{k_{ga}z_g}{m_g}\sin\alpha\sin\delta_g - \\ & e_p(i\Omega)^2\cos\alpha\cos i\Omega t + e_p(i\Omega)^2\sin\alpha\cos\delta_p\sin i\Omega t + \\ & e_g\Omega^2\cos\alpha\cos(\Omega t + \gamma) - e_g\Omega^2\sin\alpha\cos\delta_g\sin(\Omega t + \gamma) \end{aligned} \quad (4)$$

经整理简化后,由(1)和(4)可得:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= \frac{F_{px}}{m_p} + \frac{ku}{m_p}\cos\alpha + g + e_p(i\Omega)^2\cos i\Omega t \\ \dot{y}_p &= \frac{F_{py}}{m_p} - \frac{ku}{m_p}\sin\alpha\cos\delta_p + e_p(i\Omega)^2\sin i\Omega t \\ \dot{z}_p &= -\frac{k_{pa}z_p}{m_p} - \frac{ku}{m_p}\sin\alpha\sin\delta_p \\ \dot{x}_g &= \frac{F_{gx}}{m_g} - \frac{ku}{m_g}\cos\alpha + g + e_g\Omega^2\cos(\Omega t + \gamma) \\ \dot{y}_g &= \frac{F_{gy}}{m_g} + \frac{ku}{m_g}\sin\alpha\cos\delta_g + e_g\Omega^2\sin(\Omega t + \gamma) \\ \dot{z}_g &= -\frac{k_{ga}z_g}{m_g} - \frac{ku}{m_g}\sin\alpha\sin\delta_g \\ \ddot{u} &= \frac{F_e}{m_g} + \frac{F_b}{m_g} - \frac{k}{m_e}u - \frac{k_{pa}z_p}{m_p}\sin\alpha\sin\delta_p - \\ & \frac{k_{ga}z_g}{m_g}\sin\alpha\sin\delta_g - e_p(i\Omega)^2\cos\alpha\cos i\Omega t + \\ & e_p(i\Omega)^2\sin\alpha\cos\delta_p\sin i\Omega t + e_g\Omega^2\cos\alpha\cos(\Omega t + \gamma) - \\ & e_g\Omega^2\sin\alpha\cos\delta_g\sin(\Omega t + \gamma) \end{aligned} \quad (5)$$

其中:

$$\begin{aligned} m_e &= \left(\frac{r_{pb}^2}{J_p} + \frac{r_{gb}^2}{J_g} + \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_g} \right)^{-1} \\ F_e &= m_g \left(\frac{r_{pb}T_p}{J_p} + \frac{r_{gb}T_g}{J_g} \right) \\ F_b &= (F_{gx} - mF_{px})\cos\alpha + \\ & (mF_{py}\cos\delta_p - F_{gy}\cos\delta_g)\sin\alpha \end{aligned}$$

1.2 非线性油膜力

当外扰动较大或者研究线性失稳后转子轴心的运动时,则需要考虑油膜力与位移、速度之间的非线性关系.然而关于非线性油膜力作用下转子系统的动力学分析是一个十分复杂的流固耦合问题,如果不引入一些假设条件,即所谓的无限长轴承假设或无限短轴承假设,要求解出非线性油膜力的解析表达式是十分困难的.对于如图2所示的滑动油膜轴承,如果采用短轴承假设,其油膜压力 p 所满足的 Reynolds 方程可表示为:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} (\Omega - 2\dot{\varphi}) \frac{\partial h}{\partial \theta} + \varepsilon \cos\theta \quad (6)$$

式中 $h = c + \varepsilon \cos\theta = c(1 + \varepsilon \cos\theta)$ 为轴承的油膜厚度; e 和 φ 分别为轴颈的平衡位置; z 为轴承的轴向位置坐标; θ 为圆周方向位置坐标; μ 为润滑油粘度; R 为轴承半径; B 为轴承长度; Ω 为转子转速; c 为轴承径向间隙; ε 为轴颈偏心率.将油膜压力 p 沿轴承表面积分,并应用边界条件 $p|_{z=-B/2} = p|_{z=B/2} = 0$ 和半 Sommerfeld 条件,可以得到油膜力沿径向和切向两个方向的分量,它们分别为:

$$\begin{aligned} F_r &= 2\mu BR \left(\frac{R}{c} \right)^2 \left(\frac{B}{2R} \right)^2 \left[(\Omega - 2\frac{d\varphi}{dt}) G_1 + \right. \\ & \left. 2\frac{d\varepsilon}{dt} G_2 \right] \\ F_t &= 2\mu BR \left(\frac{R}{c} \right)^2 \left(\frac{B}{2R} \right)^2 \left[(\Omega - 2\frac{d\varphi}{dt}) G_3 + \right. \\ & \left. 2\frac{d\varepsilon}{dt} G_4 \right] \end{aligned} \quad (7)$$

其中:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}, \quad G_2 = \frac{\pi(1+2\varepsilon^2)}{2(1-\varepsilon^2)^{5/2}}, \\ G_3 &= \frac{\pi\varepsilon}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}}, \quad G_4 = \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \end{aligned}$$

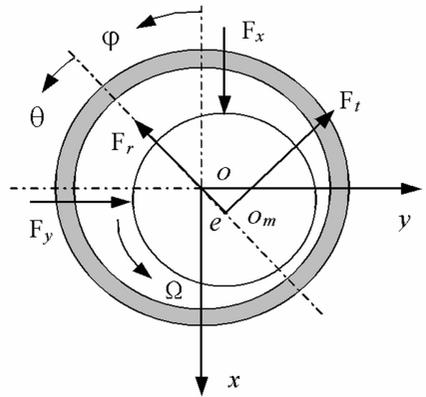


图2 油膜轴承示意图

Fig. 2 Schematic diagram of oil film bearing

将式(7)变换到 oxy 坐标系中,可得:

$$\begin{cases} F_x = -F_r\cos\varphi - F_t\sin\varphi \\ F_y = -F_r\sin\varphi + F_t\cos\varphi \end{cases} \quad (8)$$

其中:

$$\begin{aligned} \cos\phi &= \frac{x}{e}, \quad \sin\phi = \frac{y}{e}, \quad e = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{e^2}, \quad \frac{de}{dt} = \frac{x\dot{x} - y\dot{y}}{e} \end{aligned}$$

1.3 无量纲化

为使以下的分析具有更广泛的适用性,利用滑

动轴承的特征尺寸——轴承的间隙 c , 将式(5)无量纲化, 现引入无量纲量:

$$\begin{aligned} X_j &= x_j/c, Y_j = y_j/c, Z_j = z_j/c, U = u/c, \\ f_{jx} &= F_{jx}/m_g g, f_{jy} = F_{jy}/m_g g, f_e = F_e/m_g g, \\ f_b &= F_b/m_g g, f_{j'x} = F_{j'x}/m_g g, f_{j'y} = F_{j'y}/m_g g, \\ K &= kc/m_g g, K_{ja} = k_{ja}c/m_g g, \varepsilon_j = e_j/c, \\ m &= m_g/m_p, M = m_g/m_e, \tau = \Omega t, \omega = \Omega \sqrt{c/g} \end{aligned} \quad (9)$$

并记 $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $\frac{dx}{d\tau} = x'$, ... 则无量纲化后的运动方程为:

$$\begin{aligned} X_p'' &= \frac{m}{\omega^2} f_{px} + \frac{mKU}{\omega^2} \cos\alpha + \frac{1}{\omega^2} + i^2 \varepsilon_p \cos i\tau \\ Y_p'' &= \frac{m}{\omega^2} f_{py} - \frac{mKU}{\omega^2} \sin\alpha \cos\delta_p + i^2 \varepsilon_p \sin i\tau \\ Z_p'' &= -\frac{mK_{pa}Z_p}{\omega^2} - \frac{mKU}{\omega^2} \sin\alpha \sin\delta_p \\ X_g'' &= \frac{1}{\omega^2} f_{gx} - \frac{KU}{\omega^2} \cos\alpha + \frac{1}{\omega^2} + \varepsilon_g \cos(\tau + \gamma) \\ Y_g'' &= \frac{1}{\omega^2} f_{gy} + \frac{KU}{\omega^2} \sin\alpha \cos\delta_g + \varepsilon_g \sin(\tau + \gamma) \\ Z_g'' &= -\frac{K_{ga}Z_g}{\omega^2} - \frac{KU}{\omega^2} \sin\alpha \sin\delta_g \\ U'' &= \frac{1}{\omega^2} f_e + \frac{1}{\omega^2} f_b - \frac{MKU}{\omega^2} - \frac{mK_{pa}Z_p}{\omega^2} \sin\alpha \sin\delta_p - \\ &\quad \frac{K_{ga}Z_g}{\omega^2} \sin\alpha \sin\delta_g - i^2 \varepsilon_p \cos\alpha \cos i\tau + \\ &\quad i^2 \varepsilon_p \sin\alpha \cos\delta_p \sin i\tau + \varepsilon_g \cos\alpha \cos(\tau + \gamma) - \\ &\quad \varepsilon_g \sin\alpha \cos\delta_g \sin(\tau + \gamma) \end{aligned} \quad (10)$$

其中:

$$\begin{aligned} f_{jx} &= -f_{j'x} \cos\varphi - f_{j'y} \sin\varphi \\ f_{jy} &= -f_{j'y} \sin\varphi + f_{j'x} \cos\varphi \\ f_{j'x} &= \sigma \lambda^2 i \omega [1 - 2\varphi_p'] G_{p1} + 2\varepsilon_p' G_{p2}]/3 \\ f_{j'x} &= \sigma \lambda^2 i \omega [1 - 2\varphi_p'] G_{p3} + 2\varepsilon_p' G_{p4}]/3 \\ f_{j'x} &= \sigma \lambda^2 \omega [1 - 2\varphi_g'] G_{g1} + 2\varepsilon_g' G_{g2}]/3 \\ f_{j'x} &= \sigma \lambda^2 \omega [1 - 2\varphi_g'] G_{g3} + 2\varepsilon_g' G_{g4}]/3 \\ f_b &= (f_{gx} - mf_{px}) \cos\alpha + (mf_{py} \cos\delta_p - \\ &\quad f_{gy} \cos\delta_g) \sin\alpha \\ \sigma &= \frac{\bar{\sigma}}{m_g \sqrt{gc}} \end{aligned}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{6\mu BR^3}{c^2} \text{ 为 Sommerfeld 数, } \lambda = \frac{B}{2R} \text{ 为轴承的}$$

长径比.

上述运动方程同时考虑了一对齿轮的运动, 是对文献^[3]中动力学模型的推广. 其中, 参数 m 、 M 、 K 、 K_{pa} 、 K_{ga} 、 i 、 ε 、 ε_g 、 α 、 δ_p 、 δ_g 、 γ 和 σ 、 λ 、 ω 决定了系统的动力学特性, 因此锥齿轮传动转子系统的参数多变、情况复杂. 式(10)是一个非自治的强非线性微分方程组, 对于这类问题的讨论一般是在状态空间中进行的, 这样可以将二阶方程(10)写成一阶形式:

$$\begin{aligned} X_p' &= \bar{X}_p, Y_p' = \bar{Y}_p, Z_p' = \bar{Z}_p, \\ X_g' &= \bar{X}_g, Y_g' = \bar{Y}_g, \\ Z_g' &= \bar{Z}_g, U' = \bar{U} \\ \bar{X}_p' &= \frac{m}{\omega^2} f_{px} + \frac{mKU}{\omega^2} \cos\alpha + \frac{1}{\omega^2} + i^2 \varepsilon_p \cos i\tau \\ \bar{Y}_p' &= \frac{m}{\omega^2} f_{py} - \frac{mKU}{\omega^2} \sin\alpha \cos\delta_p + i^2 \varepsilon_p \sin i\tau \\ \bar{Z}_p' &= -\frac{mK_{pa}Z_p}{\omega^2} - \frac{mKU}{\omega^2} \sin\alpha \sin\delta_p \\ \bar{X}_g' &= \frac{1}{\omega^2} f_{gx} - \frac{KU}{\omega^2} \cos\alpha + \frac{1}{\omega^2} + \varepsilon_g \cos(\tau + \gamma) \\ \bar{Y}_g' &= \frac{1}{\omega^2} f_{gy} + \frac{KU}{\omega^2} \sin\alpha \cos\delta_g + \varepsilon_g \sin(\tau + \gamma) \\ \bar{Z}_g' &= -\frac{K_{ga}Z_g}{\omega^2} - \frac{KU}{\omega^2} \sin\alpha \sin\delta_g \\ \bar{U}' &= \frac{1}{\omega^2} f_e + \frac{1}{\omega^2} f_b - \frac{MKU}{\omega^2} - \frac{mK_{pa}Z_p}{\omega^2} \sin\alpha \sin\delta_p - \\ &\quad \frac{K_{ga}Z_g}{\omega^2} \sin\alpha \sin\delta_g - i^2 \varepsilon_p \cos\alpha \cos i\tau + \\ &\quad i^2 \varepsilon_p \sin\alpha \cos\delta_p \sin i\tau + \varepsilon_g \cos\alpha \cos(\tau + \gamma) - \\ &\quad \varepsilon_g \sin\alpha \cos\delta_g \sin(\tau + \gamma) \end{aligned} \quad (11)$$

对于不同类型的锥齿轮传动的转子—轴承系统, 其中的作用力可能不尽相同, 如果在系统中还作用了其它形式的外力或扭矩, 则只要在上式 f_x 、 f_y 、 T_1 、 T_2 中添加上相应的项即可.

2 锥齿轮传动系统的非线性动力学分析

式(11)是一个具有强非线性特征的7自由度系统, 不存在解析解, 即使采用近似方法求解也会遇到很大的困难, 比较可行的是采用数值方法求解. 由于系统在运行过程中, 作为运动参数的转速是一个可变量, 因此研究转子转速的变化对系统稳

定性的影响具有重要的工程意义. 图3为在系统参

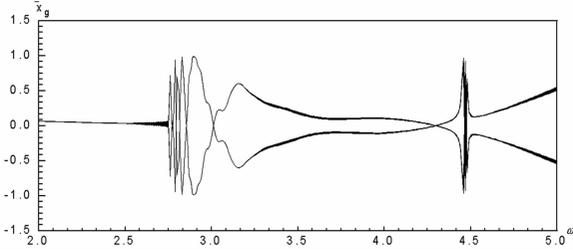


图3 稳态响应随转速变化的分叉图

Fig. 3 The bifurcation diagram of steady-state response with the speed

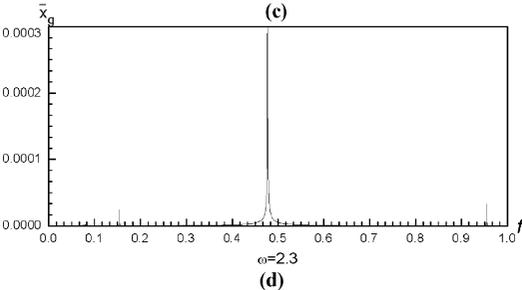
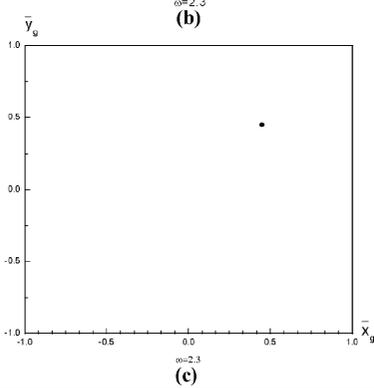
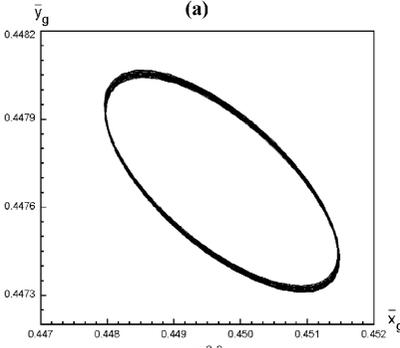
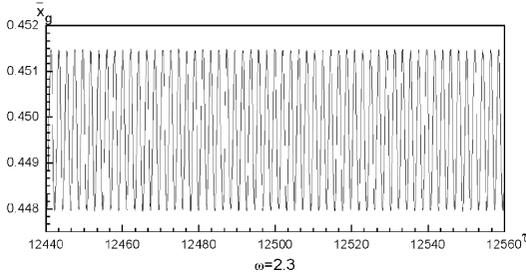


图4 $\omega = 2.3$ 时情况: (a)位移响应;(b)轴心轨迹;
(c)Poincaré 截面;(d)频谱图

Fig. 4 The case when $\omega = 2.3$: (a) displacement response;
(b) rotor orbit; (c) Poincaré section and (d) spectrum diagram

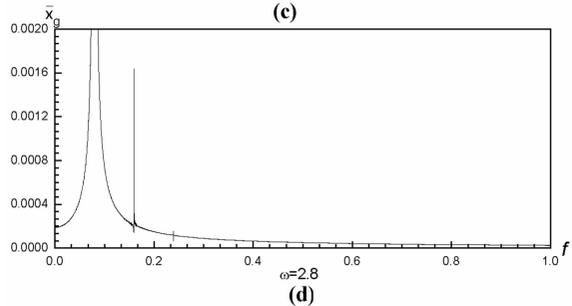
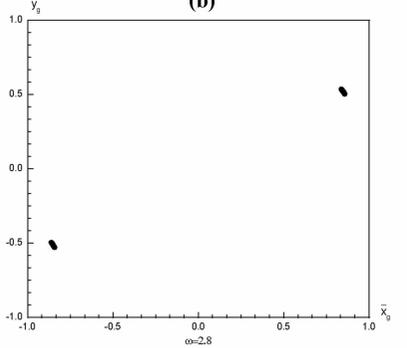
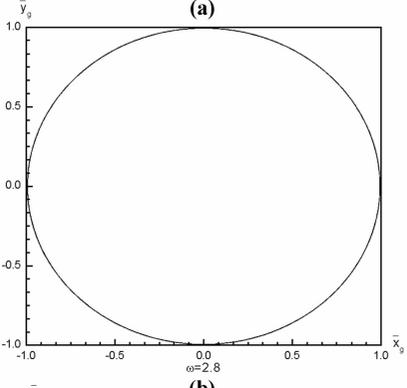
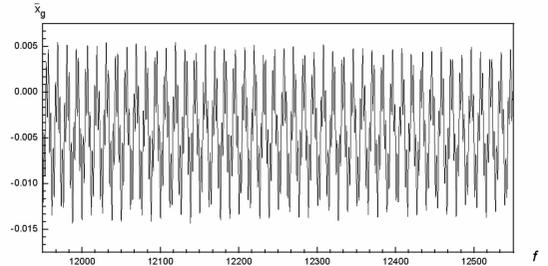


图5 $\omega = 2.8$ 时情况: (a)位移响应;(b)轴心轨迹;
(c)Poincaré 截面;(d)频谱图

Fig. 5 The case when $\omega = 2.8$: (a) displacement response;
(b) rotor orbit; (c) Poincaré section and (d) spectrum diagram

数: $\lambda = 0.2, K = 7.0, K_{pa} = 4.0, K_{ga} = 5.0, \varepsilon_p = 0.05, \varepsilon_g = 0.00, \alpha = \pi/9, \delta_p = \pi/9, \gamma = 0.0, m = 9.0, M = 30.0, f_e = 2.94, i = 3$ 时,采用4-5阶变步长 Runge-Kutta 法求得的稳态响应随转速变化的分叉图. 计算结果表明:锥齿轮传动的转子-轴承系统在转速较低时,表现为系统的不平衡响应,即为与转速同步的周期1运动;随着转速的增加,系

统运动出现了倍周期分叉等现象. 当转速在 $\omega = 2.74$ 时, 转子振幅突然增大, 直至碰到轴瓦, 随后转子的运动依然保持较大的振幅.

图4为 $\omega = 2.3$ 时系统的稳态响应, 此时系统的轴心轨迹近似为一个椭圆, 从 Poincaré 截面图可以看出系统此时为周期1的运动; 由于两锥齿轮之间的传动比为3, 使得大齿轮与小齿轮工作频率相差3倍, 在频谱图上系统存在 $3f/6f$ 等谐波分量, 并且轴心轨迹较光滑, 说明转子的运动比较平顺. 图5为 $\omega = 2.8$ 时系统的运动状态, 从 Poincaré 截面图可以看出, 系统作周期2运动, 频谱图上显示约在 $f/2$ 频率处幅值较大, 这在滑动轴承支承的其它转子系统中是较为常见的. 另外, 经过检查发现此时转子已碰到轴瓦. 需要说明的是对于上述系统, Runge-Kutta 方法计算效率非常低, 因此在分析这类系统的非线性动力学行为时引入新的算法是完全必要的.

3 结论

主要研究了在非线性的油膜力作用下锥齿轮传动转子系统的动力学行为. 在滑动轴承或挤压油膜阻尼器中, 油膜力是齿轮传动转子系统非线性的一个重要来源, 并且与轴承的结构参数、转子的转速和作用力等因素有关. 首先在刚性转子、齿轮不脱啮和短轴承理论等假设条件下, 建立了锥齿轮传动转子系统非线性动力学模型, 基于稳态响应、Poincaré 映射和分叉图等多种手段分析了系统的分叉特征. 通过以上的分析, 对在非线性的油膜力作用下锥齿轮传动转子系统的动力学行为有如下初步的结论: 对于不平衡转子系统, 在低转速时转子轴心轨迹的周期是同步的; 随着转速增加系统会出现2倍周期运动等, 而且振幅较大. 另外, 对于具有多个滑动轴承支承的多转子系统非线性动力学问题的求解, 4-5阶变步长 Runge-Kutta 法的计算效率不高, 因此这方面的算法研究显得非常迫切.

参 考 文 献

- Li M, Hu H Y, Jiang P L et al. Coupled axial-lateral-torsional dynamics of a rotor-bearing system geared by spur bevel. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 254(3):427 ~ 446
- Li M, Hu H Y. Dynamic analysis of a spiral bevel-gear rotor-bearing system. *Journal of Sound Vibration*, 2003, 259(3):605 ~ 624
- Li M. Non-linear dynamic behaviour of rotor-bearing system trained by bevel gears. In: Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C, *Journal of Mechanical Engineering Science*, 2008, 222(4):617 ~ 627
- 王三民, 沈允文, 董海军. 含间隙和时变啮合刚度的弧齿锥齿轮传动系统非线性振动特性研究. *机械工程学报*, 2003, 39(2): 28 ~ 32 (Wang S M, Shen Y W, Dong H J. Nonlinear dynamical characteristics of a spiral bevel gear system with backlash and time-varying stiffness. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2003, 39(2): 28 ~ 32 (in Chinese))
- 范叶森, 王三民, 杨振等. 斜交弧齿锥齿轮耦合多转子系统振动分析方法. *哈尔滨工业大学学报*, 2011, 43(3):111 ~ 116 (Fan Y S, Wang S M, Yang Z et al. Vibration analysis method for multi-rotor system geared by angular spiral bevel gears. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2011, 43(3):111 ~ 116 (in Chinese))
- 王时龙, 冯治恒, 雷松等. 时变摩擦因数对弧齿锥齿轮动力学特性的影响. *中国机械工程*, 2011, 22(2):148 ~ 152 (Wang S L, Feng Y H, Lei S et al. Effect of time-varying friction coefficient on dynamics of spiral bevel gears. *China Mechanical Engineering*, 2011, 22(2):148 ~ 152 (in Chinese))
- Li Y N, Li G Y, Zheng. Influence of asymmetric mesh stiffness on dynamics of spiral bevel gear transmission system. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010, Article ID 24148
- Cai W, Chang J. Nonlinear analysis for gear pair system supported by long journal bearings under nonlinear suspension. *Mechanism and Machine Theory*, 2010, 45(4):569 ~ 583
- Cai W, Chang J. Strong nonlinearity analysis for gear-bearing system under nonlinear suspension-bifurcation and chaos. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, 11(3):1760 ~ 1774
- 苏林玉, 温建明. 基于两种齿轮碰撞振动的实验和数值分析. *动力学与控制学报*, 2011, 9(3): 277 ~ 281 (Su L Y, Wen J M. Experimental and numerical analysis of two kinds of gear vibration. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(3):277 ~ 281 (in Chinese))
- 李自刚, 李明, 江俊. 不对中联轴器柔性转子系统非线

性动力学行为. 动力学与控制学报, 2014, 12(1): 30 ~ 35 (Li Z G, Li M, Jiang J. Nonlinear dynamics of a flexible rotor system coupled by a misaligned coupling.

Journal of Dynamics and Control, 2014, 12(1): 30 ~ 35 (in Chinese))

NONLINEAR DYNAMIC CHARACTERISTICS OF BEVEL GEARED ROTOR SYSTEM*

Li Ming[†] A Mei

(1. *Department of Mechanics, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China*)

(2. *Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

Abstract This paper mainly studied the dynamic behaviors of bevel-gear rotor system under non-linear oil film forces. In the bevel-gear rotor system supported on the journal bearings or squeeze film damper, oil film force is an important source of nonlinearity, which is influenced by the structural parameters of bearings, speed of rotor and the acting forces. Under the assumptions such as the rigid rotor, the gear meshing, etc. the dynamic model of bevel-gear rotor system under non-linear oil film forces was established after considering the bevel-gear relationship of the generalized displacement constraints. Because the oil film force is of strong nonlinear characteristics, its dynamic behaviors of the system, such as steady-state responses, Poincaré maps and bifurcation diagrams, were analyzed by using the numerical method. The conclusions are summarized as follows: for the unbalanced bevel-gear rotor system, the rotor motions are synchronized with rotational speed at low speeds; with the increase of speed, the complicated phenomena such as the 2-periodic motions in the displacement responses occur. These vibration characteristics can provide the theoretical basis for the dynamic design, structural optimization and condition monitoring.

Key words bevel gear, rotor-bearing system, non-linear oil film forces, nonlinear dynamics