第 10 卷第 2 期 2012 年 6 月
1672-6553/2012/10(2)/107-10
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 10 No. 2
Jun. 2012

经典力学的一个新基本原理及其几个重要应用

吕茂烈
(西北工业大学应用力学系,西安 710072)

摘要 新基本原理定名为零原理,建立在三个基石上:1)隐显模型;2)显示力假设;3)μ-证明. 用逻辑推理证明了显示力的定量模式 $\vec{F}_{xs}=m\ddot{\vec{r}}$,从而也证明了零原理. 它的结论被表达成三个等效的"零力系". 零原理作出了几个重要贡献:1)消除了牛顿第二定律的"实验性"局限,将它提高到基本原理的层次. 2)使达朗伯原理摆脱了对牛顿第二定律的依赖,从而也成为独立的基本原理. 3)它的改造形式成为"最小自由量原理",而将高斯原理作为特殊情况包含其中. 在此新证明中阐明了高斯原理原始证明中出现所谓 Z-佯谬的原因,并给出了消除 Z-佯谬的条件. 4)零原理的另一个应用是直接证明了新意义下的哈密顿原理,即真正的最小作用量 S 原理. 从而摆脱了雅可比准则的困扰. 5)零原理被推广到冲击情况,得到三个等效的"零冲击系". 简明地定义了冲击情况的"自由量动能函数$\underline{Z}$",并导出了相应的最小自由量动能原理.

关键词 可能运动, 自由量函数, 隐-显模型, 显示力假设, μ-证明

引 言

本文的主题是"完善经典力学的公理体系". 这是马赫批判牛顿公理体系后留下的重大问题. 一个半世纪以来,虽有多人研究过(文献[1]的绪论中对此有较系统的综述,可供参考),但尚无关键性改进. 主要困难在于不能确定一个足以统率整个经典力学的最高层次的基本原理,而且马赫的批判也不全对(例如,将惯性定律看作牛顿第二定律的特殊情况). 自牛顿以来[1],经典力学已有长足的发展,许多新的成就,早已使牛顿公理体系不够完善. 对于这个现状,本文的研究成果正足以弥补所存在的缺陷.

为了区分原理的层次,不妨借用康德的说法,将认识的来源分为超验、先验和经验三个层次. 超验的认识往往涉及信仰,一般认为应当排除在科学研究之外. 先验认识实质上就是众人皆知的常识,知其然而不知其所以然,而且也未必都符合于真理,但可作为追求真理的起点,因而层次最高. 其次才是经验认识,包括有组织科学实验所提供的知识. 在力学中我们称之为公理的,大体上是先验知识的总结,故被认为层次最高.

现在先来审议一下经典力学中已有的几个原理,看看何者有资格被选为最高的基本原理. 牛顿第二定律本身是实验定律,层次欠高,而且只适用于自由质点而不能直接应用于受约束系统. 达朗伯原理有所发展,解决了上述困难,但存在着它和牛顿第二定律间之的源流关系问题,所致它常遭到误解,甚至备受诋毁. 至今仍有不少力学—物理书以极为分歧的形式阐述达朗伯原理,有的甚至不屑一提. 这样,作为经典力学的最高基本原理,牛顿第二定律和达朗伯原理都难以入选,剩下的侯选者只有高斯原理了.

高斯最小约束量原理(least constriant principle,其中 Constaint 一词旧译为"拘束". 考虑到这个词在其他情况下都译为"约束",且又需加以"量化",故改译为"约束量")宣称:在受理想约束系统的一切可能运动中,真实运动在每个瞬时都使该系统所受的约束量取最小值[2-4].

这个陈述最吸引人之处是"又出现了一个最小". 在经典力学中先前已有一个"最小作用量原理",曾因而引起不小的争议. 是否这里也隐藏着某些有待争议的问题? 果然如此. 只要指出如下几点,就足以说明:

1) 高斯定义的约束量函数写成

$$Z=\sum\frac{m}{2}(\ddot{\vec{r}}-\frac{\vec{F}}{m})^2$$

2012-05-18 收到第 1 稿.

其中：m－系统内各质点的质量，$\vec{F}$－作用于该质点的给定力，$\ddot{\vec{r}}$－该质点的可能加速度. 在此函数中未显示出约束力 $\vec{N}$，因而不能说明约束的物理性质，有无摩擦力都一样. 但讨论中并无一处排除掉的摩擦存在，而原理的结论却被表达为只适用于无摩擦的情况. 这就成为一个理论性疑点.

2）高斯将$(\ddot{\vec{r}}-\frac{\vec{F}}{m})$定义为质点可能加速度 $\ddot{\vec{r}}$ 相对于自由运动加速度$\frac{\vec{F}}{m}$的“偏离”，并将它比拟为“误差”，从而借用他的误差理论（高斯于 1794 年发现了误差分布规律，又于 1808 年建立了误差理论. 高斯发表最小约束量原理是在 1829 年）. 来找出偏离的最小值. 这个比拟是否成立，也成为疑点. 何况所求出的最小偏离是属于可能运动的，因为 Z 式中根本没有包含真实运动（由于没有 $\vec{N}$），如何确知这个最小偏离的可能运动便是真实运动？这样，在未能消除这些疑点之前，高斯原理也不足以成为经典力学的最高基本原理.

为了改变这种局面，本文推演出的零原理填补了空白，零原理满足了最高基本原理的全部条件：

1）它是完全基于先验认识并通过逻辑思维演绎出来的，因此层次最高.

2）它将牛顿第二定律的达朗伯原理都作为特殊情况包罗其中.

3）经过零力系的零运算，零原理被直接改造为最小自由量原理，它将高斯原理作为特殊情况包含其中.

4）它富有创造力，它的另一种改造形式是新意义下的哈密顿原理，一个真正的最小作用量积分变分原理.

5）零原理又被自然地推广到碰撞情况，能考虑更为广泛的约束条件和物理－力学性质.

本文的研究已就“完善经典力学公理体系”这个主题得到了一系列重要成果，其核心是论证了一个最高层次的新基本原理即零原理. 它形式简明而雅美，涵容广泛而富有创造力.

1 零原理的论证与陈述

零原理建立在三个基石上：一个模型、一个假设和一个 μ 证明. 以下分别作出说明.

1.1 隐显模型

设受约束系统中任意一质点 $P_{(m)}$ 上的给定力为 $\vec{F}$. 将此力分为两个分量 $\vec{F}_{iz}$ 和 $\vec{F}_{xs}$. 前一分量 $\vec{F}_{iz}$ 称为隐藏力，它只能激发系统中的约束产生约束反力 $\vec{N}$. 而看不到它对系统运动的作用，好像隐藏到约束中去了. 后一分量 $\vec{F}_{xs}$ 称为显示力，它只会激发质点 P 产生加速度 $\ddot{\vec{r}}$，而对约束不起作用. 简例（图 1 左）：重滑块 A 放在光滑地板 B 上构成受约束系统（图 1）. 此时滑块的重力 $\vec{G}$ 不论多大，只会迫使地板产生法向反力 $\vec{N}$，而不引起滑块的运动变化. 所以 $\vec{G}$ 就是隐藏力. 相反，水平推力 $\vec{H}$ 不论多小，必定要使滑块的速度改变，而不会激发地板的反力. 所以 $\vec{H}$ 就是显示力. 如果地板有摩擦（图 1 右），情况会变复杂. 重力 $\vec{G}$ 仍为隐藏力，但水平推力 $\vec{H}$ 在滑块未启动时，只要 $H \leqslant fN$（f 为摩擦系数），就不会激发滑块的运动，相反却引起地板的摩擦力 $\vec{F}$，所以此力 $\vec{H}$ 也成为隐藏力. 但若滑块已经启动，则 $\vec{H}$ 不论多小也会使滑块速度改变. 这样 $\vec{H}$ 就转变为显示力. 在滑块因减速而停止运动后，$\vec{H}$ 又转化为隐藏力. 转换关系视系统的运动状态而定，这种情况所产生的影响，只在于使系统运动的研究变得复杂一些（须分若干阶段）而已，却不会破坏隐显模型的普遍成立. 隐显模型完全建立在直观认识上，不需要另加假设. 它具有最大的普遍性，可以直接由离散质点系过渡到连续体，又可以自然地推广到冲击的情况.（隐显模型的建立受《易经》中“乾坤”模型的启迪. 这两个模型在哲学观念上有共同点：一分为二，各正其位；对立统一，相互转化）.

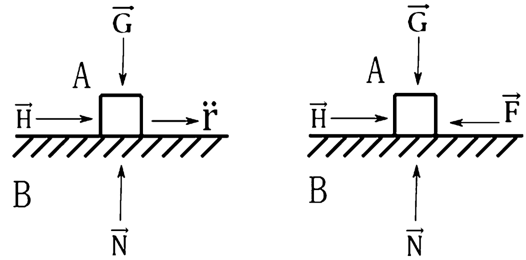

图 1 隐显模型简例. 左：光滑面情况；右：摩擦面情况

Fig. 1 A simple example of concealing－displuying model. left: smooth－plane case; right: frictional plane case

1.2　显示力模式假设

要将给定力 $\vec{F}$ 具体地分为上述两个分量,如果没有理论或实验为依据,是无法做到的. 关键在于暂时还找不出显示力 $\vec{F}_{xs}$ 的具体模式. 为此要借助于一些先验的认识,认定: a) 显示力 $\vec{F}_{xs}$ 与质点的加速度 $\ddot{\vec{r}}$ 为同方向(根据空间的均匀性、对称性、各向同性). b) $\vec{F}_{xs}$ 与 $\ddot{\vec{r}}$ 大小成正比, c) 加速度 $\ddot{\vec{r}}$ 的大小又与质点的质量 m 成反比. 因此,显示力的模式可假定为

$$\vec{F}_{xs}=\mu m\ddot{\vec{r}} \tag{1}$$

在此定义式中,加速度和力均在惯性参考系中测定,此参考系的存在由惯性定律阐明,而质量则定义为物体惯性的度量.

此处 μ 为待定的比例系数. 在静力学中只知道力是矢量,不知道它的量纲究竟是什么;因此在假设(1)中,μ 证明以前,暂时还不知道 μ 究竟是个纯数,还是某个物理量. 另一方面,在这个基本先验认识的模式多少有些武断,它已将经典力学的局限性带了进来,(本文所说的"经典力学"是把狭义相对论有关的内容排除在外的. 但最新的理解为:经典力学系还应包括由狭义相对论发展起来的那种力学. 如 H. Goldstein 的 Classical Mechnics 一书就是这样说的. 本文不采用这种观点.) 质量 m 被认定不变而与运动状态无关. 但这个观念是经典力学理论框架所接受的,新原理中沿袭此观念无可非议.

1.3　μ- 证明

证明的目的是要确定显示力模式中比例系数 μ 是个恒量,不随质点的运动状态而变.

证明的依据是欧氏空间的线性特征,从二方面考虑.

1)　静力学中的矢量性质只是欧氏空间线性特征的一种表述形式. 已有几个根据这种特征做出的"力平行四边形定理"证明. 但这些证明只是阐明了力的静态性质,完全不涉及力的本质问题. 特别是未能说明力和质点的量纲间关系.

牛顿制定了自由质点的动力学方程,即牛顿第二定律,从而确知力和质量只有一个独立的基本量纲. 牛顿又用第二定律证明了动态的"力平行四边形定律". 但因前者是实验性的,所以后者也不能摆脱实验性,因而不能升为"定理". 要确知力矢量的动态性质,仍须根据欧氏空间的线性特征.

2)　动力学中,隐显模型给出了非自由质点运动的一个"零"方程

$$\vec{F}-(\vec{F}_{iz}+\vec{F}_{xs})=0 \tag{a}$$

又知隐藏力与约束力构成零力系:$\vec{F}_{iz}+\vec{N}=0$. 再将显示力拆成二部分:

$$\vec{F}_{xs}=m\ddot{\vec{r}}+(\mu-1)m\ddot{\vec{r}}$$

则(a)式可以改写成

$$(\vec{F}+\vec{N}-m\ddot{\vec{r}})-(\mu-1)m\ddot{\vec{r}}=0 \tag{b}$$

若令 $\vec{R}\equiv(\vec{F}+\vec{N}-m\ddot{\vec{r}})$,则上式又简写成

$$\vec{R}=(\mu-1)m\ddot{\vec{r}}=0 \tag{c}$$

可见,若 $\vec{R}\neq0$,则它必定和 $\ddot{\vec{r}}$ 平行,而没有垂直于 $\ddot{\vec{r}}$ 的分量.

现在又由欧氏空间的线性特征知,若 $\vec{F}$ 的大小增大一倍,则其动力学效应包括 $\ddot{\vec{r}}$,$\vec{F}$,$\vec{R}$ 的大小也将增大一倍(这个性质在制定显示力模式时已用过). 由此可见,(b),(c)式中的($\mu-1$),因而 μ 必须是恒量,不随质点的运功状态而变. 这样,模式(1)已建立了 $\vec{F}$ 与 $m\ddot{\vec{r}}$ 之间的线性关系,因而力和质量是不能具有独立量纲的. μ 的数值可随 $\vec{F}$ 和 m 的单位选择而定. 反之,不妨先选取 $\mu=1$,因而

$$\vec{F}_{xs}=m\ddot{\vec{r}} \tag{2}$$

现在可以反过来再来确定力和质量的单位. 其实这两个量目前的通用单位正是按(2)式而确定的. 与此同时,又得到

$$\vec{R}\equiv\vec{F}+\vec{N}-m\ddot{\vec{r}}=0 \tag{3}$$

证明完毕.

1.4　零原理的三个等效陈述

式(2)与(3)表达了一个新原理. 即零原理. 为使原理的表述更为简洁,引入质点惯性力 $\bar{Q}^*$ 的概念(暂时可看作为运算筹码,其物理意义将在下文 3.4 中阐明):$\bar{Q}^*=-m\ddot{\vec{r}}^*$,(此处 $\ddot{\vec{r}}^*$ 为质点的真实加速度,但在不致于误解时常省去 * 号),于是新原理可陈述为:

对于任何受约束系统中的每个质点,在每一瞬时 t,恒有:

(I)　显示力与惯性力构成零力系:$\vec{F}_{xs}+\vec{Q}^*=0$,(且 $\vec{Q}^*\equiv-m\ddot{\vec{r}}^*$);

(Ⅱ) 隐藏力与约束反力也构成零力系：$\vec{F}_{iz}+\vec{N}=0$；

(Ⅲ) 给定力、约束反力与惯性力也构成零力系：$\vec{F}+\vec{N}+\vec{Q}^{*}=0$.

这三种陈述的形式有异，但实质相同，并通过隐显模型而合为整体，但又各自都具有原理的充分性.（注意：这里的三个"零"不是"什么都没有"，而是物性存在的最高形式，又是作用发挥的一种方式，也正是老子哲学中"无"的体现. 这个观点使我们得益匪浅. 按照这个观念，牛顿第三定律也可以陈述为："质点系间的相互作用构成一个零力系". 但这只是弱相互作用原理，它不适合用于电子间的相互作用，因为电子不是宏观质点，有自旋，其间的相互作用要考虑电磁场在内. 不过对此另有强相互作用原理来解释这种关系.

零原理有充足理作为经典力学的最高层次基本原理：它的模型极普遍，假设最少，定义最清晰，而且具有最大的适用性：它可以很自然地由离散质点系统过渡到连续系统（因为每个零力系对系统中每个微质点都成立）；对约束的性质和类型也不加任何限制. 并且原理表达的形式可以作任何变换，包括瞬态的和过程的，确定性的和变分形式的. 以后将会看到：力学的众多原理都只是零原理中零力系零运算的变换形式而已.

2　零原理和牛顿第二定律、达朗伯原理之间关系及其差异

2.1　零原理(Ⅰ)

将原理的表达式(Ⅰ)应用于单个自由质点，便得到牛顿第二定律. 这足以说明(Ⅰ)是一个原理.

零原理消除了牛顿第二定律的"实验性"局限. 从而提高了牛顿第二定律作为基本原理的层次.

2.2　零原理(Ⅱ)

零原理的表达形式(Ⅱ)和达朗伯原理的原始表达式"损失力借约束而平衡"相似.（但实际上这个力并未损失掉，只是看起来不能发挥其改变质点速度的作用而已. 所以本文将它正名为隐藏力）. 这两个原理层次不同，主要差别在于：零原理的独立性靠 μ – 证明，而达朗伯原理的损失力中含有牛顿第二定律的预示而损害了独立性. 所以零原理的层次高于达朗伯原理是明显的. 同时零原理已将达朗伯原理包含在内，从而消除了后者对牛顿第二定律的依赖.

零原理的表达式(Ⅱ)初看似可直接得自隐显模型，因而并未增加新内涵. 其实这是很大的误解. 模型中只对 $\vec{F}$ 的两个分力作了定性的分类，而尚未给出定量的模式，直到 μ – 证明以后，$\vec{F}_{iz}$ 才有了确定的模式，仅在这时，(Ⅱ)的内涵才得以充实，成为原理. 在显示力为零的情况，零力系(Ⅱ)直接转化为静力学原理.

2.3　零原理(Ⅲ)

零原理的表达形式(Ⅲ)也和惯性力形式的达朗伯原理（后来在实践中发展出惯性力法）相似，但后者陷入了"静力学平衡方程"的框框，导致形式与内容间的不一致（因为系统实际上是在运动）. 由此可以看到，达朗伯虽已十分接近了层次最高的零原理，但又失之交臂，未免令人为之惋惜.

有一种特殊情况：在零力系(Ⅲ)中看不到 $\vec{F}$. 这并不说明它不起作用了. 原来，此时 $\vec{F}_{iz}=-\vec{F}_{xs}$，因而 $\vec{F}=0$（又是一个零），但它的两个分量却各自实实在在起作用.（这是隐显模型的特有的奥妙所在，需要在此加注一笔）. 简例：光滑小球在环形管内作惯性运动. 此时 $\vec{F}_{xs}$ 表现为向心力. 两者的矢量和为零. 而 $\vec{F}_{iz}$ 表现为离心力.（这个简例若用达朗伯原理来解释，就显得不自然，将引发惯性力的真实性疑问.）零原理的"零力系"只表示有关这几个力矢量之间的一种空间关系，不强求这些力必须作用在同一物体上. 这里的"力系矢量和为零"与系统运动状态的特殊形式"平衡"毫无联系.

零力系(Ⅲ)尚有一种十分通用的改造形式. 将它投影在任何方向，结果总是零. 特别是可以投影在各质点的虚位移 $\delta\vec{r}$ 上并求和. 如果约束是理想的，则有 $\sum\vec{N}\cdot\delta\vec{r}=0$，于是便得到达朗伯 – 拉格朗日原理：

$\sum(\vec{F}-m\ddot{\vec{r}}^{*})\cdot\delta\vec{r}=0$（此处 $\ddot{\vec{r}}^{*}$ 即真实加速度，附标 * 常被省略）.

这个原理在旧的陈述中是靠和静平衡虚功原理的比拟而得到的，远不及得自零原理那样简明. 若改用零原理的陈述(Ⅱ)，则更为简洁，这时只须将理想约束的定义式中改成负隐藏力（$\vec{F}-m\ddot{\vec{r}}^{*}$）就可以了.

2.4　关于惯性力的注记

以上各处的惯性力 $\vec{Q}^*$ 实质上就是牛顿定义的惯性反抗力(在他以前已由刻卜勒提出). 这是一个实有的力,由质点施加在产生 $\vec{N}$ 和 $\vec{F}$ 的物体上. 原理(I)已说明了它的物理本质.

与达朗伯原理不同,零原理中无虚加的惯性力. 如果把质点看成包含在无限小空壳内的有限集中质量,那么 $\vec{N}$ 和 $\vec{F}$ 必须通过这个空壳传给集中质量,同时此质量的惯性力也要通过空壳传到外面. 这样,空壳受到了这三个真实力的作用. 由于空壳无质量,这三个力的合力必为零. 同时空壳又能在零力系下产生任何加速度而和集中质量一起运动. 显然,这里的设想都能为经典力学的框架所容. 这个空壳模型在变质量力学中将有大用.

3　将零原理改造为最小自由量原理

零原理的第一重要应用是将它改造为最小自由量原理,从而将高斯原理作为特殊情况而包含其中,特别是使后者独立于牛顿第二定律之外并摆脱了误差理论的影响. 由零原理出发,通过一些"零运算",即可简明地证明这个新原理:

所谓零运算,"是指将零力系变换成其它形式而始终保持为零的简单运算,它并无确定程式,但成效显著,而足以发现一些新的力学特征. 拉格朗日乘子法、非完整约束的附加,都可纳入零运算.

3.1　最小自由量原理的证明

零力系($\vec{F}+\vec{N}+\vec{Q}^*$)的平方仍然为零;乘以权因子($2\eta^2$)后也仍然为零;对整个质点系求和,得到一个量 Z^*,也是零. 即:

$$Z^* \equiv \sum(2\eta^2)(\vec{F}+\vec{N}+\vec{Q}^*)^2 = \sum(2\eta^2)(\vec{F}+\vec{N}-m\ddot{\vec{r}}^*)^2 = 0 \tag{4}$$

设质点在可能运动中的加速度为 $\ddot{\vec{r}}^p$. 令

$$\ddot{\vec{r}}^p = \ddot{\vec{r}}^* + \Delta\ddot{\vec{r}},$$

其中 $\Delta\ddot{\vec{r}}$ 也是可能加速度,它可以看成 $\ddot{\vec{r}}^p$ 相对于 $\ddot{\vec{r}}^*$ 的变化量,大小任意. 因此 $\Delta\ddot{\vec{r}}$ 也称为可能加速度的"自由量". 现在再定义

$$Z^p \equiv \sum(2\eta^2)(\vec{F}+\vec{N}-m\ddot{\vec{r}}^p)^2 = \sum(2\eta^2)(\vec{F}+\vec{N}-m\ddot{\vec{r}}^*-m\Delta\ddot{\vec{r}})^2 = \sum(2\eta^2)m^2\quad(\Delta\ddot{\vec{r}}^p)^2 > 0 \tag{5}$$

称它为可能运动的"自由量函数"(高斯以德文 Zwang(约束)一字的缩写 Zw(或 Z)表示约束量函数. 反义字 Zwanglosigkeit 意为约束作用的丧失,因而获得自由. 这样,符号 Zw(或 Z)也可用以表达"自由量"函数的意义).(在不致误解时(5)式中的附标 p 常省略),Z 的量纲为[功]/[时间]^2,亦即二阶功率. 显然对于任何可能运动,恒有

$$Z^* \leqslant Z \tag{6}$$

等号仅在可能加速度 $\ddot{\vec{r}}^p=\ddot{\vec{r}}^*$ 时成立. 这样,式(6)直接表达了一个新原理,称为最小自由量原理. 即:对于任何受约束系统,在所有可能运动中,真实运动的自由量为绝对最小值.

3.2　由最小自由量原理导出高斯方程

若将可能运动看成变更运动,则见在 Z 函数中仅可能加速度可以变更(称高斯变更,用 δ_G 表示). 故有

$$\delta_G Z = \delta_G \sum(4\eta^2)(\vec{F}+\vec{N}-m\ddot{\vec{r}})\cdot m\delta_G\ddot{\vec{r}}$$

若 $\ddot{\vec{r}}=\ddot{\vec{r}}^*$,则此时显然有

$$\delta_G Z = \sum(4\eta^2)(\vec{F}+\vec{N}-m\ddot{\vec{r}})\cdot m\delta_G\ddot{\vec{r}} = 0 \tag{7}$$

和分析力学中的高斯方程相比较,(7)式中多出了约束力 $\vec{N}$ 和权因子 $2\eta^2$. 因此(7)可称为完全形式的高斯方程("完全"指尚未消去约束力. 式中在不致误解的情况下,* 号已省略).

分析力学的原理和方程总是力求尽量消去约束力. 为此须附加一些补充条件,代价是缩小原理的适用范围. 眼下对于(7)式,要求满足三个条件:1)约束须为理想的,从而 $\sum\vec{N}\cdot\delta\vec{r}=0$;2)高斯微变空间 ε^G 须与虚位移微变空间 ε 同构,从而可令 $\delta_G\ddot{\vec{r}}=k^2\delta\vec{r}$,其中 k^2 为比例常数. 于是 $\sum\vec{N}\cdot\delta_G\ddot{\vec{r}}=0$. 已经证明,对于一阶线性非完整约束,这个条件成立[2]. 3)对权因子($2\eta^2$)也须相应地作适当选择(这个条件常为人所忽视). 为了消去(7)中的约束力,只能取权因子为($2\eta^2$)$=\dfrac{1}{2m}$. 于是,展开式(7),可得

$$\delta_G Z = \sum(\vec{F}-m\ddot{\vec{r}})\cdot\delta_G\ddot{\vec{r}} + \sum\vec{N}\cdot\delta_G\ddot{\vec{r}} = \sum(\vec{F}-m\ddot{\vec{r}})\cdot\delta_G\ddot{\vec{r}} = 0 \tag{8}$$

这已是分析力学所需要的高斯方程了. 高斯方程是由高斯最小约束量原理直接导出的. 由此可见,最小自由量原理已将高斯最小约束原理作为特殊情况包含在内了.(类似地,对于高斯微变空间 ε^G 与

约尔当微变空间 ε^J 同构的约束情况，高斯方程可以自然地改造成约尔当方程).

以上论证完全出于自然，未增加其它假设，如"偏离与误差相比拟"之类. 这就是新论证比旧论证的优越处.(旧原理依靠误差分布理论来得到最终结论，本身缺之足够的依据. 这应当认为旧原理的一个理论性疑点. 因篇幅限制，这里暂不展开讨论).

3.3 Z－佯谬的消除

所谓 Z－佯谬是指：若在高斯的约束量函数 Z 中，任意选择权因子($2\eta^2$)，则由 $\delta_G Z=0$ 可能得不到动力学方程. 本小节的目的是阐明 Z－佯谬产生的原因并指出消除它的条件.

为此须重新检查高斯原理的原始论述. 可以看到一个关键问题：在那里过早地忽略了约束力 $\vec{N}$，而将 Z 函数定义为简式：

$$Z=\sum\frac{1}{2m}(\vec{F}-m\ddot{\vec{r}})^2 \tag{9}$$

和以上 Z 的全式定义(5)相比，在此间定义(9)中已将"权因子($2\eta^2$)选择为$\frac{1}{2m}$"(同时去掉了 $\vec{N}$). 对于这一关键高斯未曾作出合理的解释. 但原理的结论在所限制条件下仍正确，这恐怕要归功于他的天才猜想.(其实，Z 的简式定义本身就隐含有理论性疑点：它不能反映约束的物理性质，有无摩擦都一样. 这一疑点也已在引言中指出)

其实，如果在高斯原理中，一开始便采用带 $\vec{N}$ 的 Z 函数全式定义(5)，则任意选择权因子($2\eta^2$)，都能由($\delta_G Z=0$)得到动力学方程. 但在改用了无 $\vec{N}$ 的 Z 函数简式定义(9)后，权因子($2\eta^2$)就只有一种选择能满足高斯原理. 这正是本节的新证明所要揭示的一个奥秘！

试作如下比较：A. 取全式定义并令权因子 $2\eta^2=\frac{1}{m^2}$，则有 $Z=\frac{1}{m^2}\sum(\vec{F}+\vec{N}-m\ddot{\vec{r}})^2$，从而由高斯原理 $\delta_G Z=0$，可得

$$\delta_G Z=\delta_G\sum\left(\frac{\vec{F}+\vec{N}}{m}-\ddot{\vec{r}}\right)^2=\sum\left(\frac{\vec{F}}{m}-\ddot{\vec{r}}\right)\cdot\delta_G\ddot{\vec{r}}+\sum\frac{1}{m}\vec{N}\cdot\delta_G\ddot{\vec{r}}=0 \tag{10}$$

虽然这也是一个动力学方程，但其中含 $\vec{N}$ 的附加项不可能消除，即使在理想约束情况下也这样(除非各质点的质量全部相等). 方程(10)显然不便于实践.

B. 若取简式定义，并令 $2\eta^2=\frac{1}{m^2}$，则有 $Z'=\sum\frac{1}{m^2}(\vec{F}-m\ddot{\vec{r}})^2$，从而由 $\delta_G Z'=0$，将得到方程

$$\delta_G Z'=\sum\left(\frac{\vec{F}}{m}-\ddot{\vec{r}}\right)\cdot\delta_G\ddot{\vec{r}}=0.$$

但它已不是系统的动力学方程了(除非系统内所有质点的质量都相等). 这种现象就是"Z－佯谬". 可见，产生 Z－佯谬的原因在于采取了简式 Z 后未按上述条件3)去选择权因子($2\eta^2=\frac{1}{m^2}$)，从而导致 $\delta_G Z'=0$ 不能给出动力学方程. 一旦解决了权因子选择的问题，Z－佯谬便自然消除.

综观上述分析过程，可以看到一个重要特征，即新论证中每一步运算都是围绕着原理(Ⅲ)的零力系($\vec{F}+\vec{N}+\vec{Q}^*$)$=0$ 而进行的"零运算"(在这个零力系中还可以加入一些代表非完整约束关系 $\lambda f=0$ 的"零". 这个课题，值得另加研究). 还有一种尚未被采用的零运算—对时间的积分，它也是可以考虑的，因为这个零力系存在于每一瞬时. 下文即可看到这种零运算的应用.

4 由零原理推导哈密顿最小作用量原理

4.1 最小 K－积分变分原理

先考虑一个关于系统变更运动的定积分

$$K_{变}=\int_{t_0}^{t1}\sum(\vec{F}+\vec{N}-m\ddot{\vec{r}}_{变})\cdot\delta\vec{r}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t1}\sum(\vec{F}+\vec{N}-m\ddot{\vec{r}}^*-m\delta\ddot{\vec{r}})\cdot\delta\vec{r}\mathrm{d}t \tag{11}$$

积分区间(t_1-t_0)为任取. $\ddot{\vec{r}}^*$ 为真运动的加速度，$\delta\vec{r}$ 为真路上各质点的虚位移，并且 $\vec{r}(t)+\delta\vec{r}(t)$ 表示了真路一阶邻域内的任何一条变路，因而 $\delta\vec{r}$ 可表示为时间的函数. 变路上的加速度为 $\ddot{\vec{r}}_{变}=\ddot{\vec{r}}^*+\delta\ddot{\vec{r}}$，因而微变量 $\delta\ddot{\vec{r}}$ 也可表示为时间函数，并称为此变更运动中加速度的微变自由量. 由于零力系($\vec{F}+\vec{N}-m\ddot{\vec{r}}^*$)存在于每一瞬时，所以 $K^*\equiv K_{真}=0$. 至于变路上的 K 积分 $K_{变}=\int_{t_0}^{t1}(-\sum m\delta\ddot{\vec{r}})\cdot\delta\vec{r}\mathrm{d}t$ 则不恒等于零，而且可正可负. 但平方后恒正，故有

$$K_{变}^2 > K_{真}^2 (\equiv 0) \tag{12}$$

式(12)表达了最小 K 积分变分原理,即:相对于一切变更运动,真运动的 K 积分平方取绝对最小值.

注: 还可以另外定义一个定积分 $J_{变} = \int_{t_0}^{t_1} \sum (\vec{F} + \vec{N} - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta_J \dot{\vec{r}} \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \sum (\vec{F} + \vec{N} - m\ddot{\vec{r}}^* - m\delta_J \ddot{\vec{r}}) \cdot \delta \dot{\vec{r}} \mathrm{d}t$ (11)'. 显然 $J_{真} \equiv J^* = 0$, $J_{变} = \int_{t_0}^{t_1} \sum (-m\delta_J \ddot{\vec{r}} \cdot \delta \dot{\vec{r}}) \mathrm{d}t$ 不恒等于零,可正可负,平方则恒正,故有 $(J_{变})^2 > (J_{真})^2$.

4.2 最小自由动能积分变分原理

式(12)适用于任何约束条件,也不限于何种端点条件;甚至投影轴也可以由 $\delta\vec{r}$ 改为 $\delta_J \dot{\vec{r}}$ 或 $\delta_G \ddot{\vec{r}}$,(显然,自由量 $\delta\ddot{\vec{r}}$ 也须改变,来与此相适应). 但是如此广大的范围,只具有理论上的意义,反而不便于具体实践. 为此常附加如下的一些限制:1)只考虑完整系统的情况,从而可用变换条件 $\mathrm{d}\delta = \delta\mathrm{d}$, $\int\delta = \delta\int$ 来求得变换关系:

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r}) - \dot{\vec{r}} \cdot \delta\dot{\vec{r}} \tag{a}$$

$$\delta\ddot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\vec{r} \cdot \delta\vec{r}) - \delta\dot{\vec{r}} \cdot \delta\dot{\vec{r}} \tag{b}$$

2)再对积分(11)附加端点凝固条件:$\delta\vec{r}_0 = \delta\vec{r}_1 = 0$. 于是,应用关系(b),可得

$$K_{变} = \int_{t_0}^{t_1} \sum (\vec{F} + \vec{N} - m\ddot{\vec{r}}^* - m\delta\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \sum m(\delta\dot{\vec{r}})^2 \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} 2T_{(\delta\dot{\vec{r}})} \mathrm{d}t > 0 \tag{13}$$

其中 $T_{(\delta\dot{\vec{r}})}$ 为按速度变更 $\delta\dot{\vec{r}}$)量计算的系统动能,并称为系统的自由动能积分. 显然,仍有 $K_{真} \equiv K^* = 0$,而(12)式变为

$$K_{变} > K_{真} (\equiv 0) \tag{14}$$

它表达了如下的积分变分原理,称为最小自由量动能积分变分原理,即:对于完整系统,在凝固端点条件下,与一切变更运动相比较,真运动的 K 积分取绝对最小值.

4.3 最小作用量积分变分原理

由上述原理转到哈密顿原理,尚须再附加一个限制 3):只考虑保守、理想系统. 于是,给定力 $\vec{F}$ 有势,$\sum\vec{F} \cdot \delta\vec{r} = \delta(-V)$,且 V 为系统的势能函数. 又有 $\sum\vec{N} \cdot \delta\vec{r} \equiv 0$,存在于每一瞬时. 再应用上列变换关系(a),有 $\sum m\ddot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r} = \sum \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r}) - \sum m\dot{\vec{r}} \cdot \delta\dot{\vec{r}}$. 将(11)的 $K = K_{变}$ 积分拆开成三个部分,则有

$$K \equiv K_{变} = \int_{t_0}^{t_1} \delta(-V)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \sum \vec{N} \cdot \delta\vec{r} \mathrm{d}t - \left[\sum \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r})\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} \delta T \mathrm{d}t\right] = \int_{t_0}^{t_1} \delta L \mathrm{d}t = \delta S \tag{15}$$

其中 $S = \int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} (T - V)\mathrm{d}t$ 即为哈密顿作用量. 与(13)相比,显然可知,$(\delta S)_{变} > 0$. 同时 $(\delta S)_{真} = 0$. 故有

$$(\delta S)_{变} > (\delta S)_{真} \tag{16}$$

这就是新意义下的哈密顿原理,称为最小作用量积分变分原理,即:对于完整、保守、理想系统,在凝固端点条件下,与一切变更运动相比较,真运动的哈密顿作用量 S 取绝对最小值.

在旧的哈密顿原理的论证中,由于对变路的动力学内涵缺之明确的规定,而允许变路上出现速度角点(在该点的速度有微量不连续),以致无法确定作用量 S 的驻值是否最小,从而使此原理不得以“最小”命名. 由此导致了所谓的雅可比准则. 讨论这个分歧的原因,将是本文续篇的任务.

5 零原理对冲击情况的推广

5.1 碰撞模型的精确化

为此先描述一下冲击模型. 冲击只有极短促的过程 $\tau \to 0$. 虽然短促,仍有始有终. 在始终之间,质点的速度有了有限的跃变 $\Delta\vec{V}$,(这是冲击过程中唯一可以用其它独立方法测定的信息). 冲击的特征还有:在时间轴上,τ 的始、终被表达成同一瞬时 t_0,一个孤立点,将时间轴分割为前后两段,故对 τ 之始(记为 t^-)和 τ 之终(记为 t^+)仍有所区分. 2) τ 过程中质点的位置来不及改变,$\Delta\vec{r} = 0$,3)冲击力 $\vec{F}$ 极其巨大,(因而各种有限的常力,如重力、压力,甚至由于非惯性参考系带来的表观惯性力,都可以忽略),而且由于不知其在 τ 过程中的变化情况,只能用 $\int_\tau \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{I}_F = m\Delta\vec{V}$ 来确定冲击量的总值. 因此,所谓“给定冲击 $\vec{I}_F$”,只能在这个意义上去理解. 4)这个可测定的结果其实还只是”给定冲

击的"显示分量 $\vec{I}_{FXS}$". 其中的 $\Delta\vec{V}$ 还受冲击物理特征的影响(通过恢复系数之类来表达)[7]. 5)"给定冲击"的隐藏分量 $\vec{I}_{Fiz}$ 和相应的约束反冲击 $\vec{I}_N$ 都只能由推算得来,而且彼此间往往界限不分,两者可以相互转化.

简例:(图2)点质量 $A(m_1)$ 和 $B(m_2)$ 用无质量刚杆相连,在铅直平面内自由落下. 上质点 B 始终紧贴光滑铅直墙. 当系统具有向下速度 $\vec{V}_0$ 时下质点 A 撞上光滑水平地板,引起冲击现象.

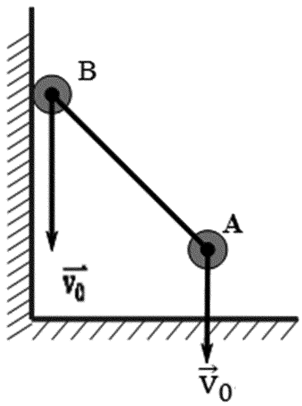

图2 一个二球系统的碰撞

Fig. 2 Collision of a two - balls system

这里暂时看不到有什么给定冲击 $\vec{I}_F$. 质点 A 对地板的法向趋进速度 $\vec{V}_0$ 是引起冲击的唯一主动因素. 我们也可以认为有一个 $\vec{I}_{Fxs}$ 在使 A 的动量产生跃变,但它不能只由动力学方程来确定,还要看地板的弹性任何:测定的结果是

$$\vec{I}_{Fxs}=m_1(\vec{V}^+-\vec{V}_0)=-m_1(1+e)\vec{V}_0.$$

这里的参数 e 称为碰撞恢复系数,须由试验来确定.[7] 与此同时又有一个看不到的隐藏冲击

$$\vec{I}_{Fiz}=-\vec{I}_{Fxs}$$

来激发地板产生反作用冲击 $\vec{I}_N$. 总的给定冲击 $\vec{I}_F=\vec{I}_{Fiz}+\vec{I}_{Fxs}=0$. 这个解释是隐藏模型在冲击过程中的推广. 此处地板构成一个"骤加约束",它是非理想的,可由方程 $f=V-(1+e)V_0=0$ 表示. 当然还会有相反的过程:"骤卸约束",这相当于爆炸).

还有一个现象:当 A 碰击地板时,也立即激发质点 B 对墙面的撞击,使后者产生法向反冲击. 但这个反冲击不会引起能量损失,它是理想的. 当然,实际上整个系统内部,处处在同时激发了冲击. 但只要在冲击点之间不出现速度跃变,内冲击都会相互抵消,所以这也是理想约束情况.

5.2 冲击情况下的零原理

建立了冲击模型后,即可将零原理推广. 对该原理中的有关各力(包括惯性力)各自在冲击过程 $\tau\to0$ 取时间积分,有

$$\vec{I}_F=\int_{\tau\to0}\vec{F}\mathrm{d}t,\quad \vec{I}_N=\int_{\tau\to0}\vec{N}\mathrm{d}t,$$

$$\vec{I}_{Q*}=\int_{\tau\to0}(-m\ddot{\vec{r}}^*)\mathrm{d}t=m(\vec{V}_0-\vec{V}^+)=$$

$$-m\Delta\vec{V}_\tau^*,\quad (\text{且 }\Delta\vec{V}_\tau^*=\vec{V}^+-\vec{V}_0).$$

于是直接得到冲击过程中的基本原理,即:对于任何受约束系统中的每个质点,在冲击过程($\tau\to0$)中,恒有:

(Ⅰ) 显示冲击 $\vec{I}_{Fxs}$ 与惯性冲击 $\vec{I}_{Q*}$ 构成零冲击系 $\vec{I}_{Fxs}+\vec{I}_{Q*}=0$,

(Ⅱ) 隐藏冲击 $\vec{I}_{Fiz}$ 与约束反作用冲击 $\vec{I}_N$ 构成零冲击系:$\vec{I}_{Fiz}+\vec{I}_N=0$,

(Ⅲ) 给定冲击、约束反作用冲击与惯性力冲击三者构成零冲击系:$\vec{I}_F+\vec{I}_N+\vec{I}_{Q*}=0$,

由于各种冲击没有对时间的导数(因为冲击过程中力随时间的变化规律无法确定),所以以上各关系给出的都只是代数方程.

5.3 冲击情况下的最小自由量动能原理

现在可对零冲击系(Ⅲ)进行平方、加权求和等零运算,可得一个函数

$$\underline{Z}^*=\sum\frac{1}{2m}(\vec{I}_F+\vec{I}_N+\vec{I}_{Q*})^2=\sum\frac{1}{2m}[\vec{I}_F+\vec{I}_N-m(\vec{V}^*-\vec{V}_0)]^2\equiv0 \tag{17}$$

若以可能速度 $\vec{V}^p=\vec{V}^*+\Delta\vec{V}$ 代替上式中的真速度 $\vec{V}^*$,则得可得一个关于速度自由量($\Delta\vec{V}$)的函数

$$\underline{Z}=\sum\frac{1}{2m}[\vec{I}_F+\vec{I}_N-m(\vec{V}-\vec{V}_0)]^2=\sum\frac{1}{2m}[\vec{I}_F+\vec{I}_N-m(\vec{V}^*-\vec{V}_0)-m\Delta\vec{V}]^2=\frac{1}{2}\sum m(\Delta\vec{V})^2 \tag{18}$$

称为受约束系统在冲击过程中的自由量动能函数(以能量为量纲),因为

$$T_{\Delta\vec{V}}=\frac{1}{2}\sum m(\Delta\vec{V})^2 \tag{19}$$

正是按可能速度相对于真速度的"自由量"$\Delta\vec{V}$ 而计算的该系统动能,故又称"自由量动能". $\underline{Z}$ 函数很便于计算,可由离散质点系,推广到连续体,因而

有很大实用性.

显然在一切可能运动中,真实运动(当 $\vec{V}^p=V^*$, $\Delta\vec{V}=0$)的自由量动能函数 $\underline{Z}$ 取驻值

$$\delta\underline{Z}_{(当\Delta V=0)}=0 \tag{20}$$

并为绝对最小值. 这就是冲击过程中的最小自由量动能原理.(其中的 δ 应理解为约尔当变分 δ_J,而非高斯变分 δ_G).

上式还可以改造成另一形式

$$\delta_J\underline{Z}=\sum[\vec{I}_F+\vec{I}_N-m(\vec{V}-\vec{V}_0)]\cdot\delta_J\vec{V}=0 \tag{21}$$

若系统的约尔当微变空间 ε^J 与虚位微变空间 ε 同构,可令 $\delta_J\vec{V}\equiv\delta_J\dot{\vec{r}}=k^2\delta\vec{r}$,于是上式中的理想约束项 $\vec{I}_N$ 自动消去,从而

$$\delta_J\underline{Z}=\sum[\vec{I}_F-m(\vec{V}-\vec{V}_0)]\cdot\delta_J\vec{V}=0 \tag{22}$$

它是约尔当原理在冲击过程中的改造形式,但其中的 $\delta_J\vec{V}$ 并非必须是微量,也可以代之以符合约束条件的有限速度自由量 $\Delta\vec{V}$. 因此又有

$$\sum[\vec{I}_F-m(\vec{V}-\vec{V}_0)]\cdot\Delta\vec{V}=0 \tag{23}$$

这个方程的有效性可以在推导几个关冲击时系统动能变化的定理中看到.[4][5]

冲击过程常由骤加约束引起,这类约束不仅是非理想的,而且又是非完整的,一般可用速度一阶线性方程 $f=0$ 表达. 因此在具体应用中常将它们借拉氏乘子来附加于 $\underline{Z}$ 函数中,从而求 $d(\underline{Z}-\lambda f)=0$(改 δ 为 d 是因为在冲击过程中时间 t 不变)的条件驻值. 注意,这里约束方程 $f=0$ 的附加也是"零运算"的一种运用).

5.4　应用简例

简例:图 3 中两根质量各为 M、长度各为 l 的匀质细杆 AB 和 BC 在 B 端以光滑铰链相连. 系统被放在光滑水平面上自由运动(铰链轴铅直). 当两杆拉成直线时突然固结为一直线,表示在铰链 B 处有骤加约束. 设在冲击前,两杆有沿杆的速度 r_0,同时,A,B,C 三点分别有垂直于杆的速度 p_0,q_0,s_0. 冲击后的这些速度分别记为 r 和 p,q,s. 求铰链 B 内冲击矩 L.(此例选自[1]. 但该书在解题过程中将骤加约束方程 $f=0$ 错写,以致以下解答全错,但解法无误,可作为模式).

通过杆端速度表达的角速度:有 $\omega_{AB}=-\left(\dfrac{p+q}{l}\right)$, $\omega_{BC}=\left(\dfrac{s+q}{l}\right)$. 约束条件为 $\omega_{AB}=\omega_{BC}$,故约束方程为 $f=p+2q+s=0$(这个约束应看成在整个冲击过程 $\tau\to0$ 中起作用).

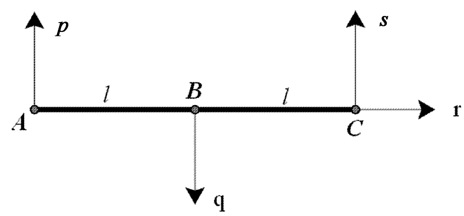

图 3　一个二杆系统的碰撞

Fig. 3　collision of a two - rods system

以杆端速度表达的匀质杆动能为

$$T_{AB}=\frac{M}{6}(p^2-pq+q^2+3r^2),$$

$$T_{BC}=\frac{M}{6}(s^2-sq+q^2+3r^2)$$

按速度"自由量"$(p-p_0),(q-q_0)\cdots\cdots$ 表达的系统自由动能为

$$\underline{Z}=T_{(\Delta\vec{V})}=\frac{M}{6}[(p-p_0)^2+(s-s_0)^2+2(q-q_0)^2+6(r-r_0)^2-(p-p_0)(q-q_0)-(s-s_0)(q-q_0)]$$

于是,由 $d(\underline{Z}-\lambda f)=0$,即可求得

$$r=r_0,$$

$$p-p_0=q-q_0=s-s_0=-\frac{1}{4}(p_0+2q_0+s_0)=(-\lambda)$$

铰链 B 内的冲击矩 L 可通过杆 AB 在冲击中的动量矩损失来求得,结果为 $L=\dfrac{M}{6}l\lambda=\dfrac{Ml}{24}(p_0+2q_0+s_0)$.(若改用由基本原理导出的冲击过程中普遍方程来求解本例,步骤反而可以简化. 在有关刚体系的冲击运动中,常出现这种情况).

6　结语

本文的核心成果是建立了零原理并得到了它的三个等效表达式. 最小自由量原理堪称零原理的第四个等效形式. 由于这个原理,提高了对高斯最小约束原理的认识. 但后者仍有一些深刻的问题值得继续探讨. 基于零原理的哈密顿原理新证明是有创新成效的,从而使该原理获得了"最小"的冠名. 最小 K - 积分变分原理和最小自由量动能积分变分原理都是零原理创造性的体现. 零原理对碰撞情

况的推广有望考虑更为现实的碰撞现象. 此外,文中给出的研究观点和方法的改进,(特别是质点的空壳模型、零运算方法等),也值得一提.

参 考 文 献

1 R. 罗森伯. 离散系统分析力学. 北京:人民教育出版社,1983,21:406 ~ 407 (R M Rosenberg. Analytical dynamics of discrete systems. Beijing: Pleum Press,1983,21:406 ~ 407 (in Chinese))

2 H H 浦赫哥尔茨著. 理论力学基本教程. 钱尚武、钱敏译,商务印书馆,1955: 191 ~ 220 (H H Вухголъц. Основной курс теоретической механики, 1939. Гос. Изд. Тех мех литературы, 1955:191 ~ 220)

3 陈滨. 分析力学. 北京:北京大学出版社,1982 (Chen B. Analytic mechanics. Beijing: the Peking University Press,1982 (in Chinese))

4 黄昭度,纪玉辉. 分析力学. 北京:清华大学出版社,1985 (Huang Z D, Ji Y H. Analytic mechanics. the Tsing Hua University Press,1985 (in Chinese))

5 E Howard Smart. Advanced dynamis. Macmillan and Co. 1957:376 ~ 391

6 A H 克雷洛夫. 近似计算讲义. 吕茂烈、季文美译,高等教育出版社,1968 :325 ~ 331 (A H крылов лекции о приближенных вычислениях, 1950, гос изд тех-тео литературы, 1968 :325 ~ 331)

7 吕茂烈. 碰撞恢复系数及其测定. 固体力学学报,1984,3:318 ~ 329 (Lv M L. On the coefficients of collision and their measurements. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1984, 3:318 ~ 329(in Chinese))

A NEW FUNDAMENTAL PRINCIPLE OF CLASSICAL MEHANICS WITH SOME IMPORTANT APPLICATIONS

Lv Maolie

(*Applied Mechanical Department*, *Northwestern Polytechnical University*, *Xi' an* 710072, *China*)

Abstract To perfect the axiom system of classical mechanics, a new fundamental principle, named Zero-principle, is established on the basis of three foundation-stones: 1) the concealing-displaying model, 2) the mode-assumption of displaying force, 3) the μ-proof. The conclusion of the principle is summarized into three equivalent ‘zero-force systems’. The new principle makes a series of important contributions: 1) Raise Newton's 2nd law into a theoretical principle, so that it is no longer fully experiment-based. 2) Make D'Alembert's principle become a principle independent of Newton's 2nd law. 3) Establish a reformed principle, named principle of minimum freedom, including Gauss' priniciple of least constraint as a particular case. As a consequence, the so-called Z-paradox in Gauss' principle is solved. 4) Provide a brief natural proof of new Hamilton's principle of ‘least action’. 5) After generalizing,, the Zero- principle is applied to the impulsive condition.

Key words possible motion, freedom function, concealing-displaying model, displaying-force hypothesis, μ-proof

Received 18 May 2012.