

# 共线三球链问题的碰撞动力学研究\*

栗鹏<sup>†</sup> 姚文莉

(青岛理工大学理学院, 青岛 266520)

**摘要** 共线三球链的碰撞动力学问题能够展示多刚体系统碰撞问题的困难之一:非唯一解的问题. 本文建立了三球链碰撞的 Hertz 接触模型, 研究对其求解的数值算法, 并用有限元模型(FEM)对其进行验证, 研究表明:同线性模型比较, 采用 Hertz 接触力模拟小球之间的接触力更接近有限元计算结果; 在 Hertz 接触模型基础上, 分析碰撞过程中接触力的变化过程; 研究刚度比和质量比对于碰撞结束后各个小球运动状态的影响, 并研究了两种刚体模型下碰撞次序假设成立的条件.

**关键词** 多体系统, 多点碰撞, 恢复系数, Hertz 接触, 有限元

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-067

## 引言

如何正确描述多体系统碰撞问题已成为众多研究领域的基础性研究, 包括航空航天、机器人技术、机械工程等等, 因此具有重要的理论意义和实际意义.

对于单点碰撞, 利用动量守恒和能量守恒定律就可以描述单点碰撞问题的动力学行为, 为考虑碰撞中由于相互作用引起算的能量损失时, 一般引进恢复系数来描述碰撞过程的不连续性. 把上述的理论运用到多点碰撞时, 由于缺少足够的动力学方程, 使得在确定碰撞后质点动力学状态时遇到一些刚体动力学模型难以克服的困难. 共线三球链的碰撞问题看来起非常简单, 但可以展示上述多体系统多点碰撞问题中的基本困难.

当三个小球之间的碰撞时, 若选用恢复系数模型, 根据碰撞不同次序, 则得到不同的结果. 三个完全相同的小球并列在一条直线上, 用初始速度为  $V$  小球  $B_1$  去撞击静止的小球  $B_2$  和  $B_3$ , 假设碰撞过程是完全弹性的. 困难出现在: 因  $B_2$  和  $B_3$  的相对速度为零, 无法采用现有定义的恢复系数.

为在经典的刚体碰撞动力学框架下解决此问题, 需要引入碰撞次序的假设. 若碰撞依次进行, 则碰撞结束后各个小球的运动状态为:  $V'_1 = 0, V'_2 =$

$0, V'_3 = V$ ; 若碰撞同时进行, 则碰撞结束后各个小球的运动状态为:  $V'_1 = -V/3, V'_2 = 2V/3, V'_3 = 2V/3$ ; 不同的碰撞次序假设将导致不同的结果, 这还是两种最简单的情况.

很多学者显示了对该问题的兴趣, Han<sup>[1]</sup> 等基于 Routh 图形化方法提出了处理多点碰撞问题的分析方法, 但是该方法导致了相同的初始条件出现多个可能解的奇异性情况. Stronge<sup>[2]</sup> 比较详细地介绍刚体多点碰撞的动力学模型. Hurmuzlu<sup>[3]</sup> 提出‘动量比’参数刻画多质点碰撞问题, 其方法在由有限个小球组成的多点碰撞实验中得到了验证. 马炜<sup>[4]</sup> 等用线性弹簧研究在给定的初始条件下三个小球之间的碰撞, 给出解析解, 研究不同的质量比, 刚度比对于碰撞后各个小球之间的分离模式的影响. 上述文献的理论均建立在线性接触模型的基础上. D. T. Spasic<sup>[5]</sup> 等用弹性 Hertz 理论的假设和 Johnson 粘附力的模型建立三个小球之间的碰撞, 给出模型的半解析解, 其侧重于求解的过程, 并未给出模型的依据及进一步的讨论.

本文运用弹性 Hertz 接触理论来建立三个小球之间的碰撞的动力学模型, 并用有限元软件去验证建立模型的正确性, 在此基础上, 分析碰撞过程中接触力的变化过程; 研究刚度比和质量比对于碰撞结束后各个小球运动状态的影响, 并研究了两种刚

2012-10-17 收到第 1 稿, 2013-06-20 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(10872118, 11272167), 山东省自然科学基金资助项目(ZR2010AM010)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: ywenli1969@sina.com

体模型下碰撞次序假设成立的条件.

## 1 三球链的 Hertz 接触力模型

三个小球  $B_1$ 、 $B_2$  和  $B_3$ , 质量和半径分别为  $m_i$  ( $i=1,2,3$ ) 和  $R_i$  ( $i=1,2,3$ ). 假设小球  $B_1$  用初始速度  $V_1$  去撞击小球  $B_2$ , 同时小球  $B_2$  和  $B_3$  静止在一条直线上, 并在初始时刻保持接触, 如图 1 所示. 假设每个小球初始时刻的位置记为位移原点, 若用  $x_1, x_2, x_3$  分别表示三个小球的位移, 则小球  $B_1$  和  $B_2$  之间的压缩量为  $\alpha_1 = x_1 - x_2$ , 小球  $B_2$  和  $B_3$  之间的压缩量  $\alpha_2 = x_2 - x_3$ . 设小球  $B_1$  和  $B_2$  之间的接触刚度为  $K$ , 小球  $B_2$  和  $B_3$  之间的接触刚度为  $\gamma K$ , 假设小球之间的接触模型为 Hertz 弹性接触模型.

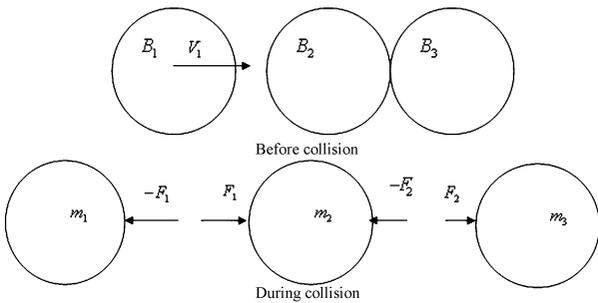


图 1 三球链的接触力模型

Fig. 1 three balls chain contact force model

则小球  $B_1$  对于  $B_2$  的接触力  $B_2$  和  $B_3$  小球对于的接触力分别为:

$$\begin{aligned} F_1 &= K\alpha_1^{3/2} \\ F_2 &= \gamma K\alpha_2^{3/2} \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $K = \frac{4}{3} R^{1/2} E^*$ ,  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ,  $\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E^1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E^2}$ .

则根据牛顿第二定律得:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -K(x_1 - x_2)^{3/2} \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= K(x_1 - x_2)^{3/2} - \gamma K(x_2 - x_3)^{3/2} \\ m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= \gamma K(x_2 - x_3)^{3/2} \end{aligned} \quad (2)$$

则碰撞有初始条件:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, \frac{dx_1}{dt} = V_1, \frac{dx_2}{dt} = 0, \frac{dx_3}{dt} = 0.$$

上述常微分方程没有解析解, 只能对其进行数值解. 上面三个二次常微分方程组可以化简为六个

一次常微分方程组.

令  $v_i = \dot{x}_i$ , ( $i=1,2,3$ ), 则化简后的方程组为:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= V_1, \frac{dx_2}{dt} = V_2, \frac{dx_3}{dt} = V_3 \\ \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{1}{m_1} K(x_1 - x_2)^{3/2} \\ \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{1}{m_2} K(x_1 - x_2)^{3/2} - \frac{1}{m_2} \gamma K(x_2 - x_3)^{3/2} \\ \frac{dv_3}{dt} &= \frac{1}{m_2} \gamma K(x_2 - x_3)^{3/2} \end{aligned} \quad (3)$$

则初始条件变为:

$$\begin{aligned} x_1|_{t=t_0} &= 0, \quad x_2|_{t=t_0} = 0, \quad x_3|_{t=t_0} = 0 \\ v_1^- &= \frac{dx_1}{dt} \Big|_{t=t_0} = V_1, \quad v_2^- = \frac{dx_2}{dt} \Big|_{t=t_0} = 0, \\ v_3^- &= \frac{dx_3}{dt} \Big|_{t=t_0} = 0 \end{aligned}$$

上述微分方程组适合于小球  $B_1$  与  $B_2$  和小球  $B_2$  与  $B_3$  同时接触, 若在碰撞过程中有一个小球脱离接触, 则上述微分方程组就不再适用.

如果当  $\alpha_1 = 0$  时, 此时时间为  $t^*$ , 小球  $B_1$  和  $B_2$  脱离接触, 它们之间的碰撞结束, 小球  $B_1$  在此以后做匀速直线运动, 则以后的微分方程组变为:

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= v_2, \quad \frac{dx_3}{dt} = v_3 \\ \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{1}{m_2} \gamma K(x_2 - x_3)^{3/2}, \quad \frac{dv_3}{dt} = \frac{1}{m_3} \gamma K(x_2 - x_3)^{3/2} \end{aligned} \quad (4)$$

这时初始条件变为:  $x_2 = x_2(t^*)$ ,  $x_3 = x_3(t^*)$ ,

$v_2 \Big|_{t=t^*} = \frac{dx_2}{dt} \Big|_{t=t^*}$ ,  $v_3 \Big|_{t=t^*} = \frac{dx_3}{dt} \Big|_{t=t^*}$ . 当用此微分方程(4)算出  $\alpha_2 = 0$  时, 小球  $B_2$  与  $B_3$  之间的碰撞结束, 则三个小球之间的碰撞结束.

如果当  $\alpha_2 = 0$  时, 此时时刻为  $t^{**}$ , 小球  $B_2$  与  $B_3$  脱离接触, 它们之间的碰撞结束, 小球  $B_3$  做匀速直线运动, 则在此以后的微分方程组变为:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= v_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = v_2 \\ \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{1}{m_1} K(x_1 - x_2)^{3/2}, \quad \frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{m_1} K(x_1 - x_2)^{3/2} \end{aligned} \quad (5)$$

在此以后的初始条件为:  $x_1 = x_1(t^{**})$ ,  $x_2 = x_2$

$(t^{**})$ ,  $v_1 \Big|_{t=t^{**}} = \frac{dx_1}{dt} \Big|_{t=t^{**}}$ ,  $v_2 \Big|_{t=t^{**}} = \frac{dx_2}{dt} \Big|_{t=t^{**}}$ . 当

用上述微分方程组求解时算出  $\alpha_1 = 0$  时,则小球  $B_1$  与  $B_2$  之间的碰撞也结束,至此三个小球之间的碰撞结束.

若用微分方程组(3)计算出在  $t^{***}$  时刻同时有  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,则说明三个小球的碰撞同时结束.

计算步骤:

1 先计算微分方程组(3)的数值解,判断是先有  $\alpha_1 = 0$  还是  $\alpha_2 = 0$  或者两者同时为  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .

2 若微分方程组(3)的数值解先有  $\alpha_1 = 0$ ,则记此时刻为  $t^*$ ,用微分方程组(3)算出此时各个小球的运动状态,小球  $B_1$  将以此时的速度做匀速直线运动;小球  $B_2$  与  $B_3$  以后的运动状态将满足方程组(4),初始条件为在  $t^*$  时刻的状态,用方程组(4)算出  $\alpha_2 = 0$  的时刻,计算此时刻的  $B_2$  与  $B_3$  的运动状态,则此时刻就是碰撞完全结束的时刻.

3 若微分方程组(3)的数值解先有  $\alpha_2 = 0$ ,同样按照步骤2,不过这时是小球  $B_3$  先和小球  $B_2$  脱离接触.

4 若先有  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,则在  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  的时刻就是碰撞结束的时刻,就是三个小球同时脱离接触.

在微分方程组(3)(4)(5)中有质量比和刚度比这两个参数,所以固定初始条件,研究不同的刚度比和质量比对于碰撞过程各个小球的状态的影响.

## 2 有限元模型(FEM)

由于小球是轴对称的,而且速度的方向沿球对称轴上,碰撞过程中不考虑摩擦力,所以可以把三球链模型建成轴对称模型,在建立模型时三个小球只允许在对称轴方向上运动.在有限元软件 ABAQUS 建立如图2所示的模型.由于碰撞的时间

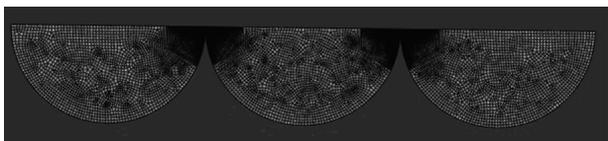


图2 三球链的有限元模型(FEM)

Fig. 2 three balls chain finite element model(FEM)

短、接触力的变化快,在 ABAQUS 中使用 Explicit 求解器进行求解.由于碰撞接触区域的应力变化快而且大,对其接触区域进行细化.在建模型时,固定初始速度和三个小球的半径,分别研究不同的密度和弹性模量对于碰撞过程的影响,也就是质量的变化和刚度的变化对于碰撞过程中的影响.

## 3 三球链碰撞过程的接触力分析:

设小球  $B_1$  的初始速度  $V_1 = 5\text{m/s}$ ,三个小球的半径为  $0.1\text{m}$ ,泊松比  $\nu = 0.3$ ,设小球  $B_2$  和  $B_3$  的质量一样,记为  $\beta = m_1/m_2 = m_1/m_3$ .那么就研究刚度比  $\gamma$  和质量比  $\beta$  对于碰撞过程中各个小球的状态的影响.在计算画图时由于压缩量的值非常小,选择用压缩量对应的接触力来表示.(以后在图中的  $F(1-2)$  表示碰撞过程中  $B_1$  对于  $B_2$  的接触力,  $F(2-3)$  表示碰撞过程中  $B_2$  对于  $B_3$  的接触力,  $v_1, v_2, v_3$  分别表示小球  $B_1, B_2, B_3$  的速度)

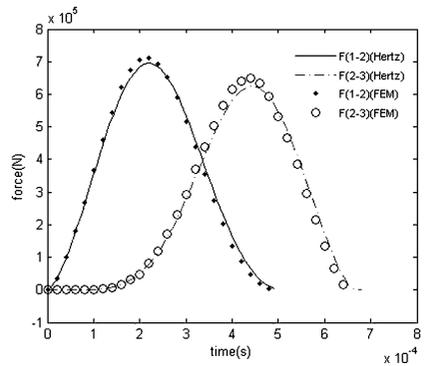


图3 小球之间的接触力

Fig. 3 the contact forces between three balls

图3表示在  $\gamma = 1$  和  $\beta = 1$  的情况下碰撞过程中接触力随时间的变化.通过上图可以看到用 Hertz 接触力建立的模型与用有限元模型(FEM)计算的结果几乎吻合,可以验证用弹性 Hertz 接触力建立三球链模型的有效性.可以得到大约在  $t = 0.00049\text{s}$  时小球  $B_1$  与  $B_2$  小球脱离接触,而小球  $B_2$  和  $B_3$  接续接触,大约在  $t = 0.00067\text{s}$  时小球  $B_2$  和  $B_3$  脱离接触,此时碰撞才真正的结束.

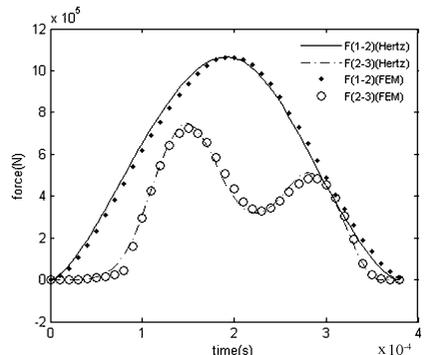


图4 小球之间的接触力

Fig. 4 the contact forces between three balls

图4表示在  $\gamma = 50.5$  和  $\beta = 1$  的情况下,接触

力随时间的变化. 通过图形可以得到: Hertz 接触力模型和有限元模型计算的结果几乎一样; 大约  $t = 0.00039\text{s}$  在时, 三个小球几乎同时分离.

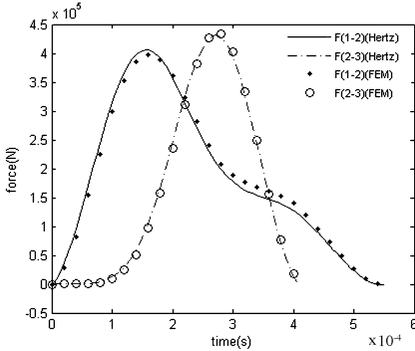


图5 小球之间的接触力

Fig. 5 the contact forces between three balls

图5表示在  $\gamma = 1$  和  $\beta = 4$  的情况下碰撞过程中接触力随时间的变化. 可以得到在小球  $B_2$  和小球  $B_3$  先分离, 然后小球  $B_1$  与小球  $B_2$  再脱离接触, 而且 Hertz 接触模型和有限元模型的结果几乎是吻合的.

通过以上分析可以得到: 在建立 Hertz 接触模型时, 假设碰撞过程是准静态的, 通过上面的比较也是可以得到的, 因此对于三个小球的之间的碰撞在碰撞过程中由于应力波而损失的能量可以忽略不计. 由此说明用 Hertz 接触模型建立三球链的力学模型更符合实际. 下面就研究小球之间的刚度比和质量比对于碰撞后的运动状态的有影响.

## 4 不同参数对于碰撞后的速度的影响

### 4.1 刚度比对于碰撞后速度的影响

图6表示小球  $B_1$  的初始速度  $V_0 = 5\text{m/s}$ , 三个小球质量一样的情况下, 碰撞后各个小球的速度与刚度比的关系. 可以得知, 三个小球的质量一样的情况, 不管刚度比有多大, 小球  $B_1$  肯定反弹; 而且随着刚度比的增大, 小球  $B_1$  的反弹速度很快趋近于  $-V_0/3$ , 可以看到在小球  $B_2$  和  $B_3$  并没有都趋向于  $2V_0/3$ , 而是在  $2V_0/3$  附近出振荡, 这时由于  $B_2$  和  $B_3$  之间的弹性引起的, 在马炜<sup>[4]</sup> 研究中用线性弹簧来表示接触力, 可以得知随着刚度比的增大, 小球  $B_2$  和  $B_3$  很快趋向于  $2V_0/3$ , 这与 Hertz 接触力模型是有区别的, 但是在  $\gamma \rightarrow +\infty$  时, 用线性接触力和 Hertz 接触力模型算出的结果近似等于恢复系数模型的同时碰撞假设的结果. 在  $\gamma \rightarrow 0$  时, 可以

推测小球  $B_1$  和  $B_2$  的碰撞后的速度趋近于 0, 小球  $B_3$  的碰撞后的速度趋近于  $V_0$ , 这与线性接触力模型的结果几乎是一样的. 因此可以得到: 在刚度大于 150 和小于 1 的时候, 用 Hertz 接触力和线性接触力的模型计算的结果相差不大, 而且可以用恢复系数模型的两种假设去近似计算; 但是在中间情况下, Hertz 接触力和线性接触力模型计算的结果有很大区别, 这就需要用 Hertz 接触力来建立共线三球链碰撞的动力学模型.

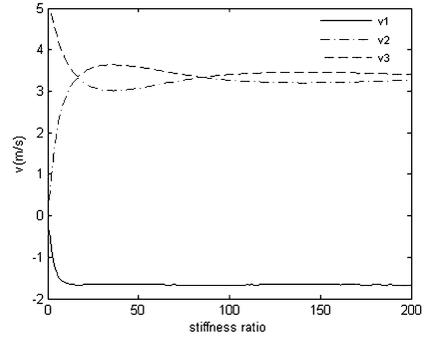


图6 三个小球的速度

Fig. 6 the speeds of three balls

### 4.2 质量比对于碰撞后的速度的影响

图7和图8表示小球  $B_1$  的初始速度  $V_0 = 5\text{m/s}$ ,

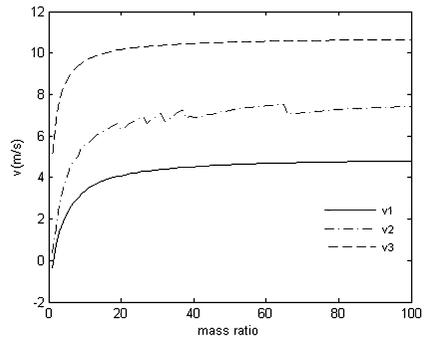


图7 三个小球的速度

Fig. 7 the speeds of three balls

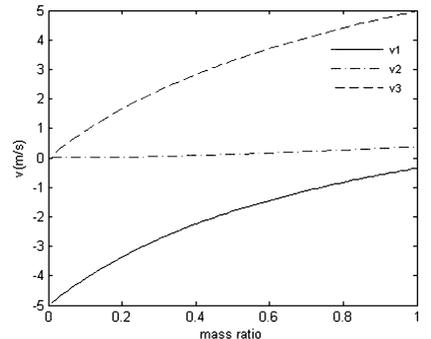


图8 三个小球的速度

Fig. 8 the speeds of three balls

小球之间的刚度比一样的情况,碰撞后的速度随质量比的变化.通过图7可以得知:随着 $\alpha$ 的增大,小球 $B_2$ 和 $B_3$ 的速度增加很快,最后趋近于平稳,而小球 $B_1$ 的速度方向将不再发生变化,而且趋近于 $V_0$ ,此时若用恢复系数模型的两种假设计算得到的结果将与上面的结果有很大的差别.通过图8可以得知:随之 $\alpha$ 的减小,小球 $B_1$ 的速度趋近于 $-V_0$ ,小球 $B_3$ 的速度也趋近于零,小球 $B_1$ 相当于撞上一个固定面,而且可以观察到小球 $B_2$ 的速度几乎接近于零,此时小球 $B_2$ 可以看成是静止的,说明在 $\alpha$ 小于1时,可以用恢复系数模型的依次碰撞假设计算碰撞后的运动状态.

## 5 结论

建立三球链碰撞的Hertz接触模型,给出其数值算法,并用有限元对其进行验证,得到如下结论:(1)同线性接触力模型相比较,小球之间碰撞的接触力用Hertz接触力更符合实际;(2)研究了刚度比和质量比对于碰撞结束后各个小球运动状态的影响,给

出碰撞恢复系数模型的两种假设的适用范围.

## 参 考 文 献

- 1 Han I, Gilmore B J. Multi-body impact motion with friction-Analysis, simulation and experimental validation. *ASME Journal of Mechanical Design*, 1993, 115: 412 ~ 422
- 2 Stronge W J. Impact mechanics. Cambridge University Press, 2000: 182 ~ 198
- 3 Ceanga V, Hurmuzlu Y. A newlook at an old problem: Newton's cradle. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2001: 575 ~ 583
- 4 马炜, 刘才山. 三质点共线碰撞问题的理论分析. 力学学报, 2006(5): 674 ~ 681 (Ma W, Liu C S. Theoretical analysis of the three balls system with multiple impact. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006(5): 674 ~ 681 (in Chinese))
- 5 Spasic D T, Atanavkovic T M. A model for three spheres in colinear impact. *Archive of Applied Mechanics*, 2001, 71: 327 ~ 340

# STUDY ON COLLINEAR COLLISION DYNAMICS OF THE THREE - BALL CHAIN \*

Li Peng<sup>†</sup> Yao WenLi

(School of Science, Qingdao Technological University, Qingdao 266520, China)

**Abstract** One of the difficulties of the problem of collisions of multi-body system is non-unique solution. To overcome this problem the three-ball chain collision was modeled by Hertz contact and a numerical algorithm is proposed to solve the contact model. The finite element model was used to verified it. Based on the Hertz model, the change of the contact forces is analyzed during the collision process. The effect of the stiffness ratio and mass ratio on the state of motion of each ball after the collision, and the established condition of two girid body models collision orders were studied. Research shows compared with linear model, the contact forces between three balls by Hertz model are closer to the finite element results.

**Key words** mutli-body system, mutli-point collision, coefficient of restitution, Hertz contact, finite element

Received 17 October 2012, revised 20 June 2013.

\* The project supported by the National Science Foundation of China (10872118, 11272167) and the Science Foundation of Shandong Province (ZR2010AM010)

<sup>†</sup> Corresponding author E-mail: ywenli1969@sina.com