

自治混沌系统普适广义投影同步理论及应用*

张丽丽¹ 雷友发^{2†}

(1. 广东工业大学应用数学学院, 广州 510090) (2. 仲恺农业工程学院计算科学学院, 广州 510225)

摘要 针对自治混沌系统, 基于系统稳定性理论, 通过设计合适的非线性反馈控制器, 给出了普适的广义投影同步定理. 定理中函数的选择可以为系统的线性或非线性函数, 更具灵活性和普适性; 文中理论还可以通过调整参数提高广义投影同步的速度. 数值仿真进一步验证了本文理论的有效性和实用性.

关键词 广义投影同步, 自治混沌系统, 非线性反馈, 数值仿真

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-032

引言

自从 Pecora 和 Carrol 提出混沌同步以来, 混沌同步的研究便成为非线性科学领域的前沿课题之一, 其在物理、生物工程、医学和信息科学等领域都有巨大的应用潜力. 在众多领域的研究中, 已经提出了许多不同类型的同步方法^[1-13]. 近来出现了一种新的混沌系统广义投影同步方法^[10-12], 该方法将投影同步和广义同步结合起来, 通过改变广义同步的比例因子, 获得任意比例于驱动系统输出的混沌信号. 广义投影同步由于其在数字保密通信方面有广泛的应用, 值得深入研究.

本文针对自治混沌系统, 提出了普适的广义投影同步定理, 根据 Lyapunov 稳定性理论给予了严格证明, 并以 Chua 电路混沌系统为例进行数值仿真. 本文定理中函数 f 的选择不仅可以选取系统的线性部分, 也可以选取系统的非线性部分, 具有更广泛的应用范围和应用前景. 同时, 通过调整参数 σ 可以有效改变广义投影同步的速度. 数值仿真进一步验证了本文理论的有效性. 事实上, 文中理论适用于所有自治混沌系统.

1 广义投影同步理论

考虑驱动系统和响应系统分别为(1)和(2):

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \quad (1)$$

$$\dot{y} = f(y) + u \quad (2)$$

其中 $x \in R^n, f, g: R^n \rightarrow R^n, u \in R^n$ 为同步控制器. 取 $0 \neq \alpha \in R$, 对于驱动系统(1)和响应系统(2), 任取初始值, 若使

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x - \alpha y\| = 0 \quad (3)$$

成立, 则称系统(1)和(2)获得广义投影同步^[18].

定义系统(1)和(2)的同步误差为 $e = x - \alpha y$, 则误差系统为:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \alpha \dot{y} \\ &= f(x) + g(x) - \alpha f(y) - \alpha u \end{aligned} \quad (4)$$

定理: 若向量函数 f 的选取满足: 对任意的 $x, z \in R^n$, 都存在常数 $\gamma \geq 0$, 使得

$$(x - z)^T (f(x) - f(z)) < \gamma (x - z)^T (x - z)$$

成立, 则取同步控制器

$$u = \frac{1}{\alpha} (f(\alpha y) + g(x)) - f(y) + \frac{\sigma}{\alpha} (x - \alpha y) \quad (5)$$

此时, 响应系统(2)的形式为:

$$\dot{y} = \frac{1}{\alpha} f(\alpha y) + \frac{1}{\alpha} g(x) + \frac{\sigma}{\alpha} (x - \alpha y) \quad (6)$$

其中式(5)和(6)中的 σ 满足 $\sigma > \gamma$, 且 σ 越大, 系统(1)和系统(6)实现广义投影同步的速度越快.

证明: 设 f, u 的选取满足定理, 则误差系统(4)为

$$\dot{e} = \dot{x} - \alpha \dot{y} = f(x) - f(\alpha y) - \sigma (x - \alpha y)$$

取 Lyapunov 函数 $V = \frac{1}{2} e^T e$, 则 $V \geq 0$ 且等号当

且仅当 $e = 0$ 时成立,

2012-05-17 收到第 1 稿, 2012-09-09 收到修改稿.

* 广东工业大学青年教师基金资助项目(062053)

† 通讯作者 E-mail: leiyoufa@qq.com

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{e}^T \dot{\mathbf{e}} = (x - \alpha y)^T (f(x) - f(\alpha y)) - \\ &\quad \sigma (x - \alpha y)^T (x - \alpha y) \\ &\leq (\gamma - \sigma) (x - \alpha y)^T (x - \alpha y) < 0 \end{aligned} \quad (7)$$

由 Lyapunov 稳定性理论知系统(1)和系统(6)实现了广义投影同步. (7)式同时表明: σ 越大, V 的变化率的绝对值就越大, e 趋于零的速度就越快, 两系统(1)和(6)实现广义投影同步的时间就越短.

2 广义投影定理的应用

设驱动系统为光滑 Chua 电路系统^[13]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 - x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -\beta x_1 \\ \dot{x}_3 = k(x_1 - x_3 - bx_3 - \frac{(a-b)}{\pi} \arctan(5x_3)) \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\beta = 15, k = 10$, 取 $f(x) = [-x_1, -x_2, -\frac{k(a-b)}{\pi} \arctan(5x_3)]^T$, 则 $g(x) = [x_2 + x_3, -\beta x_1 + x_2, k(x_1 - x_3 - bx_3)]^T$, 取 $a = -1.2, b = -0.2$, 则对任意的 $x, z \in \mathbf{R}^3$, 存在 ξ 介于 $5x_3$ 和 $5z_3$ 之间, 使得

$$\begin{aligned} &(x - z)^T (f(x) - f(z)) \\ &= -(x_1 - z_1)^2 - (x_2 - z_2)^2 - \\ &\quad \frac{k(a-b)}{\pi} (x_3 - z_3) [\arctan(5x_3) - \arctan(5z_3)] \\ &= -(x_1 - z_1)^2 - (x_2 - z_2)^2 - \\ &\quad \frac{5k(a-b)}{\pi} \frac{1}{1 + \xi^2} (x_3 - z_3)^2 \\ &\leq (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \\ &\quad \left| \frac{5k(a-b)}{\pi} \right| \frac{1}{1 + \xi^2} (x_3 - z_3)^2 \\ &\leq \left(1 + \left| \frac{5k(a-b)}{\pi} \right| \frac{1}{1 + \xi^2} \right) \sum_{i=1}^3 (x_i - z_i)^2 \\ &\leq \left(1 + \left| \frac{5k(a-b)}{\pi} \right| \right) (x - z)^T (x - z) \end{aligned}$$

取 $\sigma > 1 + \left| \frac{5k(a-b)}{\pi} \right|$, 由定理知与(8)广义投影同步的响应系统为:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_1 + \frac{1}{\alpha} (x_2 + x_3) + \frac{\sigma}{\alpha} (x_1 - \alpha y_1) \\ \dot{y}_2 &= -y_2 + \frac{1}{\alpha} (-\beta x_1 + x_2) + \frac{\sigma}{\alpha} (x_2 - \alpha y_2) \\ \dot{y}_3 &= -\frac{k(a-b)}{\pi \alpha} \arctan(5\alpha y_3) + \end{aligned}$$

$$\frac{k}{\alpha} (x_1 - x_3 - bx_3) + \frac{\sigma}{\alpha} (x_3 - \alpha y_3) \quad (9)$$

取广义投影同步比例因子 $\alpha = -3, \sigma = 20 > 1 + \frac{5k(a-b)}{\pi}$, 选取初值

$$x_0 = [0.0265, 0.602, -0.1630]^T$$

$$y_0 = [-0.0795, -0.1806, 0.4890]^T,$$

数值仿真如下:

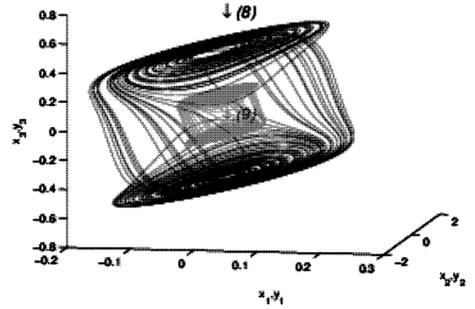


图1 系统(8)和(9)的相空间同步图

Fig. 1 The phase graphs of generalized projective synchronization system (8) and (9)

从图1光滑 Chua 电路系统(8)和其广义投影同步的响应系统(9)的相空间图看, 两系统实现了广义投影同步.

在图2中, 实线和虚线分别表示光滑 Chua 电路系统(8)和广义投影同步的响应系统(9)的状态输出变化, 该图表明, 两系统实现了广义投影同步.

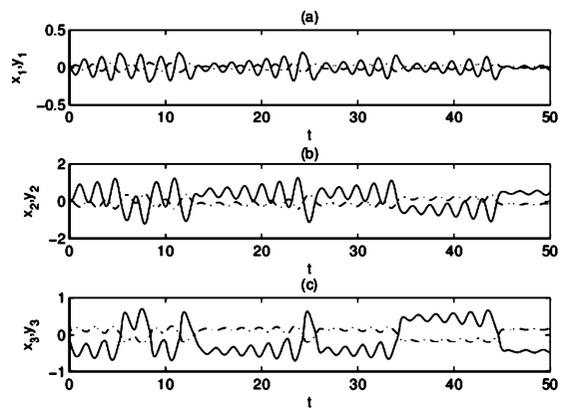


图2 系统(8)和(9)的状态输出变化图

Fig. 2 The time evolution of all the state variables of (8) and (9)

图3和图4是光滑 Chua 电路系统(8)和广义投影同步的响应系统(9)的同步误差曲线图, 两图表明该两系统实现了广义投影同步. 图3和图4同时表明, σ 越大, 驱动系统和响应系统实现广义投影同步的速度越快.

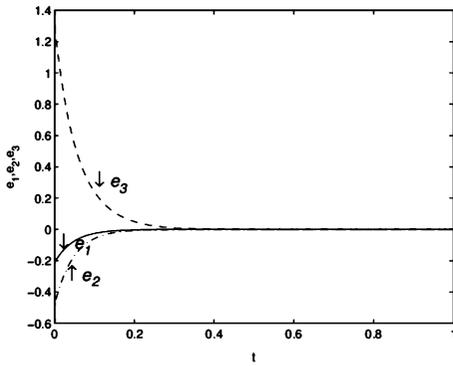


图3 $\sigma = 20$ 时系统(8)和系统(9)同步误差图

Fig.3 The time evolution of the synchronous error of $\sigma = 20$

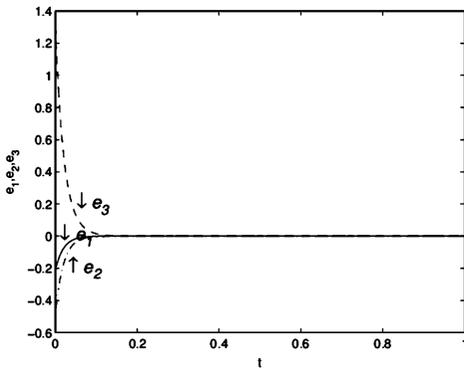


图4 $\sigma = 50$ 时系统(8)和系统(9)同步误差图

Fig.4 The time evolution of the synchronous error of $\sigma = 50$

事实上,文中理论对自治混沌系统都适用,只要选择函数

$$f = [\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n]^T, 0 > \lambda_i \in R$$

函数 f 即满足定理,从而可以由定理实现驱动系统的广义投影同步。

3 结论

本文基于 Lyapunov 稳定性理论,针对自治混沌系统,设计了合适的非线性反馈控制器,给出了广义投影同步理论,同时,通过调整参数 σ 可以有效提高广义投影同步的速度,并给予了严格证明。数值仿真进一步验证了本文理论的有效性。本文定理中函数 f 的选择既可以选取系统的线性部分,也可以选取系统的非线性部分,因此具有更广泛的应用范围和应用前景。

参 考 文 献

- 1 杨涛,邵惠鹤. 一类混沌系统的同步方法. 物理学报, 2002,51(4):742~748(Yang T, Shao H H. Synchronization for a class of chaotic systems. *Acta Physica Sinica*, 2002,51(4):742~748(in Chinese))
- 2 王兴元,孟娟. 超混沌系统的广义同步化. 物理学报, 2007,56(11):6288~6293(Wang X Y, Meng J. Generalized synchronization of hyperchaos systems. *Acta Physica Sinica*, 2007,56(11):6288~6293(in Chinese))
- 3 Lu J H, Zhou T S, Zhang S C. Chaos synchronization between linearly coupled chaotic systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2002,14:529~541
- 4 陶朝海,陆君安. 混沌系统的速度反馈同步. 物理学报, 2005,54(11):5058~5061(Tao C H, Lu J A. Speed feedback synchronization of a chaotic system. *Acta Physica Sinica*, 2005,54(11):5058~5061(in Chinese))
- 5 Wang Qi. Bidirectional partial generalized synchronization in chaotic and hyperchaotic systems via a new scheme. *Communications in Theoretical Physics*, 2006,45:1049~1056
- 6 Yan J P, Li C P. Generalized projective synchronization for the chaotic Lorenz system and the chaotic Chen system. *Journal of Shanghai University(English Edition)*, 2006,10(4):299~304
- 7 Chen S H, Lv J H. Synchronization of an uncertain unified chaotic system via adaptive control. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2002,14:643~647
- 8 张丽丽,雷友发. 一类不同维混沌广义同步系统的构造定理及其应用. 动力学与控制学报, 2009,7(4):324~327. (Zhang L L, Lei Y F. Construction of generalized synchronization for a kind of chaos systems of different dimensions and applications. *Journal of Dynamics and Control*, 2009,7(4):324~327(in Chinese))
- 9 张丽丽,雷友发. 数组微分方程组广义同步系统理论研究. 系统工程与电子技术, 2006,28(7):1067~1069(Zhang L L, Lei Y F. Theory study on generalized synchronization for array differential equations and its application. *Systems Engineering and Electronics*, 2006,28(7):1067~1069(in Chinese))
- 10 闵富红,王执铨. 两个四维混沌系统广义投影同步. 物理学报, 2007,56(11):6238~6244(Min F H, Wang Z Q. Generalized projective synchronization of two four-dimensional chaotic systems, *Acta Physica Sinica*, 2007,56(11):6238~6244(in Chinese))
- 11 李农,李建芬. 基于单驱动变量的混沌广义投影同步及在保密通信中的应用. 物理学报, 2008,57:6094~6098(Li N, Li J F. Generalized projective synchronization for a class of chaotic systems via a new scheme. *Communications in Theoretical Physics*, 2006,45:1049~1056)

- tion of chaotic system based on a single driving variable and its application in secure communication. *Acta Physica Sinica*, 2008, 57:6094 ~ 6098 (in Chinese))
- 12 陶洪峰, 胡寿松. 参数未知分段混沌系统的时滞广义投影同步. *物理学报*, 2011, 60(1):010514 (Tao H F, Hu S S. Time-delayed generalized projective synchronization of piece-wise chaotic system with unknown parameters. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(1):010514 (in Chinese))
- 13 Zhang X D, Zhang L L, Min L Q. Construction of generalized synchronization for a kind of array differential equations and applications. *Chinese Physics Letters*, 2003, 20(12):2114 ~ 2117

THEOREM OF GENERALIZED PROJECTIVE SYNCHRONIZATION FOR ANY AUTONOMOUS CHAOTIC SYSTEMS AND APPLICATIONS*

Zhang Lili¹ Lei Youfa^{2†}

(1. School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China)

(2. College of Computational Science, Zhongkai University of Agriculture and Engineering Guangzhou 510225, China)

Abstract Based on the stability theory of the dynamical system, the theorem of generalized projective synchronization (GPS) for any autonomous chaotic systems was proposed, where suitable nonlinear feedback controllers were designed. The choice of the function is more feasible and flexible, because it can either be the linear function or nonlinear one. One can also improve the speed of GPS by adjusting the parameter. Numerical simulations illustrate the effectiveness of the theorem.

Key words generalized projective synchronization, autonomous chaotic system, nonlinear feedback, numerical simulation