

轴向运动粘弹性夹层梁的横向振动*

吕海炜^{1†} 李映辉¹ 刘启宽² 李亮¹

(1. 西南交通大学力学与工程学院, 成都 610031) (2. 昆明学院数学系, 昆明 650214)

摘要 研究了小扰度下轴向匀速运动粘弹性夹层梁的振动模态和固有频率. 基于 Kelvin 粘弹性本构方程, 建立了轴向运动粘弹性夹层梁横向振动控制方程. 分别采用 Galerkin 截断和复模态分析方法, 研究两端简支的粘弹性夹层梁的固有频率和模态函数, 讨论了轴向运动速度、夹心层与约束层厚度比、初始轴力等参数对夹层梁固有频率、临界速度及稳定性的影响.

关键词 粘弹性夹层梁, 横向振动, Galerkin 截断, 复模态分析法, 稳定性

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-038

引言

粘弹性夹层材料广泛应用于列车车厢、汽车和航天器展开附件、风力机叶片、飞机蒙皮、高速飞行导弹、潜艇等的减振降噪. Mote^[1-3] 和 Chen^[4-5] 等人的研究表明, 物质的轴向运动将诱发产生横向振动, 振动强度与运动速度、初始轴力等密切相关, 并且运动速度达到或超过某临界值时, 将导致运动失稳, 因此对轴向运动粘弹性夹层梁的研究具有非常大的工程应用价值.

轴向运动的材料的稳定性问题受到众多学者的关注. Mote^[1-3] 引领了最早的关于轴向运动的研究, Chen 和 Yang^[4] 利用多重尺度法研究了轴向运动粘弹性梁的稳定性, Yang 和 Chen^[5] 利用多重尺度法研究了两种非线性情况下轴向运动粘弹性梁的强迫振动, Ames^[6] 研究了平面周期激励下移动螺纹线的运动, 他指出此运动是非线性的, 而且由于临界速度的影响, 运动会出出现大的跳跃, Thurman 和 Mote^[7] 利用摄动法研究了线性和非线性基本周期的偏差和速度之间关系, Tabarrok^[8] 研究的梁的长度随时间变化, 他得到了四个偏微分方程, Wickert 和 Mote^[9] 利用对称和反对称微分算子来勾画运动方程, 然后利用 Green 函数法得到了临界运动速度, Wickert^[10] 分析了亚临界和超临界速度下非线性轴向运动梁, Stylianou 和 Tabarrok^[11] 利用有限元

分析得到了数值解, 然后研究了集中质量和轴向运动频率对横向振动的影响, Oz^[12] 研究了弦线和梁之间的过渡行为, 利用扰动分析, 构建了变速梁的一个解, Oz 和 Pakdemirli^[13] 利用多尺度法研究运动方程, 得到了轴向加速弹性预紧梁的稳态响应, 最后详细研究了主参数共振问题.

可见, 轴向运动(粘弹性)梁的研究受到很大关注, 但对轴向运行粘弹性夹层结构振动特性(固有频率, 损耗因子等)及稳定性影响的研究较少, 为此本文将通过建立轴向运动粘弹性夹层梁的横向振动方程, 分别采用 Galerkin 截断和复模态分析方法, 研究横向振动特性, 讨论其夹心层比率和轴向运动速度对其横向振动特性的影响.

1 控制方程

对于轴向运动夹层梁, 本文采用下列基本假设:

- (1) 不考虑转动惯量和剪切变形影响;
- (2) 只考虑横向位移;
- (3) 横截面变形满足平面假设;
- (4) 层和层之间没有滑移;
- (5) 层和层之间的横向位移一致.

图 1 为以速度 V_0 沿 x 轴运动的两边简支的粘弹性夹层梁, 长度为 a , 宽度为 b , 厚度为 H , 初始轴力为 P_0 . 上下约束层为弹性材料, 其厚度为 $h_s/2$, 弹性模量为 E_s , 密度为 ρ_s , 夹心层为 Kelvin 粘弹性

2012-06-27 收到第 1 稿, 2012-07-03 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11072204), 中央高校科研业务费专项项目(SWJTU11ZT15), 昆明学院引进人才科研先项目资助(YJL12005)
† 通讯作者 E-mail: lvhaiwei007@163.com

材料,其厚度为 h_c ,弹性模量为 E_c ,密度为 ρ_c ,粘弹性阻尼系数为 η .

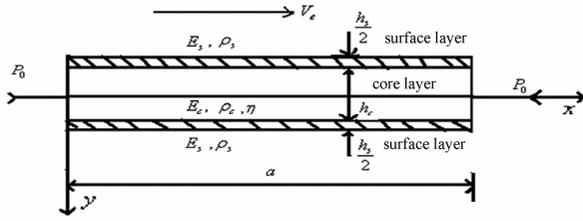


图1 轴向运动粘弹性夹层梁

Fig. 1 Axially moving viscoelastic sandwich beam

由参考文献[14],可知大变形下轴向匀速运动粘弹性夹层梁横向振动方程的无量纲形式为

$$w_{,tt} + 2vw_{,xt} + (v^2 - 1)w_{,xx} + k_f^2 w_{,xxxx} + \alpha(w_{,xxxxt} + vw_{,xxxxx}) - \frac{3}{2}k_1(w_{,x})^2 w_{,xx} - k_2(2w_{,x}w_{,xx}w_{,xt} + 2vw_{,x}w_{,xx}w_{,xt} + (w_{,x})^2 w_{,xxt} + v(w_{,x})^2 w_{,xxx}) = 0 \quad (1)$$

若考虑小变形,则无量纲控制方程为

$$w_{,tt} + 2vw_{,xt} + (v^2 - 1)w_{,xx} + k_f^2 w_{,xxxx} + \alpha(w_{,xxxxt} + vw_{,xxxxx}) = 0 \quad (2)$$

不考虑夹层的粘弹性,其控制方程为

$$w_{,tt} + 2vw_{,xt} + (v^2 - 1)w_{,xx} + k_f^2 w_{,xxxx} = 0 \quad (3)$$

其简支边界条件为

$$w(0,t) = w(1,t) = 0, w_{,xx}(0,t) = w_{,xx}(1,t) = 0 \quad (4)$$

简化的方程(3)可利用复模态分析法精确求解,但是对于方程(2)复模态法失效,此时可采用 Galerkin 方法近似求解.

2 轴向运动粘弹性夹层梁振动特性

2.1 Galerkin 截断法

对方程(2)使用 Galerkin 截断法求解,设方程(2)解的形式为

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^N T_n(t)\phi_n(x) \quad (5)$$

其中 $\phi_n(x)$ 是满足边界条件的试函数,通常取

$$\phi_n(x) = \sin n\pi x \quad (6)$$

将方程(5)带入方程(2),得系统的残差为

$$R(x,t) = \sum_{n=1}^N \ddot{T}_n(t)\phi_n(x) + 2v \sum_{n=1}^N \dot{T}_n(t)\phi'_n(x) + (v^2 - 1) \sum_{n=1}^N T_n(t)\phi''_n(x) + k_f^2 \sum_{n=1}^N T_n(t)\phi_n^{(4)}(x) +$$

$$\alpha \left(\sum_{n=1}^N \dot{T}_n(t)\phi_n^{(4)}(x) + v \sum_{n=1}^N T_n(t)\phi_n^{(5)}(x) \right) \quad (7)$$

由 Galerkin 方法得

$$\int_0^1 R(x,t)\phi_n(x) dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (8)$$

取 $N = 1$,得系统的一阶 Galerkin 截断

$$[M]\{\ddot{T}\} + [C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} = 0 \quad (9)$$

其中

$$M = \int_0^1 \phi_1^2(x) dx$$

$$C = 2v \int_0^1 \phi_1'(x)\phi_1(x) dx + \alpha \int_0^1 \phi_1^{(4)}(x)\phi_1(x) dx$$

$$K = (v^2 - 1) \int_0^1 \phi_1''(x)\phi_1(x) dx + k_f^2 \int_0^1 \phi_1^{(4)}(x)\phi_1(x) dx + \alpha v \int_0^1 \phi_1^{(5)}(x)\phi_1(x) dx \quad (10)$$

取 $N = 2$,得系统的二阶 Galerkin 截断

$$[M]\{\ddot{T}\} + [C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} = 0 \quad (11)$$

其中

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix},$$

$$M_{ij} = \int_0^1 \phi_j(x)\phi_i(x) dx \quad (i, j = 1, 2)$$

$$C_{ij} = 2v \int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i(x) dx + \alpha \int_0^1 \phi_j^{(4)}(x)\phi_i(x) dx \quad (i, j = 1, 2)$$

$$K_{ij} = (v^2 - 1) \int_0^1 \phi_j''(x)\phi_i(x) dx + k_f^2 \int_0^1 \phi_j^{(4)}(x)\phi_i(x) dx + \alpha v \int_0^1 \phi_j^{(5)}(x)\phi_i(x) dx \quad (i, j = 1, 2) \quad (12)$$

设方程(9)和(11)解的形式 $\{T\} = \{c\}e^{\lambda t}$,将其代入方程(9)和(11),得系统的特征方程为

$$|\lambda^2 [M] + \lambda [C] + [K]| = 0 \quad (13)$$

求解特征方程得轴向运动粘弹性夹层梁的失稳形式及相应临界速度.

2.2 复模态分析法

设方程(3)的解的形式为^[14]

$$u = A_n(T_1)e^{i\omega_n T_0} Y_n(x) + cc \quad (14)$$

其中 ω_n 为无量纲的圆频率, $Y_n(x)$ 为模态函数, A_n (T_1) 为振幅, cc 表示前面函数的共轭.

把方程(14)带入方程(3)有

$$k_f^2 Y_n^{(4)}(x) + (v_0^2 - 1) Y_n''(x) + 2iv_0 \omega_n Y_n'(x) - \omega_n^2 Y_n(x) = 0 \tag{15}$$

设

$$Y_n(x) = C_{1n} (e^{i\beta_{1n}x} + C_{2n} e^{i\beta_{2n}x} + C_{3n} e^{i\beta_{3n}x} + C_{4n} e^{i\beta_{4n}x}) \tag{16}$$

则方程(3)的特征函数为

$$k_f^2 (\beta_{jn})^4 + (1 - v_0^2) (\beta_{jn})^2 - 2v_0 \omega_n \beta_{jn} - \omega_n^2 = 0 \tag{17}$$

由边界条件(4)可得到模态函数 $Y_n(x)$ 满足

$$Y_n(0) = Y_n(1) = 0, Y_n''(0) = Y_n''(1) = 0 \tag{18}$$

由方程(16)以及上面的边界条件,可以得到系数 C_{jn} 满足

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i\beta_{1n}} & e^{i\beta_{2n}} & e^{i\beta_{3n}} & e^{i\beta_{4n}} \\ -\beta_{1n}^2 & -\beta_{2n}^2 & -\beta_{3n}^2 & -\beta_{4n}^2 \\ -\beta_{1n}^2 e^{i\beta_{1n}} & -\beta_{2n}^2 e^{i\beta_{2n}} & -\beta_{3n}^2 e^{i\beta_{3n}} & -\beta_{4n}^2 e^{i\beta_{4n}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{1n} \\ C_{2n} \\ C_{3n} \\ C_{4n} \end{Bmatrix} = 0 \tag{19}$$

上述方程组有非零解的条件为系数行列式为零,从而得到系统的频率方程^[14]

$$\begin{aligned} &(\beta_{1n}^2 - \beta_{2n}^2)(\beta_{2n}^2 - \beta_{4n}^2) [e^{i(\beta_{1n} + \beta_{2n})} + e^{i(\beta_{3n} + \beta_{4n})}] + \\ &(\beta_{2n}^2 - \beta_{4n}^2)(\beta_{3n}^2 - \beta_{1n}^2) [e^{i(\beta_{2n} + \beta_{4n})} + \\ &e^{i(\beta_{3n} + \beta_{1n})}] + (\beta_{1n}^2 - \beta_{4n}^2)(\beta_{2n}^2 - \\ &\beta_{3n}^2) [e^{i(\beta_{1n} + \beta_{4n})} + e^{i(\beta_{2n} + \beta_{3n})}] = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

且可求出系数 C_{jn} ($j=2,3,4$). 对于给定的参数,由方程(17)以及频率方程(20)可以数值求解 ω_n ($n=1,2,\dots$) 和 β_{jn} ($j=1,2,3,4; n=1,2,\dots$).

轴向匀速运动的梁横向振动的模态函数为^[14]

$$\begin{aligned} Y_n(x) = &C_{1n} (e^{i\beta_{1n}x} + \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{2n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{3n}})}) e^{i\beta_{2n}x} - \\ &\frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{3n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{3n}})} e^{i\beta_{3n}x} + \\ &(-1 - \frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{3n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{2n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{3n}})}) + \\ &\frac{(\beta_{4n}^2 - \beta_{1n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{1n}})}{(\beta_{4n}^2 - \beta_{3n}^2)(e^{i\beta_{2n}} - e^{i\beta_{3n}})}) e^{i\beta_{4n}x} \end{aligned} \tag{21}$$

随着轴向运动速度的增加,梁的各阶固有频率一一消失,使得固有频率消失的那个速度点,我们称之为临界速度. 对于两端简支的轴向运动梁,其

临界速度为^[15]

$$v_{cr} = \sqrt{k_f^2 (n\pi)^2 + 1} \tag{22}$$

3 数值计算及结果

本文粘弹性夹层梁的几何尺寸及材料参数如表1、2:

表1 粘弹性夹层梁的几何尺寸

Table 1 Geometry size of viscoelastic sandwich beam			
a/m	b/m	H/m	h_c/m
2	0.05	0.1	0.08

表2 粘弹性夹层梁的材料参数

Table 2 Material parameters of viscoelastic sandwich beam			
	$\rho / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	E/Pa	η
Surface layer (aluminum)	2700	7.2×10^{10}
Core layer (rubber)	1300	1×10^7	0.1

初始轴力: $P_0 = 500$ (N), 轴向运动速度: $V_e = 20$ (m/s).

3.1 粘弹性项对固有频率的影响

图2给出了夹心层厚度为0.08m时 Galerkin 方法下粘弹性系数对系统固有频率的影响. 由图2可以看出,粘弹性系数对系统的固有频率没有影响. 为此以下均是利用两种方法求解方程(3).

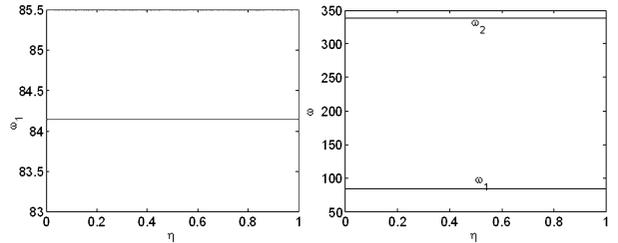


图2 粘弹性项对固有频率的影响

Fig. 2 The effect of viscoelastic coefficient on natural frequencies

3.2 轴向运动速度对固有频率的影响

图3给出夹心层厚度为0.08m时系统固有频率随轴向运动速度的变化情况. 由图3可看出在未达到临界速度之前,一阶 Galerkin 截断与二阶 Galerkin 截断以及复模态分析计算结果随轴向运动速度变化趋势一致,都随轴向运动速度的增加,固有频率减小. 但一阶 Galerkin 截断不适合描述轴向运动速度超过临界速度的情形. 当轴向运动速度达到214m/s时,粘弹性夹层梁运动失稳;当轴向运动速度进一步达到428m/s时,一阶模态趋于稳定;当速度继续增加,一阶模态和二阶模态发生耦合,

产生耦合模态颤振.

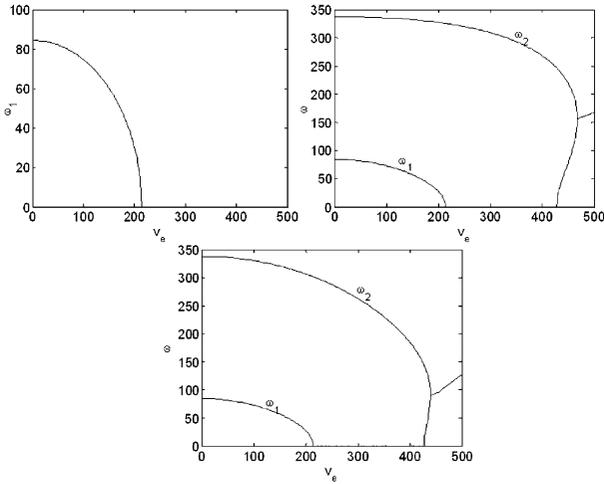


图3 轴向运动速度对固有频率的影响

Fig.3 The effect of axial tension on natural frequencies

3.3 夹心层的厚度对固有频率的影响

图4给出了三种方法求出的系统固有频率随夹心层厚度的变化情况.由图4可以看出,随夹心层厚度的增加,固有频率减小.

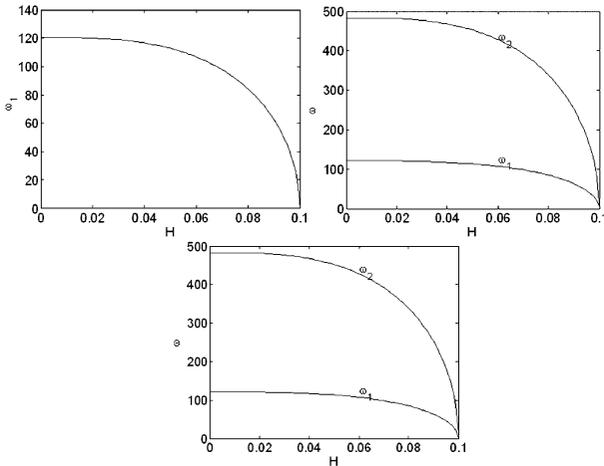


图4 夹心层的厚度对固有频率的影响

Fig.4 The effect of thickness of core layer on natural frequencies

3.4 初始轴力对固有频率的影响

图5给出了夹心层厚度为0.08m时三种方法求出的系统固有频率随初始轴力的变化情况.由图5可以看出随初始轴力的增加,固有频率减小,一阶模态和二阶模态发生耦合颤振的速度减小.

3.5 夹心层的厚度对临界速度的影响

图6给出了 Galerkin 截断法以及复模态分析法求出的系统的临界速度随夹心层的厚度变化情况.由图6可以看出随夹心层厚度的增加,系统的临界速度先增大后减小,说明系统发生失稳的速度

先滞后后提前.

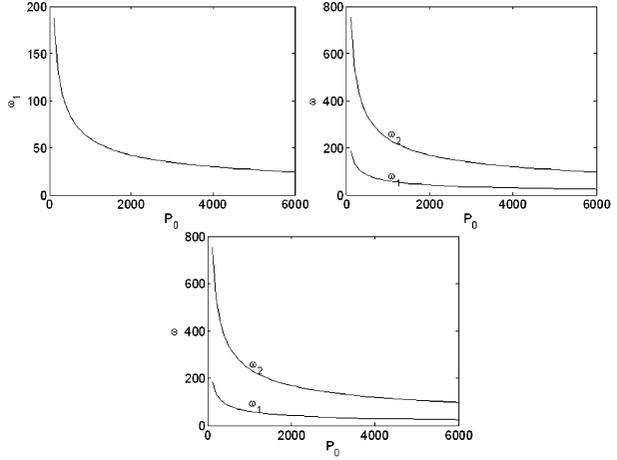


图5 初始轴力对固有频率的影响

Fig.5 The effect of axial tension on natural frequencies

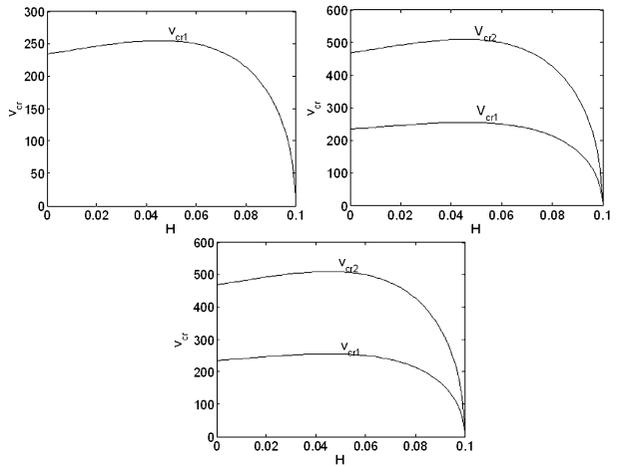


图6 夹心层的厚度对临界速度的影响

Fig.6 The effect of thickness of core layer on critical velocity

3.6 初始轴力对临界速度的影响

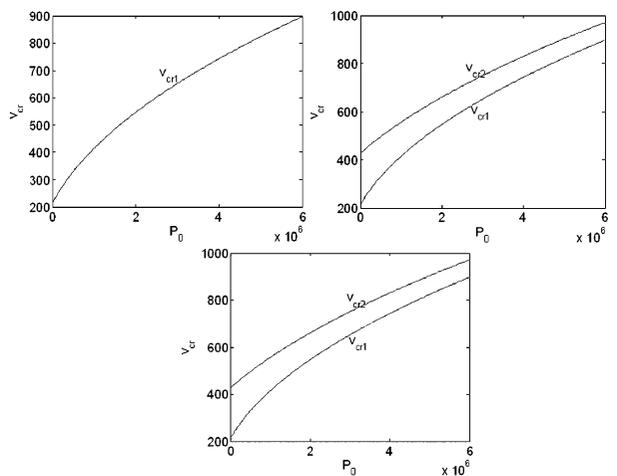


图7 初始轴力对临界速度的影响

Fig.7 The effect of axial tension on critical velocity

图7给出了夹心层厚度为0.08m时 Galerkin 截断法以及复模态分析法求出的系统的临界速度随初始轴力的变化情况. 由图7可以看出随初始轴力的增加, 系统的临界速度增加, 说明系统发生失稳的速度将提前.

3.7 模态函数

图8给出了夹心层厚度为0.08m时三种方法所对应的模态函数.

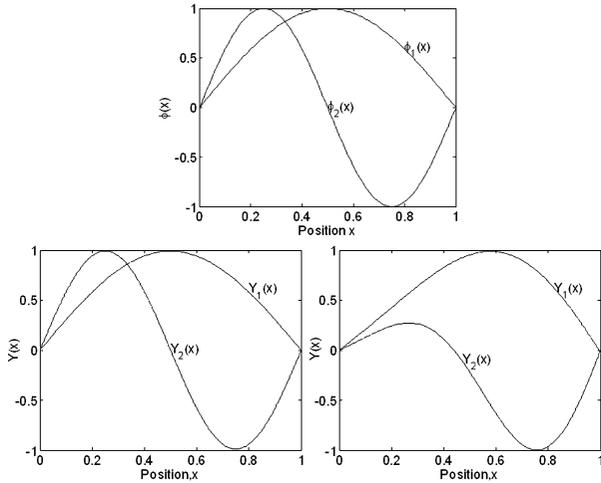


图8 模态函数

Fig. 8 Mode function

4 结论

本文通过研究小挠度下轴向匀速运动粘弹性夹层梁的横向振动, 得到如下结论:

(1) 粘弹性项对系统的固有频率和稳定性影响不大;

(2) 在未超过临界速度前, 无论一阶、二阶 Galerkin 截断还是复模态分析, 在定性描述系统特征上三者相同, 但一阶截断不适合描述轴向运动速度超过临界速度的情形;

(3) 当轴向运动速度小于一阶临界速度时, 固有频率随轴向运动速度的增加而减小; 随夹心层厚度的增加而减小; 随轴力的增加而逐渐减小;

(4) 当速度大于二阶临界速度小于发生耦合模态颤振的速度时, 一阶固有频率随轴向运动速度的增加而增加;

(5) 临界速度随着夹心层厚度的增加先增加后减小, 随轴力的增加而增加.

参 考 文 献

- 1 Mote C D Jr. A study of band saw vibration. *Journal of the Franklin Institute*, 1965, 279(6): 430 ~ 444
- 2 Mote C D Jr. On the non-linear oscillation of an axially moving string. *Journal of Applied Mechanics*, 1966, 33(2): 463 ~ 464
- 3 Mote C D Jr. Dynamic stability of axially moving materials. *Shock and Vibration Digest*, 1972, 4(4): 2 ~ 11
- 4 Chen L Q, Yang X D. Vibration and stability of an axially moving viscoelastic beam with hybrid supports. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2006, 25(6): 996 ~ 1008
- 5 Yang X D, Chen L Q. Non-linear forced vibration of axially moving viscoelastic beams. *Acta Mechanica Sinica*, 2006, 19(4): 365 ~ 373
- 6 Amse W F, Lee S Y, Zaiser J N. Non-linear vibration of a traveling threadline. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 1968, 3(4): 449 ~ 469
- 7 Thurman A L, Mote C D Jr. Free, periodic, non-linear oscillation of an axially moving strip. *Journal of Applied Mechanics*, 1969, 36(1): 83 ~ 91
- 8 Tabarrok B, Leech C M, Kim Y I. On the dynamics of an axially moving beam. *Journal of Franklin Institute*, 1974, 297(3): 201 ~ 220
- 9 Wickert J A, Mote C D Jr. Classical vibration analysis of axially continua. *Journal of Applied Mechanics*, 1990, 57(3): 738 ~ 744
- 10 Wickert J A. Non-linear vibration of a traveling tensioned beam. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 1992, 27(3): 503 ~ 517
- 11 Stylianou M, Tabarrok B. Finite element analysis of an axially moving beam, Part I: time integration. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, 178(4): 433 ~ 453
- 12 Oz H R, Pakdemirli M, Ozkaya E. Transition behavior from string to beam for an axially accelerating material. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 215(3): 571 ~ 576
- 13 Oz H R, Pakdemirli M. Vibration of an axially moving beam with time dependent velocity. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 227(2): 239 ~ 257
- 14 Lv H W, Li Y H, Liu Q K, Li L. Analysis of transverse vibration of axially moving viscoelastic sandwich beam with time-dependent velocity. *Advanced Materials Research*, 2011, 338: 487 ~ 490
- 15 杨晓东. 轴向运动粘弹性梁的横向振动分析[博士学位

位论文]. 上海:上海大学出版社,2009:22 (Yang X D.
Analysis of transverse vibration of axially moving viscoelas-

tic beam [PhD Thesis]. Shanghai: Shanghai University
Press, 2009 (in Chinese))

TRANSVERSE VIBRATION OF AXIALLY MOVING VISCOELASTIC SANDWICH BEAM *

Lv Haiwei^{1†} Li Yinghui¹ Liu Qikuan² Li Liang¹

(1. School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

(2. Department of Mathematics, Kunming University, Kunming 650214, China)

Abstract The transverse vibration of an axially moving viscoelastic sandwich beam with small deflection was investigated. Based on the Kelvin differential constitutive equation, the transverse controlling equation was established. The eigenfunctions of the axially moving viscoelastic sandwich beam with simple supported boundary condition were obtained by using Galerkin truncation and complex mode analysis. The influence of the ratio of the core layer, axially moving velocity and axial tension on the natural frequencies and critical velocity were discussed by using numerical method.

Key words viscoelastic sandwich beam, transverse vibration, galerkin truncation, multiple scales method, stability

Received 27 June 2012, revised 3 July 2012.

* The project supported by the Natural Science Foundation of China (11072204), the Fundamental Research Funds for the Central Universities (SWJTU11ZT15) and Research Project Funds of Kunming University for introducing the talent (YJL12005)

† Corresponding author E-mail: lvhaiwei007@163.com