

人致人行桥侧振的非线性分析*

镇斌^{1†} 徐鉴²

(1. 三峡大学水利与环境学院, 宜昌 443002) (2. 同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092)

摘要 从非线性动力学角度分析了 Nakamura 模型中各参数对周期振动的影响, 揭示了人行桥侧振过程中各因素: 如桥上行人重量, 同步人群的比例, 行人同步与桥自振频率之间的关系描述函数等如何影响桥侧振的振幅. 理论分析和实测数据发现: 桥侧向振幅过大时, 描述行人产生的侧向力与桥频率关系的函数不一定为 1.0, 且完全有可能远离 1.0.

关键词 Nakamura 模型, 人行桥, 侧振, 同步

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-021

引言

随着建筑材料的更新和桥梁施工工艺的进步, 现代城市中的人行桥已朝着高强、轻质和大跨的方向发展. 而于此同时却发现越来越多的人行桥对行人荷载比较敏感, 侧向方向上尤为明显. 实测表明桥上行人所产生的动力荷载的显著频率范围约为 1.5 - 2.5 Hz^[1], 而很多现代人行桥自振频率低于 3 Hz, 因此桥极有可能与行人共振而产生较大的振幅, 从而影响行人的安全或者行走时的舒适性. 迄今为止, 这类振动并未发现危及桥梁本身的安全. 伦敦千禧桥是第一个因侧向振动过大而被迫关闭的例子. 对千禧桥的封闭实测研究发现^[2], 这种过大的侧向振动并非千禧桥独有, 也与千禧桥采用的新技术无关, 任何侧向振动频率低于 1.3 Hz 的桥都有可能足在足够数量的行人的激励下产生类似的过大侧向振动. 现在人们已经意识到在人行桥设计阶段就应该考虑如何避免这类振动问题.

经过十多年的研究, 目前认为人行桥侧向振动的机理大致可以分为三类^[3]: 直接共振^[4], 内共振^[4,5]和动力相互作用^[2,6-9]. 直接共振在桥的侧向振动频率和桥上行人的激励频率比较接近时容易出现, 如日本的 T-桥^[4]. 如果直接共振条件成立且桥的竖向和侧向模态频率之比为 2:1, 则桥由于结构的非线性特性可能出现内共振, 如巴黎的

Solferino 人行桥^[10]. 动力相互机理因为可以引入临界人数的概念^[2]在最近几年得到了广泛而全面的研究. Dallard 等^[2]基于实测数据认为千禧桥上行人产生的侧向力和桥的速度成线性关系, 并给出了第一个实用的计算模型. 但 Dallard 的线性模型是发散的, 当桥梁侧向响应过大时与实际观测相去甚远. Nakamura^[6]为弥补 Dallard 模型的缺陷假设只在桥速度较小时行人侧向力才与桥速度成正比, 而当桥速度较大时, 行人由于感到不安全或不舒适而减低自身速度甚至停止行走, 因此桥的侧向响应不会发散. 但 Nakamura 模型中的参数都需要通过实测来确实, 因而不能直接应用于设计阶段. Strogatz 等^[9]经过足够的简化用正弦函数描述行人产生的侧向力, 从数学角度而言所获得的结果更加精细, 但由于超越函数的出现造成了模型实际工程应用中不够方便. Macdonald^[8]借鉴生物力学领域中的一个简单人体平衡模型来描述人-桥的相互作用. 相比以前的模型, Macdonald 的模型对行人侧向力的描述更加合理, 但由于参数取值的原因数值模拟和实测结果不能完全一致. 因此 Macdonald 模型如要应用到实际工程还需要结合更多的实测数据加以修正. 综上所述, 尽管目前描述人-桥相互作用的模型很多, 但由于人致人行桥侧振问题的复杂性^[7], 目前还没有既严谨又精确的统一模型.

由于参数估算方便, 模型简单易用等特点, Na-

2012-06-24 收到第 1 稿, 2012-07-10 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11002103), 国家自然科学基金重点项目(11032009)和上海市学科带头人计划资助项目(B302)

† 通讯作者 E-mail: zb-2000@163.com

kamura 模型在实际工程中获得了广泛应用. Nakamura 模型是将桥视作一个单自由度振子, 而桥上行人对桥的作用力整体简化为对桥的速度反馈. 为确定模型中参数的具体取值范围 Nakamura 进行了大量的实测工作. 但由于人致人行桥侧振测试数据不足, 有些参数甚至无法给定, 如模型中 $G(f_B)$ 函数. 文献[11]中假设 $G(f_B) = 1.0$ 用 Nakamura 模型数值模拟得到的结果比实测结果普遍(80%左右)偏大, Nakamura 认为是由于其它测量数据的误差造成. 本文研究的目的是从非线性动力学角度分析出 $G(f_B)$ 函数对侧向振动振幅的影响, 指出 Nakamura 模型结果偏大的可能原因不一定只是由于参数测量上的误差引起. 本文还通过理论分析与实测数据比较推算 $G(f_B)$ 可能的取值范围, 从而对 $G(f_B)$ 函数的实测提供一定的指导.

本文组织如下: 第一部分介绍 Nakamura 模型; 第二部分对 Nakamura 模型进行分岔分析, 讨论 $G(f_B)$ 函数对系统周期振幅的影响; 第三部分通过理论分析和实测数据对比推测 $G(f_B)$ 可能的范围; 最后一部分给出结论.

1 Nakamura 模型介绍

Nakamura 认为当梁以一种特殊的侧向模态振动时, 行人引起桥的侧向振动可以用一个单自由度振动模型来描述^[6]:

$$M_B \ddot{x}_B + C_B \dot{x}_B + K_B x_B = F_p(t) \tag{1}$$

其中,

$$F_p(t) = k_1 k_2 H(\dot{x}_B) G(f_B) M_p g,$$

$$H(\dot{x}_B) = \frac{\dot{x}_B}{k_3 + |\dot{x}_B|},$$

$x_B, \dot{x}_B, \ddot{x}_B$ 分别是桥的模式位移、速度和加速度; M_B, C_B, K_B 是桥的模式质量、阻尼和刚度. F_p 是桥上行人对桥的侧向力, 假设其与行人的模式自重 $M_p g$ 成正比, k_1 为比例系数. k_2 为桥面上与桥侧振速度同步的行人所占百分比. 函数 $H(\dot{x}_B)$ 用于描述行人的同步特性. 该函数形式基于如下假设: 在桥侧振速度 \dot{x}_B 较小时, 行人对桥的侧向作用力与 \dot{x}_B 成正比; 当桥侧振速度 \dot{x}_B 增大, 行人感到不舒适或不安全从而减少对桥的侧向作用. 因此, 桥的响应不会无限增加而是将被限制在一有界范围内. $G(f_B)$ 用于描述桥的结构频率对行人同步的影响, 目前已有实测数据不足, 该值无法确定, 还不清楚其

变化对桥侧振的影响.

Nakamura 建议 $H(\dot{x}_B)$ 为分数形式, 为方便讨论, 本文用 $\tanh(k_{30} \dot{x}_B)$ 函数代替. 如图 1 所示, 可知 \tanh 函数完全满足 Nakamura 对 $H(\dot{x}_B)$ 函数的假定.

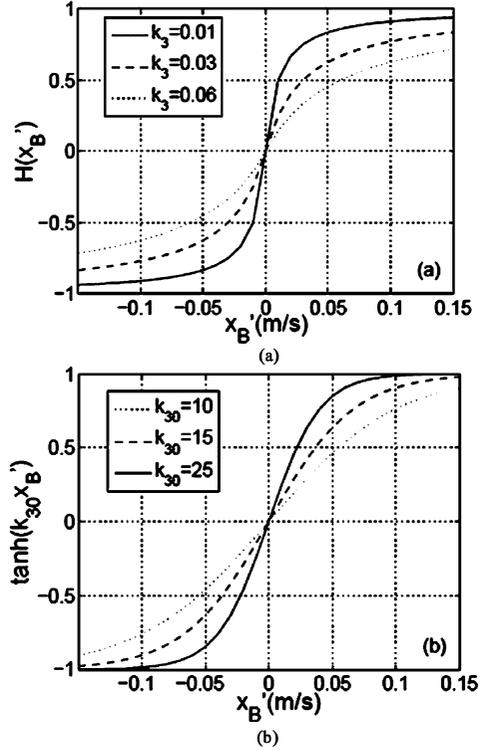


图 1 (a) k_3 对 $H(\dot{x}_B)$ 的影响 (b) k_{30} 对 $\tanh(k_{30} \dot{x}_B)$ 的影响

Fig. 1 (a) The influence of k_3 on $H(\dot{x}_B)$

(b) The influence of k_{30} on $\tanh(k_{30} \dot{x}_B)$

因此, 将(1)写为

$$M_B \ddot{x}_B + C_B \dot{x}_B + K_B x_B = k_1 k_2 \tanh(k_{30} \dot{x}_B) G(f_B) M_p g \tag{2}$$

2 Nakamura 模型的分岔分析

人行桥持续侧振的产生对应于 Nakamura 模型中的 Hopf 分岔. 本文将通过 Hopf 分岔分析来讨论 $G(f_B)$ 函数对侧振振幅的影响. 令 $y_1 = x_B, y_2 = \dot{x}_B$, 考虑到实际桥梁侧向振动速度很小, 所以(2)可写为:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -k_B y_1 + (G(f_B) k_1 k_2 k_4 k_{30}^3 - c_B) y_2 - \frac{G(f_B) k_1 k_2 k_4 k_{30}^3}{3} y_2^3 + O(y_2^5) \end{cases} \tag{3}$$

其中, $k_4 = \frac{M_p g}{M_B}, k_B = \frac{K_B}{M_B}, c_B = \frac{C_B}{M_B}, O(y_2^5)$ 为 y_2 的五次以上高次项. 显然 $(0, 0)$ 是系统(3)的唯一平衡点, 在此平衡点附近系统(3)的特征方程为:

$$\lambda^2 + \frac{W}{M_B}\lambda + \frac{K_B}{M_B} = 0 \tag{4}$$

其中, $W = c_B - G(f_B)k_1k_2k_4k_{30}$.

方程(4)的两个根为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \frac{W \pm \sqrt{W^2 - 4M_BK_B}}{M_B},$$

根据参数的实际物理意义,系统(3)中所有的参数都为正. 因此,方程(4)没有零特征根. 当 $W = 0$ 时,方程(4)恰有一对纯虚特征根 $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k_B}$. 方程(4)两边对 W 求导,有

$$\left(\frac{d\lambda}{dW}\right)_{W=0} = -\frac{1}{2M_B} < 0,$$

因此根据 Hopf 分岔定理,系统在 $W = 0$ 附近将发生 Hopf 分岔,从而产生一个极限环. 这对应于桥侧向周期振动的发生. 根据系统(1)的实际物理意义,产生的极限环必然是稳定的. 实际上,令 $u =$

$$y_1, \nu = -\frac{1}{\sqrt{K_B}}y_2, \text{系统(3)写为}$$

$$\begin{cases} \dot{u} = -\sqrt{k_B}\nu \\ \dot{\nu} = \sqrt{k_B}u + F \end{cases} \tag{5}$$

$$\text{其中, } F = -\frac{G(f_B)k_1k_2k_4k_{30}^3}{3}k_B\nu^3 + O(\nu^5).$$

$W = 0$ 时,系统(5)的第一 Lyapunov 系数可以算得

$$l_1(0) = \frac{1}{16} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial u^2 \partial \nu} + \frac{\partial^3 F}{\partial \nu^3} \right) + \frac{1}{16\sqrt{k_B}} \left[-\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial \nu} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \nu^2} \right) \right] = -\frac{1}{8} G(f_B)k_1k_2k_{30}^3k_4k_B = -\frac{1}{8}$$

$$c_Bk_Bk_{30}^2 < 0$$

这表明 Hopf 分岔时出现在 $W = 0$ 附近的极限环是稳定的.

下面考虑当 W 远离零时系统(3)的动力学行为. 假设系统(3)中存在极限环 Γ , 则沿 Γ 的特征指数

$$h_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial(y_2)}{\partial y_1} + \frac{\partial(-k_By_1 - c_By_2 + G(f_B)k_1k_2k_4 \tanh(k_{30}y_2))}{\partial y_2} \right] dt = \frac{1}{T} \int_0^T [-c_B + G(f_B)k_1k_2k_4k_{30}[1 - \tanh(k_{30}y_2)^2]] dt \tag{6}$$

其中 T 为闭轨的周期. y_2 为桥侧向振动的速度,有

界. 由图 1 可知 $|\tanh(k_{30}y_2)| \leq 1$ 恒成立,所以当 $W > 0$ 时,必有 $h_0 < 0$. $h_0 < 0$ 意味着系统(3)如果此时存在极限环,则极限环稳定. 而 $W > 0$ 时(3)唯一的零平衡点渐进稳定,这意味着它的外围不可能存在稳定的极限环,这说明此时系统(3)不可能存在极限环. 当 $W < 0$ 时,(3)唯一的零平衡点不稳定,又 y_1, y_2 有界,则(3)中必存在稳定的极限环.

根据能量法^[12],可以求得系统(1)在 $W < 0$ 附近近似周期解的表达式

$$x(t) = a^* \left\{ \cos \sqrt{k_B}t + \frac{6W + k_B G(f_B)k_1k_2k_4k_{30}^3(a^*)^2}{72\sqrt{k_B}} [3\sin(\sqrt{k_B}t) - \sin(3\sqrt{k_B}t)] \right\} \tag{7}$$

$$\text{其中 } a^* = \frac{2}{k_{30}^2\sqrt{k_B G(f_B)k_1k_2k_4}}$$

3 $G(f_B)$ 函数的估算

为说明上一节分析的正确性,首先对系统(1)采用如下参数来进行数值模拟^[11]:

$$\begin{aligned} M_B &= 2.14 \times 10^5 \text{ (kg)}, K_B = 7.31 \times 10^5 \text{ (kg/s}^2\text{)}, \\ C_B &= 2.83 \times 10^4 \text{ (kg/s)}, M_{Pg} = 1.50 \times 10^5 \text{ (N)}, \\ k_1 &= 0.0987, k_2 = 0.2, k_3 = 18. \end{aligned}$$

根据(7)得到的解析解和对系统(1)直接数值模拟得到的结果的比较如图 2,3 所示. 这表明上一节关于系统(1)的定性定量分析是正确的.

根据上一节的分析, $G(f_B)$ 可令 $W = 0$ 来求得,即 $G(f_B) = \frac{c_B}{k_1k_2k_{30}k_4} = \frac{C_B}{k_1k_2k_{30}M_{Pg}}$. 按文献[11],考虑表 1 中的参数,分别计算 $G(f_B)$.

由表 1 中参数反算 $G(f_B)$ 的值可知, $G(f_B)$ 的取值范围应在 0 到 1.0 之间,且 $G(f_B)$ 与 f_B 之间不太可能是简单的线性关系.

表 1 文献[11]中的桥梁参数

Table 1 The parameters of bridges in literature [11]

Section	T-1	M-1	M-4
k_1	0.0987	0.1251	0.1227
k_2	0.2	0.21	0.2
$k_3 (k_{30})$	0.01(18)	0.01(18)	0.01(18)
M_p (ton)	14.969	3.350	2.469
C_B (ton/s)	28.262	3.387	2.905
f_B (Hz)	0.9	1.025	0.879
$G(f_B)$	0.542	0.218	0.271

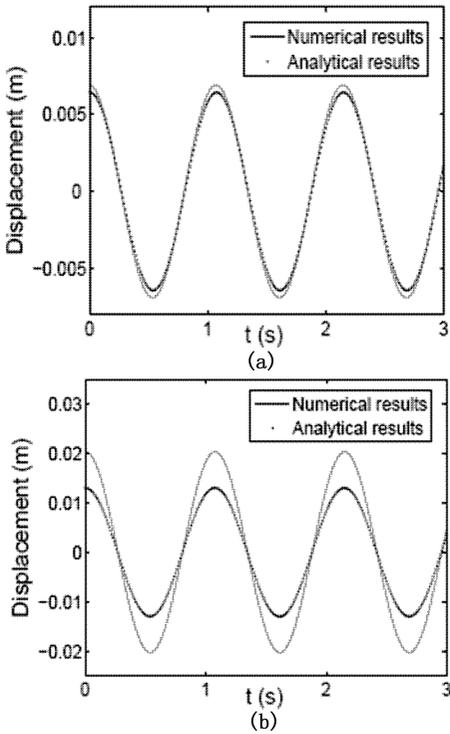


图2 系统(1)周期解的解析解和数值解的比较
(a) $G(f_B) = 0.6$ (b) $G(f_B) = 1.0$

Fig.2 The comparison of periodic solution of system (1) obtained by numerical method and analytical solution
(a) $G(f_B) = 0.6$ (b) $G(f_B) = 1.0$

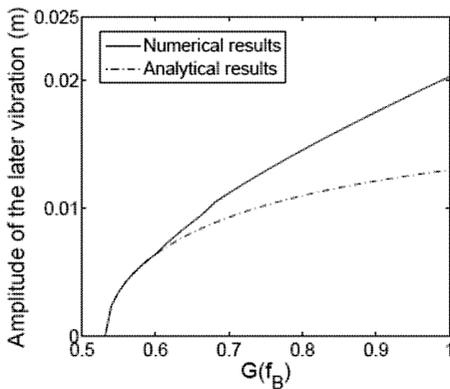


图3 系统(1)周期解振幅的解析解和数值解的比较

Fig.3 The comparison of amplitudes obtained by numerical method and analytical solution in system (1)

4 讨论

Nakamura 由于实测数据的缺乏,无法确定 $G(f_B)$ 的值. 考虑到目前发现产生过大侧向振动的桥的自振频率总在 1.0Hz 附近,当行人产生的侧向力的频率接近 1.0 时响应最大,远离 1.0 时响应变小,因此 Nakamura 假定了 $G(f_B) = 1.0$ 是发生侧向振动的最不利值. 但由此按照表 1 中参数对系统(1)模

拟得到的振幅总比实测的值要大很多(最大偏差为 49%). 本文通过对 Nakamura 模型的分岔分析估算了 $G(f_B)$ 函数可能的范围. 尽管文献[11]中实测桥梁的自振频率也在 1.0Hz 左右,但根据表 1 中的计算结果在系统(1)中取 $G(f_B) = 1.0$ 是值得商榷的. $G(f_B)$ 对 f_B 的变化规律可能比较复杂,按照表 1 的计算结果不一定是简单的离 1.0 近 $G(f_B)$ 就大,而离 1.0 远 $G(f_B)$ 就小,且当桥产生过大侧向振动时, $G(f_B)$ 也有可能远离 1.0.

参 考 文 献

- Pachi A, Ji T. Frequency and velocity of people walking. *The Structural Engineering*, 2005,83(3):36~40
- Dallard P, Fitzpatrick A J, Flint A, Bourva S Le, Low A, Ridsdill S R, Willford M. The London Millennium footbridge. *The Structural Engineer*, 2001,79:17~33
- Piccardo G, Tubino F. Parametric resonance of flexible footbridges under crowd-induced lateral excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 2008,311:353~371
- Fujino Y, Pacheco B M, Nakamura S, Warnitchai P. Synchronization of human walking observed during lateral vibration of a congested pedestrian bridge. *Earthquake Engineering and Structural Dynamical*, 1993,22:741~758
- Blekherman A N. Swaying of pedestrian bridges. *Journal of Bridge Engineering*, 2005,10:142~150
- Nakamura S. Model for lateral excitation of footbridges by synchronous walking. *Journal Structural Engineering ASCE*, 2004,130:32~37
- Zivanovic S, Pavic A, Reynolds P. Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation; a literature review. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 279:1~74
- Macdonald J H G. Lateral excitation of bridge by balancing pedestrians. *Proceeding The Royal Society*, 2008:1~19
- Strogatz S H, Abrams D M, Microbie F A, Eckhardt B, Ott E. Crowd synchrony on the Millennium Bridge. *Nature*, 2005,438:43~44
- Danbon F, Grillaud G. Dynamic behaviour of a steel footbridge: characterization and modeling of the dynamic loading induced by moving crowd on the Solferino Footbridge in Paris. In *Proceeding Footbridge*, 2005
- Nakamura S, Kawasaki T. A method for predicting the lateral girder response of footbridges induced by pedestrians. *Journal of Constructional Steel Research*, 2009, 65:

1705 ~ 1711

strongly nonlinear system (I)-Autonomous systems. *Non-linear Dynamics*, 1996,9:223 ~ 247

12 Li L. Energy method for computing periodic solutions of

NONLINEAR ANALYSIS ON THE LATERAL VIBRATION OF A FOOTBRIDGE INDUCED BY PEDESTRIANS *

Zhen Bin^{1†} Xu Jian²

(1. College of Hydraulic & Environmental Engineering, China Three Gorges University, Yichang 443002, China)

(2. School of Aerospace and Mechanics Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract This paper presented a nonlinear analysis for Nakamura's model to investigate the influence of parameters, including the weight of pedestrians, the ratio of synchronized pedestrians, the function describing how pedestrians synchronize with the bridge natural frequency, etc. on lateral vibration amplitude of a footbridge. Theoretical analysis and numerical simulations indicate that the function describing how pedestrians synchronize with the bridge natural frequency may not be equal to 1.0 and can be far away from 1.0 even though the lateral vibration is excessive. The results are helpful for the application of Nakamura's model in engineering practice and can provide references for field measure.

Key words Nakamura's model, footbridge, lateral vibration, synchronization

Received 24 June 2012, revised 10 July 2012.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11002103), the State Key Program of National Natural Science of China (11032009) and Shanghai Leading Academic Discipline Project (B302)

† Corresponding author E-mail: zb-2000@163.com