

阻尼对泡沫夹芯梁非线性振动响应的影响*

田磊 吴莹[†] 王铁军

(西安交通大学航天学院机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049)

摘要 基于 Euler - Bernoulli 梁理论、Hamilton 原理以及 Galerkin 方法, 建立了大变形悬臂夹芯梁在横向周期载荷作用下的二阶动力学方程; 通过考虑外周期激励的不同频率与幅值, 详细分析了材料阻尼比对泡沫铝夹芯梁的振动响应的影响. 结果表明, 泡沫夹芯结构具有较好的阻尼性能, 可有效抑制梁的混沌振动.

关键词 泡沫铝夹芯梁, 动力学建模, 阻尼, 分岔, 混沌

引言

泡沫金属具有轻、高比强度、高比刚度等特性, 同时具有优良的吸声、减噪、吸能等性能. 泡沫及其夹芯结构在航空、航天、高铁、汽车、舰船等领域具有广泛应用. 飞机的起落架、高速磨床防护装置、机动车防冲减振部件及装甲冲击防护层等都利用了泡沫金属的阻尼吸能特性^[1,2]. 泡沫金属阻尼吸能特性可有效地将系统的机械能转变为热能, 减小振动, 有效减少磨损, 延长使用寿命, 同时还可起到很好的隔声降噪作用. 因此, 研究泡沫金属阻尼相关性能具有重要意义.

目前, 人们已经对泡沫夹芯结构的静态载荷、冲击载荷响应做了大量研究. 秦庆华和王铁军等^[3-7]研究了对称金属泡沫夹芯结构的屈服条件、变形和冲击响应. 秦庆华和王铁军等^[7]研究了非对称金属泡沫夹芯结构的屈服条件与大挠度静态响应. Lee^[8]以最小加速度原理为基础, 建立了夹芯结构的动力学控制方程, 利用有限差分方法有效地描述板梁的刚塑性、弹塑性响应. 张伟等^[9]研究了蜂窝夹层板的非线性动力学问题.

本文通过建立泡沫夹芯梁的几何非线性动力学方程, 研究阻尼比对受横向周期激励作用的轻质, 泡沫夹芯梁非线性动力学特性的影响.

1 泡沫夹芯梁的非线性动力学模型

考虑一长为 l 的悬臂泡沫夹芯梁, 如图 1 所

示, 其中, x 和 z 分别为横纵坐标, h_f 和 h_c 分别为夹芯梁的表板及芯材厚度, b 为梁宽. 夹芯梁的上下面板的弹性模量和密度分别为 E_f 和 ρ_f , 芯材的弹性模量和密度分别为 E_c 和 ρ_c , 横向振动阻尼系数为 η . 考虑横向周期激励 $F = f \cos \omega t$ 作用, 其中 f 和 ω 分别为外激励幅值和频率, t 为时间.

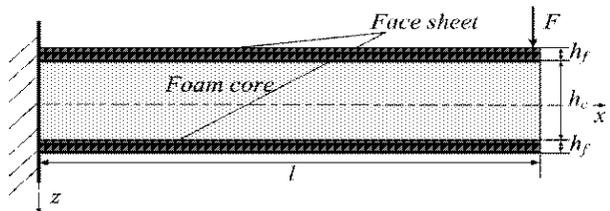


图 1 泡沫夹芯悬臂梁模型

Fig. 1 The sketch of foam sandwich cantilever beam

由 von Karman 意义下的梁板几何非线性理论可得梁的几何方程为:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1)$$

其中, ϵ_x 为轴向应变, $u(x, t)$ 和 $w(x, t)$ 分别为梁的纵向变形和横向变形.

芯材和本构方程分别为:

$$\sigma_x = E_c \epsilon_x \quad (2a)$$

和

$$\sigma_x = E_f \epsilon_x \quad (2b)$$

其中, σ_x 为轴向应力.

由(1)和(2)式可得梁的轴力 N 和弯矩 M 如下:

$$N = \int_s \sigma_x dS = A \frac{\partial u}{\partial x} + B \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (3)$$

2012-04-26 收到第 1 稿, 2012-06-09 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目 (10972179, 11021202)

[†] 通讯作者 E-mail: wuying36@mail.xjtu.edu.cn

$$M = \int_s \sigma_x z dS = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4)$$

其中,

$$A = 2bh_f E_f + bh_c E_c$$

$$B = bh_f E_f + \frac{1}{2}bh_c E_c$$

$$D = \frac{E_f bh_f^3}{6} + \frac{E_c bh_c^3}{12} + \frac{E_f bh_f d^2}{2}$$

$$d = h_f + h_c$$

基于 Euler - Bernoulli 梁理论,忽略梁振动时的纵向、轴向和转动惯性力,系统动能和弯曲变形能分别为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (5)$$

和

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^l (M\kappa + N\varepsilon) dx \quad (6)$$

外力功和粘性耗散能分别为

$$U_2 = - \int_0^l F(x, t) w dx \quad (7)$$

和

$$U_3 = \int_0^l \int_0^w \eta z dw dx \quad (8)$$

系统总势能为 $U = U_1 + U_2 + U_3$.

根据 Hamilton 原理,由变分方程 $\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0$ 可得:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \left(N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \right. \\ & \left. \eta \frac{\partial w}{\partial t} + F \right] \delta w dx dt + \int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial N}{\partial x} \delta u dx dt + \\ & \int_0^l m \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \Big|_{t_0}^{t_1} dx + \int_{t_0}^{t_1} \left(M \delta w' - \frac{\partial M}{\partial x} \delta w \right) \Big|_0^l dt - \\ & \int_{t_0}^{t_1} \left(N \delta u + N \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \right) \Big|_0^l dt = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

由 δw 和 δu 在 $[0, l]$ 上的任意性可得梁的控制方程为:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \eta \frac{\partial w}{\partial t} + F = 0 \quad (10a)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 0 \quad (10b)$$

其中: $m = 2\rho_f bh_f + \rho_c bh_c$.

由(10b)式可知,轴力沿梁长为常量.将式(3)关于 x 在 $[0, l]$ 上积分,并考虑其无轴向变形,可得:

$$N = \frac{B}{l} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (11)$$

进而,将(4)式和(11)式代入(10a)式,可得梁的动力学方程如下:

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial w}{\partial t} = F \quad (12)$$

其中: $P = - \frac{B}{l} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$

悬臂梁的边界条件可表示为:

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0, x = 0 \quad (13a)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, x = l \quad (13b)$$

取满足边界条件(13)的一阶位移模态:

$$w(x, t) = q(t) Y(x)$$

$$Y(x) = \sinh \beta x / l - \sin \beta x / l +$$

$$v_n (\cos \beta x / l - \cosh \beta x / l) \quad (14)$$

其中:

$$v_n = \frac{\sin \beta l + \sinh \beta l}{\cos \beta l + \cosh \beta l}, \quad \beta = 1.8751$$

将式(14)代入式(12)可得 Galerkin 变分方程,积分之可得系统的振动方程为:

$$m \ddot{q} + \eta \dot{q} + D \beta^4 q / l^4 + B \beta^4 q^3 / l^4 = 0.783 f \cos \omega t$$

进一步整理有

$$\ddot{q} + 2c \omega_0 \dot{q} + \omega_0^2 q + b q^3 = \bar{F} \cos \omega t \quad (15)$$

对应的状态方程为:

$$\dot{q}_1 = q_2 \quad (16a)$$

$$\dot{q}_2 = -2c \omega_0 q_2 - \omega_0^2 q - b q^3 + \bar{F} \cos \omega t \quad (16b)$$

其中, $c = \frac{\eta}{2m\omega_0}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{D\beta^4}{ml^4}}$, $b = \frac{B\beta^4}{ml^4}$, $\bar{F} = \frac{0.783f}{m}$.

2 结果与讨论

为了讨论泡沫夹芯梁的动力学特性,利用四阶龙格库塔法对上述方程进行数值求解.数值分析中,取 $l = 400\text{mm}$, $b = 20\text{mm}$, $h_c = 5\text{mm}$, $h_f = 1\text{mm}$.夹芯梁上下面板为铝,其弹性模量 $E_f = 69\text{GPa}$,密度 $\rho_f = 2690\text{kg/m}^3$.芯材为泡沫铝,其相对密度 $\rho_c/\rho_f = 0.1$,弹性模量比^[10]为 $E_c/E_f \approx \alpha_2 (\rho_c/\rho_f)^n$.根据文献[10],不失一般性地取 $\alpha_2 = 1$ 和 $n = 2$,可得芯材的质量密度 $\rho_c = 269\text{kg/m}^3$,弹性模量 $E_c = 0.69\text{GPa}$.

2.1 不同激励频率下阻尼对夹芯梁振动响应的影响
图2(a-d)为 $f = 2$ 情况下, q_2 关于阻尼比 c 的

分岔图. 可见, c 较小时, 梁的振动状态变化复杂, 周期与混沌振动交替出现. 当阻尼增大到某一值后, 系统将进入周期振动, 响应频率与激励频率一致, 表明阻尼对系统的混沌振动有明显的抑制作用. 当 $\omega = 100$ 时, $c = 0.003$ 时系统进入周期振动, 而当 $\omega = 1000$ 时, $c = 0.003$ 时, 系统仍处于明显混沌振动状态. 这表明, 随着激励频率的增大, 系统达到周期振动所需的阻尼值也增大.

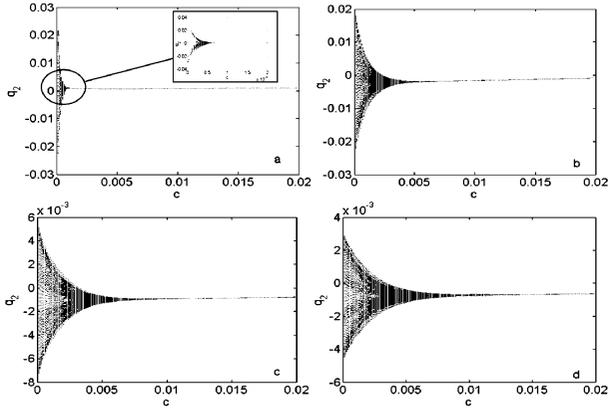


图 2 $f=2$ 时, q_2 关于 c 的分岔图

Fig. 2 Bifurcation diagram of q_2 vs c for $f=2$ and (a) $\omega = 100$, (b) $\omega = 500$, (c) $\omega = 800$ and (d) $\omega = 1000$

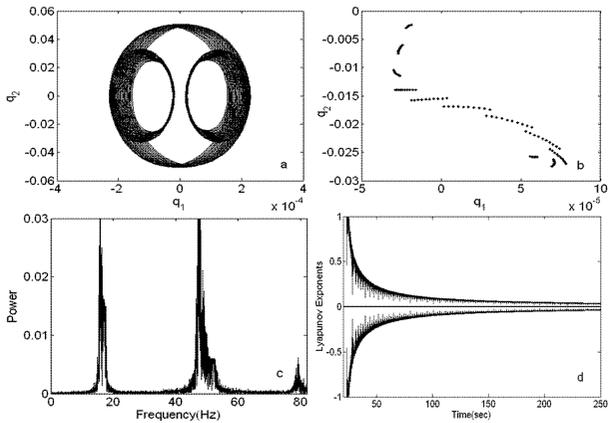


图 3 $f=2, \omega = 100, c = 0$ 时(a)相图, (b)Poincare 截面, (c)频率谱图, (d)Lyapunov 指数图

Fig. 3 (a)Phase diagram, (b)Poincare sections, (c)Power spectrum and (d)Lyapunov exponent for the system with, $f=2, \omega = 100$ and $c = 0$

图 3 为 $f = 2, \omega = 100, c = 0$ (即系统无阻尼) 时, 系统振动的相图、Poincare 截面图、频谱图和 Lyapunov 指数谱图. 可见, 系统的最大 Lyapunov 指数大于 0 (0.034296, 图 3d), 频率谱为宽带状谱 (图 3c), 相图具有破裂的环面特征 (图 3a)、Poincare 截面为无规则点集 (图 3b), 这表明系统振动处于混沌状态. 当 $f = 2, \omega = 100, c = 0.003$ 时, 系统

运动的相图、Poincare 截面图、频率谱和 Lyapunov 指数谱如图 4 所示, 可见, 最大 Lyapunov 指数为 0, 频谱图上仅出现一个尖峰, 相图为一个单环, Poincare 截面为一个单点, 此时系统做周期振荡.

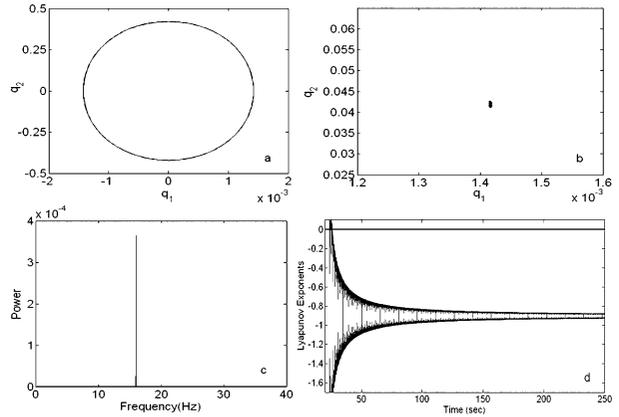


图 4 $f=2, \omega = 100, c = 0.003$ 时 (a)相图 (b) Poincare 截面图 (c)频率谱 (d) Lyapunov 指数图

Fig. 4 (a) Phase diagram, (b) Poincare sections, (c) Power spectrum and (d) Lyapunov exponent for the system with $f=2, \omega = 100$ and $c = 0.003$

2.2 不同激励幅值下阻尼对夹芯梁振动响应的影响

图 5 为 $\omega = 100$ 和不同阻尼比 c 时, q_2 关于 f 的分岔图. 随着激励幅值 f 增大, 系统实现周期振动所对应的阻尼比也明显增大. 当 $100 < f < 150$ 时, $c = 0.005$ 系统即可实现稳态周期振动, 如图 5b 所示. 当 $150 < f < 200$ 时, $c = 0.01$ 时系统才可以维持周期振动, 而当 $200 < f < 300$ 时, $c = 0.05$ 时系统才可以实现稳态周期振动, 如图 5d 所示. 总而言之, 激励幅值和阻尼对系统振动状态有巨大影响.

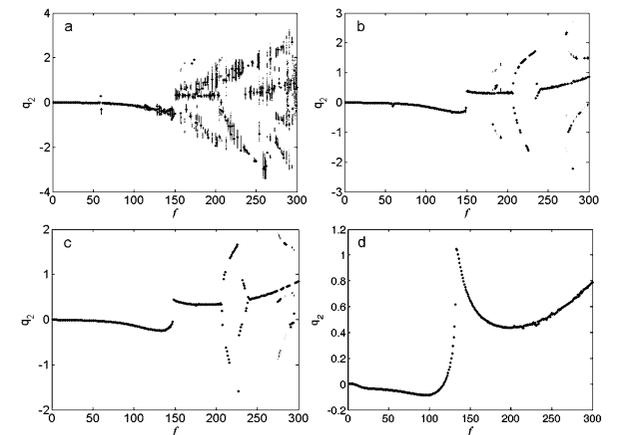


图 5 $\omega = 100$ 及不同阻尼比情况下, q_2 关于 f 的分岔图

Fig. 5 Bifurcation diagram of q_2 vs f for $\omega = 100$ and (a) $c = 0.001$, (b) $c = 0.005$, (c) $c = 0.01$ and (d) $c = 0.05$

另一个有趣的现象是, 在 $f = 150$ 处, 系统振动

响应状态发生了突变,而这一突变点与阻尼大小无关.为了进一步验证之,我们分别计算了 $\omega = 50$ 和 $\omega = 500$ 时, q_2 关于 f 的分岔图,如图6所示.图6a1 - a3为 $\omega = 50$ 时的 q_2 关于 f 的分岔图,很显然在 $f = 100$ 处系统振动状态发生了突变,此突变点也与阻尼大小无关;图6b1 - b3为 $\omega = 500$ 时的 q_2 关于 f 的分岔图,可见,在 $f = 50$ 处系统振动状态发生了突变,这也与阻尼大小无关.

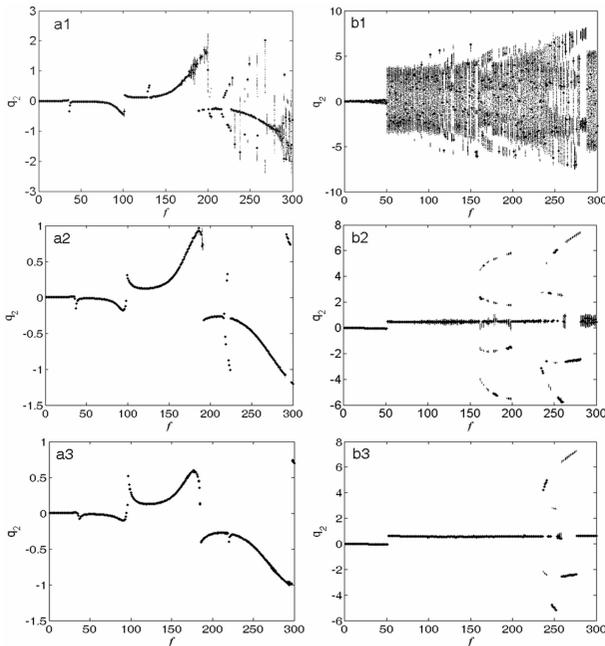


图6 不同激励频率和系统阻尼比情况下的 q_2 关于 f 的分岔图

Fig. 6 Bifurcation diagram of q_2 vs f for different frequency and damping ratios (a1) $c = 0.001$, $\omega = 50$ (a2) $c = 0.005$, $\omega = 50$ (a3) $c = 0.01$, $\omega = 50$; and (b1) $c = 0.001$, $\omega = 500$ (b2) $c = 0.005$, $\omega = 500$ (b3) $c = 0.01$, $\omega = 500$

综合图5和图6给出的结果可见,系统的振动状态会在某一外激励幅值处发生突变,突变点与激励频率有关,但与阻尼比无明显的对应关系.

3 结论

本文建立了悬臂泡沫夹芯梁的几何非线性动力学方程,分析了外激励幅值、频率和梁的阻尼比对泡沫夹芯梁振动特性的影响.主要结论如下:

(1) 阻尼比对系统的混沌振动有明显抑制作用.随着阻尼比的增大,系统混沌分岔现象明显减弱.当阻尼比大到一定值时,系统进入与外激励频率相同的周期振动状态.

(2) 同一激励幅值下,随着激励频率的增大,系统振动由混沌进入周期状态时对应的阻尼比越

大.

(3) 系统的振动状态会在某一外激励幅值处发生突变,突变点与激励频率有关,但与阻尼比无明显的对应关系.也就是说,系统振动状态的突变受激励频率的影响较大,而受阻尼的影响较小.

参 考 文 献

- Gibson L J, Ashby M F. 多孔固体的结构与性能. 北京:清华大学出版社, 2003 (Gibson L J, Ashby M F. Cellular solid: Structure and properties. Beijing: Tsinghua University Press, 2003 (in Chinese))
- 蒂吉斯切, 克雷斯特. 多孔泡沫金属. 北京: 化学工业出版社, 2005 (H P Degischer, Brigitte Kriszt. Porous foam metal. Beijing: Chemical Industry Press, 2005 (in Chinese))
- Qin Q H, Wang T J. A theoretical analysis of the dynamic response of metallic sandwich beam under impulsive loading. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2009, 28: 1014 ~ 1025
- Qin Q H, Wang T J. An analytical solution for the large deflections of a slender sandwich beam with a metallic foam core under transverse loading by a flat punch. *Composite Structures*, 2009, 88: 509 ~ 518
- Qin Q H, Wang T J. Low-velocity heavy-mass impact response of slender metal foam core sandwich beam. *Composite Structures*, 2011, 93: 1526 ~ 1537
- Qin Q H, Wang T J. Plastic analysis of metal foam core sandwich beam transversely loaded by a flat punch: combined local denting and overall deformation. *Journal of Applied Mechanics ASME Trans*, 2012, 79: 041010
- Qin Q H, Zhang J X, Wang T J. Large deflection of geometrically asymmetric metal foam core sandwich beam transversely loaded by a flat punch. *International Journal of Aerospace and Lightweight Structures*, 2011, 1: 23 ~ 46
- Lee L H N, Ni C M. A minimum principle in dynamics of elastic-plastic continua at finite deformation. *Archives of Mechanics*, 1973, 25(3): 457 ~ 468
- 孙佳, 张伟, 陈丽华等. 蜂窝夹层板的非线性动力学研究, 动力学与控制学报, 2008, 6(2): 150 ~ 155 (Sun J, Zhang W, Chen L H, et al. Nonlinear dynamics of the honeycomb sandwich plates. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(2): 150 ~ 155 (in Chinese))
- Gibson L J, Ashby M F. 泡沫金属设计指南. 北京: 冶金工业出版社, 2006 (Gibson L J, Ashby M F. Metal

foams: a design guide. Beijing: Metallurgical Industry Press, 2006 (in Chinese))

of aluminum foams materials. *Materials Science and Engineering A*, 1996, 205: 221 ~ 228

11 Banhart J, Baurneister J, Weber M. Damping properties

EFFECT OF DAMPING ON NONLINEAR VIBRATION OF METAL FOAM SANDWICH BEAM*

Tian Lei Wu Ying[†] Wang Tiejun

(*State key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

Abstract Based on Euler – Bernoulli beam theory, Hamilton's principle and Galerkin method, the second – order nonlinear ordinary differential dynamical equation was derived for the cantilever metal foam sandwich beam under transverse loading. The effect of damping on the vibration response of the metal foam sandwich beam was investigated for the cases of different frequencies and amplitudes of the transverse loading. It is shown that the chaotic vibration of the sandwich beam can be suppressed effectively by the damping performance of metal foam.

Key words sandwich beam, dynamics modelling, damping, bifurcation, chaos