第 12 卷第 2 期 2014 年 6 月
1672-6553/2014/12(2)/111-4

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 12 No. 2
Jun 2014

广义 Burgers 方程的对称分类及其约化

贾丽平　郑丽霞†

（内蒙古工业大学理学院，呼和浩特　010051）

摘要　利用李群方法对广义 Burgers 方程 $u_t+f(x,t)(u_x-u_{xx})=0$ 的对称分类及其约化作具体讨论，其中 f 是关于自变量 x,u 的光滑函数，得到了 $f(x,t)$ 的八种分类对称及相应的约化方程. 该结果对于广义 Burgers 方程精确解的研究有重要意义.

关键词　李对称，　无穷小生成元，　广义 Burgers 方程，　李群方法，　对称分类

DOI：　10.6052/1672-6553-2013-092

引言

1948 年，欧美学者 Johannes Burgers 首先用模型

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{v}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

来描述流体中的湍流. 人们对此方程的研究不断深入，它也就成了描述对流－耗散流之间相互影响的最原始模型. 这个方程就被人们以 Johannes Burgers 的名字命名为“Burgers 方程”，这里 $u=u(x,t)$. 广义的 Burgers 方程模式是一个重要的和普遍的非线性模式. 本文考虑广义 Burgers 方程

$$u_t+f(x,u)(u_x-u_{xx})=0 \tag{1}$$

其中 f 是关于自变量 x,u 的光滑函数.

前人用不同的方法对 Burgers 方程和广义 Burgers 方程诸多讨论. 文献[1,2,3,4,5]利用优化系统和李代数方法等对非粘性 Burgers 方程作具体的讨论；文献[6,7,8,9]对广义 Burgers 方程和 Burgers 方程作具体讨论. 本文主要是应用文献[10]的方法对(1)式进行对称分类及其约化，得到了 $f(x,u)$ 的八种分类对称及相应的约化方程.

1　广义 Burgers 方程的对称分类

设方程(1)拥有的对称无穷小生成元为：

$$X=\xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t}+\varphi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

利用 PDE 的不变性的无穷小准则，有

$$\varphi^t+f\varphi^x+(\xi f_x+\varphi f_u)u_x-f\varphi^{xx}-$$
$$(\xi f_x+\varphi f_u)u_{xx}=0 \tag{2}$$

其中 u 满足(1)，由(2)式解得确定方程组并化解得

$$\xi_{uu}=0 \tag{3}$$
$$\eta_u=\eta_x=\eta_{uu}=0 \tag{4}$$
$$\varphi_t+f(x,u)\varphi_x-f(x,u)\varphi_{xx}=0 \tag{5}$$
$$2f(x,u)\xi_u+2f^2(x,u)\eta_{xu}=0 \tag{6}$$
$$\varphi_{uu}-2\xi_u-2\xi_{xu}=0 \tag{7}$$
$$-2f(x,u)\varphi_{xu}-\xi_t+f(x,u)\xi_x+f(x,u)\xi_{xx}=0 \tag{8}$$
$$2f(x,u)\xi_x-f(x,u)\eta_t-\varphi f_u(x,u)-\xi f_x(x,u)=0 \tag{9}$$

假设 $f_u\neq0$，(9)可写为：

$$\varphi=\frac{f}{f_u}(2\xi_x-\eta_t)-\frac{f_x}{f_u}\xi \tag{10}$$

将(10)分为两种情况：

(i)　$f=f_x$

(ii)　$f\neq f_x$

讨论上述的第一种情况

当 $f=f_x$ 时，(10)变为

$$\varphi=\frac{f}{f_u}(2\xi_x-\eta_t-\xi) \tag{11}$$

这里 $\frac{f}{f_u}$ 只有三种可能，其中当 $\frac{f}{f_u}=0$ 时，对方程的讨论没有意义. 我们只对如下两种情况进行讨论：

$$\frac{f}{f_u}=c \tag{12}$$

2013-07-05 收到第 1 稿，2013-08-21 收到修改稿.

† 通讯作者 E-mail：18647157859@163.com

$$\frac{f}{f_u}=g(u) \tag{13}$$

其中 c 为非零常数.

在(12)中,我们得到 f 关于 x,u 的函数

$$f(x,u)=e^{x+\frac{1}{c}u+k_1}$$

k_1 为任意常数. 则(11)变为

$$\varphi=c(2\xi_x-\eta_t-\xi) \tag{14}$$

将(14)代入(4)~(9),解方程组得

$$\xi=c_1$$
$$\eta(t)=c_2t+c_3$$
$$\varphi=c(-c_2-c_1)$$

其中 $c_i,i=1,2,3$,是任意常数.

所以方程(1)的 *Lie* 对称生成元为

$$X=c_1\frac{\partial}{\partial x}+(c_2t+c_3)\frac{\partial}{\partial t}-c(c_2+c_1)\frac{\partial}{\partial u}$$

则方程(1)有 3 个有限维对称

$$\begin{cases}X_1=\dfrac{\partial}{\partial x}-c\dfrac{\partial}{\partial u}\\ X_2=t\dfrac{\partial}{\partial t}-c\dfrac{\partial}{\partial u}\\ X_3=\dfrac{\partial}{\partial t}\end{cases} \tag{15}$$

当(13)成立时,(11)可写为

$$\varphi=g(u)(2\xi_x-\eta_t-\xi) \tag{16}$$

因(7)得 $\varphi_{uu}=0$,所以设 $g(u)=e_1u+e_2$,($e_1\neq0,e_2$ 为任意常数),即

$$\varphi=(e_1u+e_2)(2\xi_x-\eta_t-\xi) \tag{17}$$

那么 $\dfrac{f_u}{f}=\dfrac{1}{e_1u+e_2}$,通过积分得

$$f(x,u)=e^{x+k_1}(e_1u+e_2)^{\frac{1}{e_1}}$$

k_1 为任意常数. 将(17)代入(4)~(9)中,解方程组得

$$\xi=c_1$$
$$\eta(t)=c_2t+c_3$$
$$\varphi=(e_1u+e_2)(-c_2-c_1)$$

其中 $c_i,i=1,2,3$,是任意常数.

讨论上述的第二种情况

在情况二中,我们将它分为十六种情况进行讨论,其中部分情况不符合条件,对符合条件的做具体分析. 分类具体如下(主要是在(10)中进行分类)

第一种: $\dfrac{f}{f_u}=c\quad\dfrac{f_x}{f_u}=l\quad(c\neq l)$

第二种: $\dfrac{f}{f_u}=c\quad\dfrac{f_x}{f_u}=\lambda(x)$

第三种: $\dfrac{f}{f_u}=cu\quad\dfrac{f_x}{f_u}=lu$

第四种: $\dfrac{f}{f_u}=cu\quad\dfrac{f_x}{f_u}=\lambda(x)u$

第五种: $\dfrac{f}{f_u}=\lambda(x)\quad\dfrac{f_x}{f_u}=cu$

第六种: $\dfrac{f}{f_u}=\lambda(x)\quad\dfrac{f_x}{f_u}=\lambda(x)u$

综上:符合条件的只有六种情况,我们只对如上六种情况进行分析,分别对方程求其对称(计算方法同上).

表 1 两种情况的所有对称分类结果

Table 1 All the symmetry classification results of two cases

Classification	Species	$f(x,u)$	Symmetry		
$f=f_x$	Ⅰ	$f=e^{x+\frac{1}{c}u+k_1}$	$X_1=\frac{\partial}{\partial x}-c\frac{\partial}{\partial u}$	$X_2=t\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial u}$	$X_3=\frac{\partial}{\partial t}$
	Ⅱ	$f=e^{x+k_1}(e_1u+e_2)^{\frac{1}{e_1}}$	$X_1=\frac{\partial}{\partial x}-(e_1u+e_2)\frac{\partial}{\partial u}$	$X_2=t\frac{\partial}{\partial t}+(-e_1u-e_2)\frac{\partial}{\partial u}$	$X_3=\frac{\partial}{\partial t}$
$f\neq f_x$	①	$f=e^{\frac{u}{c}+\frac{l}{c}x+k_1}$	$X_1=\frac{\partial}{\partial x}-l\frac{\partial}{\partial u}$	$X_2=t\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial u}$	$X_3=\frac{\partial}{\partial t}$
	②	$f=e^{\frac{u}{c}+e^{\frac{1}{c}x+k_1}}$	$X_1=\frac{\partial}{\partial x}-e^{x+k_1}\frac{\partial}{\partial u}$	$X_2=t\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial u}$	$X_3=\frac{\partial}{\partial t}$
	③	$f=u^{\frac{1}{c}}e^{\frac{l}{c}x+k_1}$	$X_1=\frac{\partial}{\partial x}-lu\frac{\partial}{\partial u}$	$X_2=t\frac{\partial}{\partial t}-cu\frac{\partial}{\partial u}$	$X_3=\frac{\partial}{\partial t}$
	④	$f=-u^{\frac{1}{c}}(\frac{c}{x+ck_1})$	$X_1=t\frac{\partial}{\partial t}-cu\frac{\partial}{\partial u}$	$X_2=\frac{\partial}{\partial t}$	
	⑤	$f=k_2e^{\frac{u}{e^{-cx+k_1}}}$	$X_1=\frac{\partial}{\partial x}+u\frac{\partial}{\partial u}$	$X_2=t\frac{\partial}{\partial t}-e^{x+k_2}\frac{\partial}{\partial u}$	$X_3=\frac{\partial}{\partial t}$
	⑥	$f=k_2e^{(x+k_1)u}$	$X_1=\frac{\partial}{\partial t}$		

经过以上两种情况的讨论,计算出两种情况的所有对称结果如表 1.

这里 c,l 是不相等的非零常数,k_1,k_2 为任意常数.

2　广义 Burgers 方程的对称约化

讨论上述的第一种情况

计算(15)对称向量 X_1 对应的方程约化,它的特征方程为

$$\frac{dx}{1}=\frac{dt}{0}=\frac{du}{-c}$$

得不变量 $t=\theta,u=-cx+q$,其中 θ,q 为任意常数.令 $q=h(\theta)$,则 $u=-cx+h(t)$,将 u 代入(1),$h(t)$ 满足

$$h_t-ce^{\frac{1}{c}h+k_1}=0$$

计算(15)对称向量对应的方程约化,它的特征方程为

$$\frac{dt}{1}=\frac{du}{-c}=\frac{dx}{0}$$

得不变量 $x=\theta,u=\ln\frac{q}{t^c}$,其中 θ,q 为任意常数,令 $q=h(\theta)$,则 $u=\ln\frac{h(x)}{t^c}$,将 u 代入(1),即 $h(x)$ 满足

$$c-e^{x+k_1}h^{\frac{1}{c}}(\frac{h_x}{h}-\frac{h_{xx}}{h}+\frac{h_x^2}{h^2})=0$$

根据如上的计算方法对剩余七种进行计算,对情况(i)、(ii)的所有分类的部分对称对应的约化方程具体如下(表 2).

表 2　两种情况中部分对称对应的约化方程

Table 2　Partially symmetrical corresponding reduced equation in two cases

Species	Symmetric vector X_1 corresponds to the reduced equation	Symmetric vector X_2 corresponds to the reduced equation
Ⅰ	$h_t-ce^{\frac{1}{c}h+k_1}=0$	$c-e^{x+k_1}h^{\frac{1}{c}}(\frac{h_x}{h}-\frac{h_{xx}}{h}+\frac{h_x^2}{h^2})=0$
Ⅱ	$\frac{h_t}{e_1}+e^{k_1}h^{\frac{1}{e_1}+1}(-1-e_1)=0$	$e_1h+e^{x+k_1}h^{\frac{1}{e_1}}(h_{xx-h_x})=0$
①	$h_t-le^{\frac{h}{c}+k_1}=0$	$c-h^{\frac{1}{c}}e^{\frac{l}{c}x+k_1}(\frac{h_x}{h}-\frac{h_{xx}}{h}+\frac{h_x^2}{h^2})=0$
②	$h(t)=k_3$(k_3 is arbitrary constants)	$1-e^{x+k_1}(h_x-h_{xx}+\frac{h_x^2}{h})=0$
③	$h_t-h^{\frac{1}{c}+1}e^{k_1}(l+l^2)$	$ch-h^{\frac{1}{c}}e^{\frac{l}{c}x+k_1}(h_x-h_{xx})=0$
④	$h+h^{\frac{1}{c}}\frac{1}{x+ck_1}(h_x-h_{xx})=0$	$h^{\frac{1}{c}}\frac{1}{x+ck_1}(h_{xx}-h_x)=0$
⑤	$h(t)=k_3$(k_3 is arbitrary constants)	$e^{x+k_1}-k_2e^{\frac{h}{e^{x+k_1}}}(h_x-h_{xx})$
⑥	$k_2e^{(x+k_1)h}(h_x-h_{xx})=0$	

其中对称向量 X_3 对应的约化方程与情况④,⑥中对称向量 X_2,X_1 的计算过程类似.

3　总结

本文主要是用李群方法对如上广义 Burgers 方程的系数函数进行分类,得到其对应的对称及约化方程,这些结果,有利于我们进一步研究方程的精确解.对称分类问题是该领域的难点问题,由于此方程的系数函数中含有两个自变量,计算过程相对简单,对于系数函数含有多个自变量的未知函数的方程的对称分类分类问题,还有待于我们进一步研究.

参　考　文　献

1　Nadjafikhah M. Classification of similarity solutions for inviscid burgers' equation. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2010,20: 71～77

2　Nadjafikhah M. Lie symmetries of inviscid burgers equation. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2009,19: 101～112

3　Ouhadan A, El Kinani E H. Lie symmetries of the equation ut(x, t) + g(u)ux(x, t) = 0. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2007,17(1):95～106

4　Nadjafikhah M. Lie symmetries of inviscid burgers equation. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2009,19(1): 101 ~ 112

5 Sarrico C O R. Distributional products and global solutions for nonconservative inviscid Burgers equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003,281:641 ~ 656

6 Liu H, Li J, Zhang Q. Lie symmetry analysis and exact explicit solutions for general Burgers' equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009,228: 1 ~ 9

7 Yan Z Y. A transformation with symbolic computation and abundant new soliton-like solutions for the (1 + 2)-dimensional generalized Burgers equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2002,35:9923 – 9930

8 Smaoui N, Mekka M. The generalized Burgers equation with and without a time delay. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 2004, 1:73 ~ 96

9 Wood L W. An exact solution for Burgers equation. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2006, 22: 797 ~ 798

10 Nadjafikhah M, Bakhshandeh C R, Mahdipour S A. A symmetry classification for a class of (2 + 1) nonlinear wave equation. *Nonlinear Analysis*, 2009,71(11):5164 ~ 5169

SYMMETRY CLASSIFICATIONS AND REDUCTIONS FOR GENERALIZED BURGERS EQUATION

Jia Liping Zheng Lixia†

(*College of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot* 010051, *China*)

Abstract Symmetry classifications and reductions for generalized Burgers equation $u_t + f(x,t)(u_x - u_{xx}) = 0$ were discussed specifically by using Lie group method, where f is the smooth function of x, u. And we obtained eight categories classified symmetry and the corresponding reduced equation of $f(x,t)$. The results provide reference for the exact solutions of the generalized Burgers equation study.

Key words Lie symmetry, infinitesimal generator, generalized Burgers equation, Lie group methods, symmetry classification

Received 5 July 2013, revised 21 August 2013.

† Corresponding author E-mail:18647157859@163.com