

# 变形 Boussinesq 方程组的多辛 Preissmann 格式计算研究

王俊杰<sup>1,2</sup> 王连堂<sup>2</sup> 杨宽德<sup>1</sup>

(1. 思茅师范高等专科学校, 普洱 665000) (2. 西北大学数学系, 西安 710127)

**摘要** 基于 Hamilton 空间体系的多辛理论, 研究了变形 Boussinesq 方程组的数值解法. 利用 Preissman 方法构造离散多辛格式的途径, 并构造了一种典型的半隐式的多辛格式, 该格式满足多辛守恒律. 数值算例结果表明: 该多辛离散格式具有较好的长时间数值稳定性.

**关键词** 变形 Boussinesq 方程组, Preissmann 方法, 多辛守恒律

## 引言

由冯康先生开创的 Hamilton 系统的辛几何算法发展至今, 在理论上已较为完善. 由于这一算法具有长时间的数值稳定性, 能够很好地保持 Hamilton 系统的辛几何结构的性质, 在现代物理学和力学研究中发挥着重要作用. 在实际研究与实践中, 有许多问题需要进行长时间的数值模拟计算, 因此, 对具有长时间数值行为的辛算法的研究具有重要的理论与实际意义. 近年来, 孤立波方程定解问题的研究一直是科学研究的一个热门课题, 取得了丰硕的研究成果. 在许多物理领域, 特别是在浅水波非线性色散波的研究中具有重要意义. 本文研究一类具有重要意义的浅水波方程:

$$\begin{cases} H_t + (Hu)_x + u_{xxx} = 0 \\ u_t + H_x + uu_x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $u$  表示速度,  $h$  表示水深.

在文献[1-5]对系统(1)的解的定态问题做了一些研究, 但是这些研究都是给出系统(1)的部分精确解. 本文在第一节里验证了变形 Boussinesq 方程组具有 Hamilton 多辛格式, 并证实此格式具有多辛守恒律、局部能量守恒和动量守恒. 第二节给出了变形 Boussinesq 方程组的离散多辛 Preissmann 格式, 并证实此格式在离散格式下仍保持多辛守恒律. 在第三节里我们给出了变形 Boussinesq 方程组的离散多辛 Preissmann 格式的误差分析, 此格式具有误差  $o(\Delta t + \Delta x^2)$ , 在第四节给出了一个数值模拟, 验证了本文的算法不仅简单, 而且有长时间的

稳定性.

## 1 变形 Boussinesq 方程组多辛形式及守恒律

根据 Bridges 关于多辛的定义, 方程可以写成下列哈密顿偏微分方程的形式<sup>[6-13]</sup>:

$$Mz_t + Kz_t = \nabla_z S(z) \quad (2)$$

其中  $M, K \in R^{n \times n} (n \geq 3)$  是反对称矩阵.

$$S: R^n \rightarrow R$$

是光滑函数, 称为 Hamilton 函数.  $\nabla_z S(z)$  为函数  $S(z)$  的梯度.

(2) 满足多辛守恒律:

$$\frac{\partial}{\partial t} w + \frac{\partial}{\partial x} k = 0 \quad (3)$$

其中:  $w = \frac{1}{2} dz \wedge M dz, k = \frac{1}{2} dz \wedge K dz.$

(2) 具有能量守恒律:

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \frac{\partial}{\partial x} F = 0 \quad (4)$$

其中:  $E = S(z) - \frac{1}{2} z^T K z_x, F = \frac{1}{2} z^T K z_t.$

(2) 具有动量守恒律:

$$\frac{\partial}{\partial t} I + \frac{\partial}{\partial x} G = 0 \quad (5)$$

其中:  $I = \frac{1}{2} z^T M z_x, F = S(z) - \frac{1}{2} z^T M z_t.$

$E$  为能量密度;  $F$  为能量流;  $I$  为动量密度;  $G$  为动量流. 多辛形式的一个重要性质是, 它的完全局部守恒的概念.

如果  $z(x, t)$  关于  $x$  是周期函数或者满足齐次

边界条件, (2) 满足整体能量和整体动量守恒律:

$$\frac{d}{dt} \int_{-L}^L E(z) dx = 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{-L}^L F(z) dx = 0 \quad (6)$$

对系统(1), 引入正则动量:

$$H = \Phi_x, u = q_x, u_t = -2\varphi_x, H_t = -2\psi_x, u_x = \nu \quad (7)$$

系统(1)可以表示为下面等价形式:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Phi_t + \nu_x = \psi + Hu \\ \frac{1}{2}q_t = \varphi + \frac{1}{2}u^2 + H \\ -\frac{1}{2}u_t - \varphi_x = 0 \\ -\frac{1}{2}H_t - \psi_x = 0 \\ q_x = u \\ \Phi_x = H \\ -u_x = -\nu \end{cases} \quad (8)$$

定义状态变量:

$$z = (u, H, \Phi, q, \psi, \varphi, \nu)^T$$

可以把方程组(8)写成多辛 Hamilton 偏微分方程的形式(2), 其中:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

方程组(8)满足相应的多辛守恒律(3), 其中:

$$w = \frac{1}{2} dz \wedge M dz = \frac{1}{2} (du \wedge d\Phi + dH \wedge dq)$$

$$k = \frac{1}{2} dz \wedge K dz =$$

$$du \wedge dv + d\varphi \wedge d\Phi + d\psi \wedge dq$$

方程组(8)满足相应的局部能量守恒律(4), 其中:

$$\begin{cases} E = S(z) - \frac{1}{2} z^T K z_x = \frac{1}{2} (u^2 H + H^2 + \psi u - \\ \quad u v_x + \Phi \varphi_x + q \psi_x) \\ F = \frac{1}{2} z^T K z_t = \frac{1}{2} (u u_t - \Phi \varphi_t - q \psi_t + \psi q_t + \\ \quad \varphi \Phi_t - u_t v) \end{cases}$$

方程组(8)满足相应的局部动量守恒律(5), 其中:

$$\begin{cases} I = \frac{1}{2} z^T M z_x = \frac{1}{4} \Phi_x u + \frac{1}{4} q_x H - \frac{1}{4} u_x \Phi - \frac{1}{4} H_x q \\ G = S(z) - \frac{1}{2} z^T M z_t = \frac{1}{2} u^2 H + \frac{1}{2} H^2 + \varphi H + \\ \quad \psi u - (\frac{1}{4} \Phi_t u + \frac{1}{4} q_t H - \frac{1}{4} u_t \Phi - \frac{1}{4} H_t q) \end{cases}$$

## 2 变形 Boussinesq 方程组离散多辛形式及守恒律

多辛形式的一个重要性质是: 它的局部守恒的概念. 多辛是 Hamilton 偏微分方程的一个几何性质, 我们用数值方法模拟多辛偏微分方程时, 自然希望能反映这个性质. 基于这个想法, Bridges 和 Reich 引入了多辛积分的概念, 即一种能保持多辛守恒律的离散数值方法.

用  $z_j^n$  表示  $z$  在离散点  $x = x_j, t = t_n$  处的近似值,  $\partial_t^{j,n}, \partial_x^{j,n}$  分别为对微分算子  $\partial_t, \partial_x$  的离散. 求解多辛 Hamilton 系统(2.1) 离散格式可表示为:

$$M \partial_t^{j,n} z_j^n + K \partial_x^{j,n} z_j^n = \nabla_z S(z_j^n)_j \quad (9)$$

Def 2.1 称数值方法(9)为多辛积分, 如果其满足如下离散多辛守恒律

$$\partial_t^{j,n} w_j^n + \partial_x^{j,n} k_j^n = 0 \quad (10)$$

其中:  $w_j^n = \frac{1}{2} dz_j^n \wedge M dz_j^n, k_j^n = \frac{1}{2} dz_j^n \wedge K dz_j^n$ .

为了研究问题方便, 引入记号, 定义向前差分算子:

$$D_t u^n = \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}, \quad D_x u_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \quad (11)$$

平均算子:

$$A_t u^n = \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \quad A_x u_j = \frac{u_{j+1} + u_j}{2} \quad (12)$$

上面的算子满足

$$D_t D_x = D_x D_t, \quad A_t A_x = A_x A_t, \quad DA = AD$$

及推广的 Leibniz 法则

$$D_x (uv)_j = A_x u_j D_x v_j + D_x u_j A_x v_j,$$

$$D_t (uv)_j = A_t u_j D_t v_j + D_t u_j A_t v_j$$

在空间方向采用中点格式对方程组(2) 进行

离散,可得中心 Preissmann 半离散格式

$$M \frac{d}{dt}(A_x z_j(t)) + KD_x z_j(t) = \nabla_z S(A_x z_j(t)) \quad (13)$$

在空间和时间方向都采用中点格式对方程组(2)进行离散,可得中心 Preissmann 全离散格式

$$MD_t(A_x z_j^n) + KD_x(A_t z_j^n) = \nabla_z S(A_x A_t z_j^n) \quad (14)$$

下面给出中心 Preissmann 半离散格式(13)和全离散格式(14)的守恒律.

Th 2.1 中心 Preissmann 半离散格式(13)是多辛的并且满足半离散的多辛守恒律:

$$\frac{d}{dt}(A_x w_j(t)) + D_x k_j(t) = 0 \quad (15)$$

其中:

$$w_j(t) = \frac{1}{2} dz_j(t) \wedge M dz_j(t),$$

$$k_j(t) = \frac{1}{2} dz_j(t) \wedge K dz_j(t).$$

Th 2.2 中心 Preissmann 全离散格式(14)是多辛的并且满足离散的多辛守恒律:

$$D_t w_j^{n+1/2} + D_x k_{j+1/2}^n = 0 \quad (16)$$

其中:  $w_j^n = \frac{1}{2} dz_j^n \wedge M dz_j^n$ ,  $k_j^n = \frac{1}{2} dz_j^n \wedge K dz_j^n$ .

证明: 用  $d(A_x A_t z_j^n)$  与(14)的变分:

$$MD_t d(A_x z_j^n) + KD_x d(A_t z_j^n) = \nabla_z S(d(A_x A_t z_j^n)) d(A_x A_t z_j^n)$$

做外积  $\wedge$ , 利用  $D_{zz} S(d(A_x A_t z_j^n))$  的对称性和  $M, K$  的反对称性可得:

$$\begin{aligned} d(A_x A_t z_j^n) \wedge MD_t d(A_x z_j^n) + \\ d(A_x A_t z_j^n) \wedge KD_x d(A_t z_j^n) = 0 \\ D_t d(A_x z_j^n) \wedge Md(A_x A_t z_j^n) + \\ D_x d(A_t z_j^n) \wedge Kd(A_x A_t z_j^n) = 0 \end{aligned}$$

利用算子  $D, A$  的性质, 然后把上面的两式相加可以得到:

$$\begin{aligned} D_t [d(z_j^n) \wedge Md(A_x z_j^n)] + \\ D_x [d(A_t z_j^n) \wedge Kd(A_t z_j^n)] = 0 \\ D_t A_x [d(z_j^n) \wedge Md(z_j^n)] + \\ D_x A_t [d(z_j^n) \wedge Kd(z_j^n)] = 0 \end{aligned}$$

Th 2.3 中心 Preissmann 格式(13)半离散局部能量守恒律:

$$\frac{d}{dt}(A_x E_j(t)) + D_x F_j(t) = 0 \quad (17)$$

局部动量守恒律

$$\frac{d}{dt}(A_x I_j(t)) + D_x G_j(t) = 0 \quad (18)$$

其中:

$$E_j(t) = S(z_j(t)) - \frac{1}{2} z_j^T(t) K D_x z_j(t),$$

$$F_j(t) = \frac{1}{2} z_j^T(t) M \frac{d}{dt} z_j(t)$$

$$I_j(t) = \frac{1}{2} z_j^T(t) M D_x z_j(t),$$

$$G_j(t) = S(z_j(t)) - \frac{1}{2} z_j^T(t) M \frac{d}{dt} z_j(t)$$

然而, 一般而言, 对非线性 Hamilton 系统, 全离散局部能量和动量守恒律不能精确满足, 但是可以定义下面局部能量和动量误差.

Def2.2:

$$R_e = D_t E_j^{n+1/2} + D_x F_{j+1/2}^n = 0 \quad (19)$$

$$R_m = D_t I_j^{n+1/2} + D_x G_{j+1/2}^n = 0 \quad (20)$$

下面我们应用中心 Preissmann 全离散格式(14)对系统(1)进行数值模拟, 并且分析系统(1)的离散多辛守恒律、局部能量和动量误差. 对系统(8)应用中心 Preissmann 全离散格式(14)可得:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} D_t A_x \Phi_j^n + D_x A_t \nu_j^n &= A_x A_t \psi_j^n + A_x A_t (H_j^n u_j^n) \\ \frac{1}{2} D_t A_x q_j^n &= A_x A_t \varphi_j^n + \frac{1}{2} A_x A_t (u_j^n)^2 + A_x A_t H_j^n \\ -\frac{1}{2} D_t A_x u_j^n - D_x A_t \varphi_j^n &= 0 \\ -\frac{1}{2} D_t A_x H_j^n - D_x A_t \psi_j^n &= 0 \\ D_x A_t q_j^n &= A_x A_t u_j^n \\ D_x A_t \Phi_j^n &= A_x A_t H_j^n \\ -D_x A_t u_j^n &= -A_x A_t \nu_j^n \end{aligned} \right. \quad (21)$$

利用定理(2.2)得, 方程(21)满足相应的中心 Preissmann 全离散格式(14)的多辛守恒律(16), 其中:

$$w_j^n = \frac{1}{2} dz_j^n \wedge M dz_j^n = \frac{1}{2} (du_j^n \wedge d\Phi_j^n + dH_j^n \wedge dq_j^n)$$

$$k_j^n = \frac{1}{2} dz_j^n \wedge K dz_j^n = du_j^n \wedge dv_j^n + d\varphi_j^n \wedge d\Phi_j^n + d\psi_j^n \wedge dq_j^n$$

因为系统(8)的 Hamilton 函数是非线性函数, 利用定义(2.2)得, 方程组(21)满足相应的中心 Preissmann 全离散格式(14)的局部能量误差(19), 其中:

$$\begin{cases} E_j^n = S(z_j^n) - \frac{1}{2}z_j^{nT}KD_xz_j^n = \frac{1}{2}((u_j^n)^2H_j^n + (H_j^n)^2 + \\ \psi_j^n u_j^n - u_j^n D_x v_j^n + \Phi_j^n D_x \varphi_j^n + q_j^n D_x \psi_j^n) \\ F_j^n = \frac{1}{2}z_j^{nT}KD_tz_j^n = \frac{1}{2}(u_j^n D_t u_j^n - \Phi_j^n D_t \varphi_j^n - q_j^n D_t \psi_j^n + \\ \psi_j^n D_t q_j^n + \varphi_j^n D_t \Phi_j^n - D_t u_j^n v_j^n) \end{cases}$$

方程组(21)满足相应的局部动量误差(20), 其中:

$$\begin{cases} I_j^n = \frac{1}{2}z_j^{nT}MD_xz_j^n = \frac{1}{4}D_x\Phi_j^n u_j^n + \frac{1}{4}D_xq_j^n H_j^n - \\ \frac{1}{4}D_xu_j^n \Phi_j^n - \frac{1}{4}D_xH_j^n q_j^n \\ G_j^n = S(z_j^n) - \frac{1}{2}z_j^{nT}Mz_j^n = \frac{1}{2}(u_j^n)^2H_j^n + \frac{1}{2}(H_j^n)^2 + \\ \varphi_j^n H_j^n + \psi_j^n u_j^n - (\frac{1}{4}D_t\Phi_j^n u_j^n + \frac{1}{4}D_tq_j^n H_j^n - \\ \frac{1}{4}D_tq_j^n \Phi_j^n - \frac{1}{4}D_tH_j^n q_j^n) \end{cases}$$

虽然中心 Preissmann 格式是一个多辛格式,但在实际数值计算中我们需要计算辅助变量这样就大大增加了计算量,因此我们消去辅助变量,便得到了非线性方程的一个多辛格式:

$$\begin{cases} D_t A_x H_j^n + D_{xxx} A_t u_j^n + D_x A_t (uH)_j^n = 0 \\ D_t A_x u_j^n + \frac{1}{2}D_x A_t (u_j^n)^2 - D_x A_t H_j^n = 0 \end{cases}$$

### 3 误差分析

假  $z$  是充分光滑函数,将函数  $z$  在离散点  $(t_j, x_n)$  处分别关于  $t, x$  进行泰勒展开的:

$$\begin{cases} A_x z_j^{n+1} = A_x z_j^n + \Delta t (D_t(A_x A_t z_j^n)) + \frac{1}{2}\Delta t^2 (D_{tt}(A_x A_t z_j^n)) + \dots \\ A_t z_{j+1}^n = A_t z_j^n + \Delta x (D_x(A_x A_t z_j^n)) + \frac{1}{2}\Delta x^2 (D_{xx}(A_x A_t z_j^n)) + \dots \end{cases} \quad (22)$$

把上面的形式可以写成下面的等价形式:

$$\begin{cases} \frac{A_x z_j^{n+1} - A_x z_j^n}{\Delta t} = (D_t(A_x A_t z_j^n)) + \\ \frac{1}{2}\Delta t (D_{tt}(A_x A_t z_j^n)) + o(\Delta t) \\ \frac{A_t z_{j+1}^n - A_t z_j^n}{\Delta x} = (D_x(A_x A_t z_j^n)) + \\ \frac{1}{2}\Delta x (D_{xx}(A_x A_t z_j^n)) + o(\Delta x) \end{cases} \quad (23)$$

为了误差,记  $z_t = D_t(A_x A_t z_j^n)$ , 则离散格式(21)可以改写成:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_{tt}\Delta t) + (v_x + \frac{1}{2}v_{xx}\Delta x) = \psi + Hu \\ \frac{1}{2}(q_t + \frac{1}{2}q_{tt}\Delta t) = \varphi + \frac{1}{2}u^2 + H \\ -\frac{1}{2}(u_t + \frac{1}{2}u_{tt}\Delta t) - (\varphi_x + \frac{1}{2}\varphi_{xx}\Delta x) = 0 \\ -\frac{1}{2}(H_t + \frac{1}{2}H_{tt}\Delta t) - (\psi_x + \frac{1}{2}\psi_{xx}\Delta x) = 0 \\ (q_x + \frac{1}{2}q_{xx}\Delta x) = u \\ (\Phi_x + \frac{1}{2}\Phi_{xx}\Delta x) = H \\ -(u_x + \frac{1}{2}u_{xx}\Delta x) = -v \end{cases} \quad (24)$$

由(24)的第一个与第二个方程得:

$$\begin{cases} \psi = \frac{1}{2}(\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_{tt}\Delta t) + (v_x + \frac{1}{2}v_{xx}\Delta x) - Hu \\ \varphi = \frac{1}{2}(q_t + \frac{1}{2}q_{tt}\Delta t) - H - \frac{1}{2}u^2 \end{cases} \quad (25)$$

对(25)求导可以得:

$$\begin{cases} \psi_x = \frac{1}{2}(\Phi_{tx} + \frac{1}{2}\Phi_{ttx}\Delta t) + (v_{xx} + \frac{1}{2}v_{xxx}\Delta x) - (Hu)_x \\ \psi_{xx} = \frac{1}{2}(\Phi_{txx} + \frac{1}{2}\Phi_{ttxx}\Delta t) + (v_{xxx} + \frac{1}{2}v_{xxxx}\Delta x) - (Hu)_{xx} \\ \varphi_x = \frac{1}{2}(q_{tx} + \frac{1}{2}q_{ttx}\Delta t) - H_x - \frac{1}{2}(u^2)_x \\ \varphi_{xx} = \frac{1}{2}(q_{txx} + \frac{1}{2}q_{ttxx}\Delta t) - H_{xx} - \frac{1}{2}(u^2)_{xx} \end{cases} \quad (26)$$

把(26)代入(24)的第三和第四:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}(u_t + \frac{1}{2}u_{tt}\Delta t) - (\frac{1}{2}q_{tx} + \frac{1}{2}q_{ttx}\Delta t) - H_x - \\ \frac{1}{2}(u^2)_x + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(q_{txx} + \frac{1}{2}q_{ttxx}\Delta t) - H_{xx} - \\ \frac{1}{2}(u^2)_{xx}\Delta x) = 0 \\ -\frac{1}{2}(H_t + \frac{1}{2}H_{tt}\Delta t) - (\frac{1}{2}(\Phi_{tx} + \frac{1}{2}\Phi_{ttx}\Delta t) + \\ (v_{xx} + \frac{1}{2}v_{xxx}\Delta x) - (Hu)_x + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\Phi_{ttx} + \\ \frac{1}{2}\Phi_{ttxx}\Delta t) + (v_{xxx} + \frac{1}{2}v_{xxxx}\Delta x) - (Hu)_{xx}\Delta x) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

由(24)的第五个、第六个和第七个方程得:

$$\begin{cases} u_t = (q_{xt} + \frac{1}{2}q_{xxt}\Delta x) \\ H_t = (\Phi_{xt} + \frac{1}{2}\Phi_{xxt}\Delta x) \\ v_{xx} = (u_{xxx} + \frac{1}{2}u_{xxxx}\Delta x) \end{cases} \begin{cases} q_{xt} = u_t - \frac{1}{2}q_{xxt}\Delta x \\ \Phi_{xt} = H_t - \frac{1}{2}\Phi_{xxt}\Delta x \\ u_{xxx} = v_{xx} - \frac{1}{2}u_{xxxx}\Delta x \end{cases} \quad (28)$$

把(28)代入(27)可得:

$$\begin{cases} H_t + (Hu)_x + u_{xxx} = \frac{1}{4}u_u\Delta t + \frac{1}{4}q_{ux}\Delta t + \\ \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(q_{txx} + \frac{1}{2}q_{txx}\Delta t) - H_{xx} + \frac{1}{2}(u^2)_{xx})\Delta x \\ u_t + H_x + uu_x = \frac{1}{4}H_u\Delta t + \frac{1}{4}u_{ux}\Delta x + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\Phi_{txx} + \\ \frac{1}{2}\Phi_{txx}\Delta t) + (v_{xxx} + \frac{1}{2}v_{xxx}\Delta x) - (Hu)_{xx})\Delta x \end{cases} \quad (29)$$

可以看出本文的算法具有精度  $O(\Delta t + \Delta x^2)$

### 4 数值例子

为了说明多辛方法的诸多优点,本文用中心 Preissmann 多辛格式(21),并以此离散变形 Boussinesq 方程组. 考虑下面变形 Boussinesq 方程组初值问题:

$$\begin{cases} H_t + (Hu)_x + u_{xxx} = 0 \\ u_t + H_x + uu_x = 0 \\ u_0 = -1 - 2\tanh(x) \\ H_0 = 2 - 2\tanh^2(x) \end{cases} \quad (30)$$

则初值问题(30) 具有如下扭孤子波解:

$$u = -1 - 2\tanh(x+t), \quad H = 2 - 2\tanh^2(x+t)$$

在区间  $x \in [-20, 20]$  内取时间步长  $\Delta t = 0.01$  空间步长  $\Delta x = 0.01$ , 对该扭孤子波解进行数值模拟, 得到该扭孤子解随时间的演化情况.

从图1 和图2 可以看出: 扭孤子解的波形和波速均没有随着时间的变化而变化这充分说明中心 Preissmann 多辛格式具有能够很好的保持孤子解的基本几何性质; 而且在整个模拟过程中, 系统具有多辛守恒律. 数值实验的结果表明: 本文构造的多辛格式能够很好地模拟变形 Boussinesq 方程组方程的扭孤子解, 同时能够很好地保持系统的多个守恒律, 这些充分说明多辛方法具有以下两大优点: 良好的长时间数值行为和精确地保持多种守恒律.

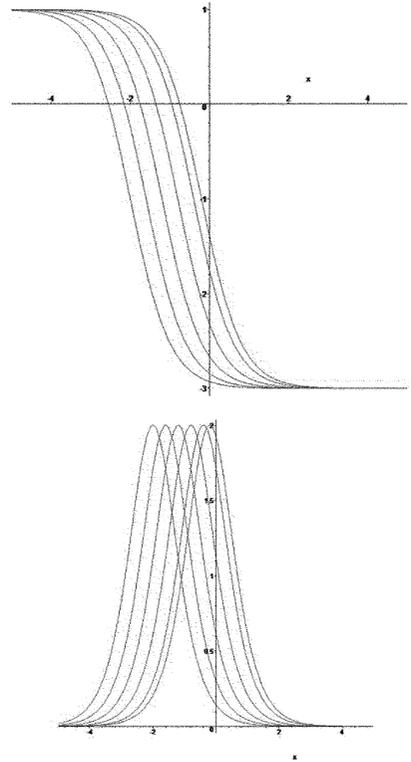


图1 u, H 随时间  $t=1, t=2, t=3, \dots, t=10$  的演化图

Fig. 1 Numerical solution of  $u, H$  at various times ( $t=1, t=2, t=3, \dots, t=10$ )

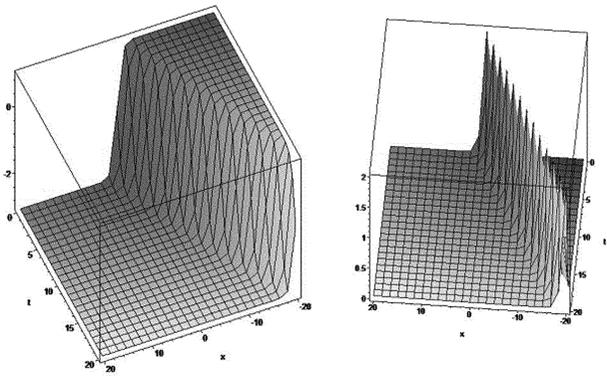


图2 u, H 的数值解

Fig. 2 The wave form of the numerical solution of  $u, H$

### 参 考 文 献

- 1 Lu B Q, Pan Z L, Qu B Z, et al. Solitary wave solutions for some systems of coupled nonlinear equations. *Physics Letter A*, 1993, 180:61 ~ 64
- 2 Lu B Q. Nsoliton solutions of a system of coupled kdv equations. *Physics Letter A*, 1994, 189:25 ~ 26
- 3 Duffy B R, Parkes E J. Traveling solitary wave solutions to a seventh-order generalized kdv equation. *Physics Letter A*,

- 1996,214;271 ~ 272
- 4 Fan E G, Zhang H Q. A note on the homogeneous balance method. *Physics Letter A*,1998,246;403 ~ 406
- 5 Wang M L. Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations. *Physics Letter A*, 1995,199;169 ~ 172
- 6 Chen J B, Qin M Z, Tang Y F. Symplectic and multi-symplectic methods for the nonlinear equation. *Computers Mathematics with Applications*, 2002, 43 (8-9): 1095 ~ 1106
- 7 Cohen D, Owern B, Raynaud X. Multi-symplectic integration of the Camassa-Holm equation. *Computer Physics Communications*, 2008,227(11):5492 ~ 5512
- 8 Liu T T, Qin M Z. Multi-symplectic geometry and multi-symplectic preissmann scheme for the kp equation. *Journal of Mathematical Physics*, 2002,43(8):4060 ~ 4077
- 9 Tian Y M, Qin M Z, Zhang Y M, Ma T. The multi-symplectic numerical method for Gross-Pitaevskii equation. *Computer Physics Communications*, 2008,178(6):449 ~ 458
- 10 Wang Y, Wang B, Qin M Z. Concatenating construction of multi-symplectic scheme for 2 + 1 dimensional sine-Gordon equation. *Science in china (series A)*, 2004,47(1):18 ~ 30
- 11 Zhu Huajun, Chen Yaming, Song Songhe. Symplectic and multi-symplectic scheme for the two-dimensional nonlinear schrodinger equation. *Mathematical numerica sinica*, 2010, 32(3):315 ~ 326
- 12 Reich S. Multi-symplectic Runge. Kutta collocation methods for Hamiltonian wave equations. *Journal of Computational Physics*, 2000,157(2):473 ~ 499
- 13 胡伟鹏,邓子辰,韩松迎,范玮. 非线性弦振动方程的多辛算法. *动力学与控制报*,2009,7(2):104 ~ 107 (Hu W P, Deng Z C, Han S Y, Fan W. Multi-symplectic method for the nonlinear vibrating string equation. *Journal of Dynamic and Control*, 2009,7(2):104 ~ 107 (in chinese))

## MULTI-SYMPLECTIC PREISSMANN METHODS TO COMPUTE THE VARIANT BOUSSINESQ EQUATIONS

Wang Junjie<sup>1,2</sup> Wang Liantang<sup>2</sup> Yang Kuande<sup>1</sup>

(1. Mathematics Department of Si mao Teachers' College ,Pu'er 665000,China)

(2. Mathematics Department of Northwest University,Xi'an 710127,China)

**Abstract** The variant Boussinesq equations were studied based on the multi-symplectic theory in Hamilton space. The multi-symplectic Preissmann method was reviewed, and a semi-implicit scheme with certain discrete conservation laws was constructed to solve the first order partial differential equations derived from the variant Boussinesq equations. The results of numerical experiment for soliton solution of the variant Boussinesq equations were obtained, which show that the multi-symplectic Preissmann method is an efficient algorithm with excellent long time numerical behaviors.

**Key words** the variant Boussinesq equations, Preissmann method, multi-symplectic, conservation law