

# 时滞与界带\*

姚征<sup>1</sup> 张洪武<sup>2</sup> 钟万颢<sup>2</sup>

(1. 大连海事大学, 交通运输装备与海洋工程学院, 大连 116026) (2. 大连理工大学, 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

**摘要** 基于分析结构力学提出的界带分析方法, 将子结构间的分界面延拓为有一定宽度的分界带/分界域, 从而可以用于分析计算结构的非局部效应. 分析动力学中存在弹性时滞积分问题, 在理论方面仍存在许多有待明确的问题. 通过分析结构力学与分析动力学间的模拟关系, 可将界带分析方法用到弹性时滞积分问题中去, 基于辛体系建立相应的分析计算方法. 数值算例验证该套理论算法的可行性, 也为进一步开展深入研究打下了理论基础.

**关键词** 界带分析, 时滞, 辛方法, 分析结构力学, 子结构法

## 引言

分析结构力学与分析动力学是互相模拟的<sup>[1]</sup>, 所以“有限元自动保辛”. 随着需求不断提升, 应用力学结合了实际需求后, 暴露了传统经典分析力学的局限性:

- 它奠基于连续时间的系统, 但应用力学有限元、控制与信号处理等需要离散系统;
- 分析动力学总是考虑同时间的位移向量, 但应用力学有限元要考虑不同时间的位移向量;
- 动力学要求体系的维数自始至终不变, 但应用力学有限元需要变动的维数.
- 它认为物性是即时响应的, 但时间滞后是常见的物性, 例如粘弹性、控制理论等.

这些局限性表明传统分析动力学还需要大力发展. Hilbert 在 1900 年巴黎世界数学大会上的大会报告《数学问题》提出了 23 个数学问题. 其中第 23 号数学问题是: 变分法的进一步发展, 指出了一个需要不断地深入发展的方向. 现在广泛应用的应用力学有限元法的数学基础就是变分法, 依然需要深入发展. 辛数学的出现也是变分法的发展, 不过辛是 H. Weyl 根据 Hamilton 正则方程的对称性而提出的, 蕴涵着只能适用于恒定维数体系的局限. 然而分析结构力学与有限元分析是非常灵活的, 没有这样的维数限制.

针对辛数学的局限性, 当然要予以解决. 已经

有了某些进展, 介绍如下:

(1) 离散, 是数值求解的需要. 应予以强调指出的是, 李群理论是针对连续系统的, 离散后就不能用李群了. 冯康指出离散差分格式应要求近似解保辛<sup>[2]</sup>, 但保辛并不能自动保证能量守恒, 有论文甚至证明了命题“保辛则能量不能守恒”<sup>[3]</sup>, 书<sup>[2]</sup>也接受了该结论. 保辛所期望的是使能量保守, 例如著作<sup>[4]</sup>的大量例题, 就用能量对于守恒性质的偏离来检验保辛差分格式的优良性质, 但仍然不保证能量守恒! 前文<sup>[5]</sup>指出<sup>[3]</sup>的命题不成立, 运用参变量方法, 保辛积分也可保证能量守恒的. 以后讲保辛, 就是指保辛-守恒的算法的.

(2) 对于不同时间离散的时-空混和元网格<sup>[6]</sup>, 则应指出, 波动方程恰当的时间-空间变换是 Lorentz 变换<sup>[7,8]</sup>. 而在 Lorentz 变换下, 时间-空间的变换是线性的. 在原坐标下的同时, 在 Lorentz 变换后, 就不再同时了; 而只要是在特征线下的两点, 则通过 Lorentz 变换就可以成为同时. Einstein 相对论早就讲清楚时间-空间问题, 同时的概念是与坐标选择相关的. <sup>[6]</sup>已经给出了不同时的网格的数值例题.

(3) 不同维数离散的时间-空间混和有限元积分方案, 也已经在<sup>[9]</sup>中提出.

(4) 是本文关注的问题.

本文要探讨弹性时滞问题的积分. 弹性时滞课题的积分, 在理论方面仍存在许多有待明确的问题. <sup>[1]</sup>提出了分析力学由分析动力学与分析结构

力学组成,而二者在理论方面是相通的,有某种模拟关系.而分析结构力学则又有界带分析理论<sup>[10]</sup>.所以,可先将结构力学的界带分析理论讲清楚,然后根据模拟关系,用到弹性时滞积分问题中去.既然说弹性,当然应当是保守的.这里要明确,粘弹性的本构关系常常是阻尼的,不包含在本文范围内.

界带分析—分析结构力学;弹性时滞积分—分析动力学.

## 1 结构力学界带的积分—以及转化到弹性时滞系统积分的考虑

[10]引入了“界带”的概念,又应用于碳纳米管的声子能带分析<sup>[11]</sup>,表明“界带”是有效的手段,它归属于分析结构力学的范畴.根据分析结构力学与分析动力学的模拟,可考虑将“界带”方法移植到分析动力学,因为“界带”具有一定的宽度,故相当于弹性时滞系统.弹性时滞系统要建立其相应的分析动力学理论,使其仍归入 Hamilton 体系,保辛等内容.

Hilbert 在《数学问题》中又指出:“在讨论数学问题时,我们相信特殊化比一般化起着更为重要的作用.可能在大多数场合,我们寻找一个问题的答案而未能成功的原因,是在于这样的事实,即有一些比手头的问题更简单、更容易的问题没有完全解决或是完全没有解决.这时,一切都有赖于找出这些比较容易的问题并使用尽可能完善的方法和能够推广的概念来解决它们”.虽然希望建立时滞系统的分析动力学的理论体系,但基于分析动力学与分析结构力学的模拟理论,可仍从结构力学“界带”分析开始.从有限长度的一维链开始,完全讲清楚,再转移到分析动力学的时滞系统.虽然是一维链,但这是能够推广的,而又是最简单的问题.

分析理论当然希望建立在一般的基础上.然而仍可从最简单的情况开始,掌握其要点,考虑“更简单、更容易的问题”,要完全解决.然后再放松条件,考虑比较一般的情况.既然要运用分析动力学与分析结构力学的模拟关系,则在考虑结构力学问题的同时,就要想象分析动力学对应问题.

最简单情况是沿长度不变的一维链系统,在动力学中对应着时不变系统.设长度方向有很长的等间距  $d_a$  (动力学的  $\eta$ ) 质点链,每个质点与地面有弹簧  $k_a$  连接而刚度不变.相近质点相互间也有弹簧联系:其中紧相邻的质点间有刚度  $k_1$  的弹簧相连,

2 次相邻的质点间有刚度  $k_2$  的弹簧相连,  $n_l$  次相邻的质点间有刚度  $k_n$  的弹簧相连,而大于  $n_l$  次相邻的质点间没有弹簧了.也就是说,界带的宽度是  $d_a \times n_l$ .当  $n_l = 0$  时就没有宽度,成为界面了.

结构力学适用两端边界条件.因为是界带,所以边界条件不单纯是给出一个点的位移值,而要求给出两端界带的全部位移值.如果最简单  $n_l = 1$ ,则每端要给出 2 个质点的位移.又如链段只有 4 个质点则两端全部是给定位移的边界条件,没有内部点了.  $n + 4$  个质点的链段,其两端共 4 点是界带的,而内部有  $n$  个点可以消元,是界带理论的子结构.界带理论时两端位移分别表达为  $\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b$ , 各为  $n_l + 1$  维的向量.子结构当然有其变形能  $U(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$  以及出口刚度阵.其形式与通常一样为:

$$U(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{Bmatrix}^T \mathbf{K} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{Bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix}, \mathbf{K}^T = \mathbf{K} \quad (1)$$

子结构与外部的联系应还有对偶的力向量:

$$\mathbf{p}_a = -\partial U / \partial \mathbf{q}_a, \quad \mathbf{p}_b = \partial U / \partial \mathbf{q}_b \quad (2)$$

这些与通常的一样<sup>[1]</sup>.以上是结构力学势能表达的形式,还有传递辛矩阵的表达,特别适用于离散分析动力学体系.引入两端的界带状态向量

$$\mathbf{v}_a = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_b = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{p}_b \end{Bmatrix} \quad (3)$$

则有传递形式<sup>[1,12]</sup>

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{S} \mathbf{v}_a \quad (4)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{S}_{11} = -\mathbf{K}_{12}^{-1} \mathbf{K}_{11}, \mathbf{S}_{22} = -\mathbf{K}_{22} \mathbf{K}_{12}^{-1} \\ \mathbf{S}_{12} = -\mathbf{K}_{12}^{-1}, \mathbf{S}_{21} = \mathbf{K}_{12}^T - \mathbf{K}_{22} \mathbf{K}_{12}^{-1} \mathbf{K}_{11} \quad (5)$$

读者可验证  $\mathbf{S}^T \mathbf{J} \mathbf{S} = \mathbf{J}$  成立.

传递形式方才可与分析动力学的初值问题相衔接,也表明了分析结构力学的界带理论可以与分析动力学的时滞理论相衔接.传递方程(4)表明,每一次传递一定是一个界带到下一个界带.它们相互间没有共同点,但可以有若干中间点,如同子结构的内部点被消元了.因此传递是跳跃式地前进的,至少跳跃一个界带宽度.对于无穷长的链条寻求能带本征值,这一点限制是没有问题的.

但对于转换到时间积分,该限制是不能满意的.因为设一个时滞(界带)的宽度是  $\eta \times n_l$ ,则时间积分希望能每次积分一个  $\eta$  步长,而不是跳跃前

进一个时滞宽度  $\eta \times n_l$ .

期望解决每次前进一步  $\eta$ , 依然要先考察结构力学的子结构分析. 以前不是界带, 而是界面. 两端界面的里面全部是内部点. 只有界面是与外部联系的. 因此将界面处的节点位移及节点力共同组成状态向量. 子结构是有变形能的, 变形能本来是所有节点位移的函数. 但内部节点的位移已经用最小势能原理消元了. 消元用的是平衡方程, 从子结构来看, 已经没有节点力了. 只有界面的节点或者用刚度阵, 或者用状态向量的传递.

界带理论已经不是界面了, 界面是没有厚度的, 而界带是有一定厚度的  $d_a \times n_l$ . 转化到时滞的情况就是  $\eta \times n_l$ . 因此界带的传递的状态是(3), 从  $\mathbf{v}_a \rightarrow \mathbf{v}_b$ . 此概念要转移到时滞问题. 现在希望每次积分一个  $\eta$  步长, 就不能直接运用(3)的跳跃前进形式了. 设初始时的时间界带(时滞)是时间点  $0, \eta, \dots, \eta \times n_l$ .

基本概念一定要清楚. 位移是确定性的, 不会随着分析时采取例如将结构切开而变动; 但对偶力则必然是在切开结构时才会呈现出来. 不切开时, 本来就处于平衡状态, 没有外力. 传统理论考虑切开的是界面. 而在界带理论时, 切开已经不是一个面了, 而将是一个界带, 有厚度的. 对偶力也不再是一个力了, 而是界带内全部节点皆有对偶力. 即使是同一个点, 在不同界带内, 其对偶力也是不同的. 例如即使同一个节点 2, 既可以看成处于界带 1, 2 内, 也可以看成处于在界带 2, 3 内, 其对偶力在不同界带内也是不同的.

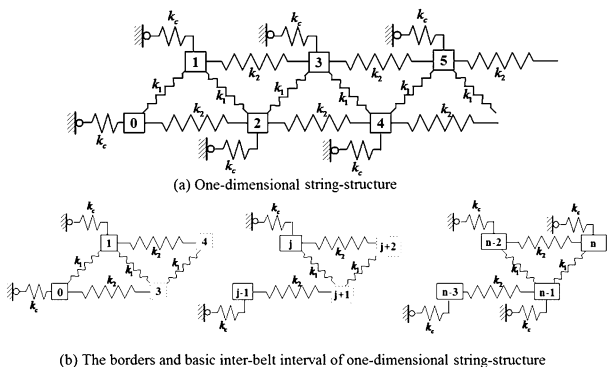


图1 一维链状界带结构

Fig. 1 One - dimensional Inter - belt string - structure

下一步要积分到界带  $i = 1, \dots, n_l, n_{l+1}$ , 要求解  $q_j, p_j, j = 1, \dots, n_l, n_{l+1}$ . 按基本概念, 其中  $q_j, j = 1, \dots, n_l$  无非是继承了前面  $q_0$  的部分, 而要求解的是  $p_j, j = 1, \dots, n_l, n_{l+1}$  以及  $q_{n_{l+1}}$ . 以前界带  $i = 0, \dots, n_l$

的对偶力  $p_0$  已经不再出现, 它不在当前的界带  $i = 1, \dots, n_l, n_{l+1}$  内. 处于平衡状态了. 这提供了一个方程, 可用于求解新加入的位移  $q_{n_{l+1}}$ .

简单些, 不妨认为  $n_l = 1$ . 知道了  $q_0, p_0; q_1, p_1$  要寻求  $q_2, p_2$ . 这就有  $i = 0, 1, 2$ , 共 3 个节点了, 以后还要继续逐个传递. 要将下一步的初始状态计算出来. 虽然说是时滞积分, 却也不妨看成结构力学的状态传递问题. 结构静力学容易理解些.

回看分析动力学的区段作用量  $S(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$ , 就是以两端位移为自变量的. 然后转换到传递辛矩阵的形式, 这与结构力学传递辛矩阵相似<sup>[12]</sup>.

先从结构力学开始.  $n_l = 1$  时的结构力学界带问题, 左界带位移是  $\mathbf{q}_a: q_0, q_1$  而右界带位移是  $\mathbf{q}_b: q_0, q_1$  具体说界带有  $n_l + 1$  个节点. 变形能可以用对称矩阵[按图 1b 的结构]:

$$U_0(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{Bmatrix}^T \mathbf{K} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{Bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{ab} = \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & * \end{bmatrix},$$

$$U_0(q_0, q_1; q_2, q_3) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_+ & -k_1 & -k_2 & 0 \\ -k_1 & k_+ + k_2 & -k_1 & -k_2 \\ -k_2 & -k_1 & 2k_+ & -k_1 \\ 0 & -k_2 & -k_1 & 2k_+ \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$$

$$\text{where } k_+ = k_c + k_1 + k_2 \quad (6)$$

其中下标 0 代表界带内部有 0 个节点位移. 变换到传递辛矩阵, 成为从  $\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a$  传递到  $\mathbf{q}_b, \mathbf{p}_b$ <sup>[12]</sup>. 动力学也可用相同的形式表述.

此类形式的辛矩阵传递是跳跃式前进的, 每次前进一个界带. 两端位移  $\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b$  的对偶向量是

$$\mathbf{p}_a = -\partial U_0 / \partial \mathbf{q}_a, \quad \mathbf{p}_b = \partial U_0 / \partial \mathbf{q}_b \quad (7)$$

从结构力学看, 原来左界带位移是  $\mathbf{q}_a: q_0, q_1$  而右界带位移是  $\mathbf{q}_b: q_2, q_3$ . 根据  $\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a$  计算  $\mathbf{q}_b, \mathbf{p}_b$ . 用到方程(8). 跳跃式前进是辛矩阵乘法, 已经讲得很多了. 虽然是一维链简单问题, 但其它问题的处理雷同.

选择什么方法求解, 也有是否恰当的问题. 结构力学问题本来应当按两端边界条件, 组装总刚度阵, 再 LDLT 分解、求解. 这已经是结构分析的常规, 被广泛接受. 传递求解, 在分析方面是好看的, 在数值病态方面不一定好, 所以不被接受, “逆天行事”. 不过, 现在讲的是结构力学的分析理论与方法, 而意图

是通过结构力学与动力学的模拟,转移到动力学去。“醉翁之意不在酒”,病态就病态,无非是要转移到动力学去,这才是目标.只要动力学积分不出现病态,就可接受了.动力学积分是初值问题,本来就需要传递求解.但不可单纯地跳跃式前进,而需要逐步积分.所以结构力学还要进一步逐步积分.

以上是按界带跳跃式前进积分的.向动力学时滞问题过度,要求只积分一个 $\eta$ .下一次的界带就成为 $\mathbf{q}'_a = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}^T$ ,而 $\mathbf{q}'_b = \{q_{n_1+1}, q_{n_1+2}, \dots, q_{2n_1}\}^T$ ,而 $q_0$ 成为应当出局的节点,即消去.问题成为:根据 $\mathbf{q}_a = \{q_0, q_1, \dots, q_{n_1-1}\}^T$ , $\mathbf{p}_a = \{p_0, p_1, \dots, p_{n_1-1}\}^T$ ,计算 $\mathbf{q}'_a = \{q_1, q_2, \dots, q_{n_1}\}^T$ 与 $\mathbf{p}'_a = \{p'_1, p'_2, \dots, p'_{n_1}\}^T$ .注意 $p'_i$ 与 $p_i$ 是不同的.但现在要传递逐步消元,只用前面的 $\mathbf{R}: (2n_l + 1) \times (2n_l + 1)$ 进行计算.将矩阵 $\mathbf{R}$ 分解为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} d_0 & \mathbf{r}_{a0} & 0 \\ \mathbf{r}_{a0}^T & \mathbf{R}_{aa} & \mathbf{R}_{ab} \\ 0 & \mathbf{R}_{ba} & \mathbf{R}_{bb} \end{bmatrix} \begin{matrix} p_0 & 1 \\ \mathbf{p}'_{a0} & n_l \\ \mathbf{0} & n_l \end{matrix}$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}'_a \\ \mathbf{q}'_b \end{bmatrix}^T \mathbf{R} \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}'_a \\ \mathbf{q}'_b \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ n_l \\ n_l \end{matrix}, \mathbf{R}_{ab}: \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

$$\Pi_+ = (p_0 q_0 + \mathbf{p}'_{a0}^T \mathbf{q}'_a + U_1),$$

$$r_{a0}: 1 \times n_l, \mathbf{R}_{aa}: n_l \times n_l, \mathbf{R}_{bb}: n_l \times n_l \quad (8)$$

后面的无关.将 $\Pi_+$ 乘出来.对于 $q_0$ 取最小得到

$$q_0 = -(\mathbf{r}_{a0}/d_0) \mathbf{q}'_a - p_0/d_0 \quad (9)$$

代入 $\Pi_+$ 得到:

$$\Pi' = [\mathbf{p}'_{a0}^T \mathbf{q}'_a + U'_1(\mathbf{q}'_a, \mathbf{q}'_b)]$$

$$U'_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q}'_a \\ \mathbf{q}'_b \end{bmatrix}^T \mathbf{R}' \begin{bmatrix} \mathbf{q}'_a \\ \mathbf{q}'_b \end{bmatrix}, \mathbf{R}' = \begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{aa} & \mathbf{R}_{ab} \\ \mathbf{R}_{ba} & \mathbf{R}_{bb} \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中:

$$\mathbf{R}'_{aa} = [\mathbf{R}_{aa} - \mathbf{r}_{a0}^T d_0^{-1} \mathbf{r}_{a0}] =$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{r}_{a0}/d_0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 & \mathbf{r}_{a0} \\ \mathbf{r}_{a0}^T & \mathbf{R}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{r}_{a0}/d_0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}'_{ab} = \mathbf{R}_{ab}, \quad \mathbf{R}'_{bb} = \mathbf{R}_{bb} \quad (11)$$

$$\mathbf{p}'_a = \mathbf{p}'_{a0} - \mathbf{r}_{a0}^T \cdot p_0/d_0 \quad (12)$$

其中,重要的是子矩阵 $\mathbf{R}'_{ab}$ 依然具有同样形式,因此消元可递归进行.通过以上计算,结构力学的界带就前进了一步,所谓步进,得到了 $U'(\mathbf{q}'_a, \mathbf{q}'_b)$ .从 $U'(\mathbf{q}'_a, \mathbf{q}'_b)$ 再表达为传递辛矩阵的形式,就是常规了.

因此,步进计算是按下面步骤进行的

1 组成 $\mathbf{R}: (2n_l + 1) \times (2n_l + 1)$ ,并按(8)分解成 $\mathbf{R}_{aa}, \mathbf{R}_{ab}, \mathbf{R}_{bb}; \mathbf{r}_{a0}, d_0; p_0, \mathbf{p}'_{a0}$ .其中向量 $\mathbf{p}'_{a0}$ 最后的元素是0

2 按(11)计算新的 $\mathbf{R}'_{aa}$ ,而 $\mathbf{R}_{ab}, \mathbf{R}_{bb}$ 不变,组成 $2n_l \times 2n_l$ 矩阵 $\mathbf{R}'$ .

3 按(12)计算新的对偶力 $\mathbf{p}'_a$

这样就完成了一次递归步进的计算,可继续进行下面的步进计算了.

**算例1** 由于 $n$ 可以有很多,以下简单些设 $n = 10$ ,即 $i = 0, 1, \dots, 9$ . $n_l = 3$ ,而 $k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 0$ .5.可以发现由于此时 $n/n_l$ 不再是整数,由于无法完整分割基本界带子结构,直接采用跳跃式传递矩阵计算出现困难.但这对步进式计算模式则毫无影响.左端为给定力的边界条件,设 $p_0 = 2, p_1 = 1, p_2 = 1$ .注意 $p_0 + p_1 + p_2 = 4$ ,可用于检验平衡条件.而右端则固定, $q_7 = q_8 = q_9 = 0$ .要求解各点的位移 $q_0, \dots, q_7$ ,以及各界带左端的力 $\mathbf{p}_{\#j}$ .利用步进式计算得出的结果如表1所示.

表1 步进式界带结构传递辛矩阵计算结果( $n_l = 3$ )

Table 1 Numerical results obtained by using step-increase symplectic transfer matrix ( $n_l = 3$ )

	left border (j=2)	step-increase 1 left inter-belt (j=3)	step-increase 2 left inter-belt (j=4)	step-increase 3 left inter-belt (j=5)	step-increase 4 left inter-belt (j=6)	step-increase 3 right inter-belt (j=8)	step-increase 4 right inter-belt (j=9)
$q_{j-2}$	2.75913181	2.36591607	2.08936481	1.67152878	1.28803274	0.56558074	0
$q_{j-1}$	2.36591607	2.08936481	1.67152878	1.28803274	0.91763402	0	0
$q_j$	2.08936481	1.67152878	1.28803274	0.91763402	0.56558074	0	0
$p_{j-2}$	-2	—	—	-2.07386086	-2.10726581	-1.97953259	-2.69281187
$p_{j-1}$	-1	—	—	-1.34027373	-1.33976015	-1.56165039	-1.02439775
$p_j$	-1	—	—	-0.58586539	-0.55297402	-0.45881701	-0.28279037
$p'_{j-2}$	—	-2.14285714	-2.83606557	-2.67015706	-2.68262704	—	—
$p'_{j-1}$	—	-1.57142857	-0.91803278	-1.02792321	-1.03669051	—	—
$p'_j$	—	-0.28571428	-0.24590163	-0.30191972	-0.28068244	—	—

可以看到,采用步进方法计算得出的位移与采用界带传递矩阵跳跃式计算得出的结果相一致,虽然存在部分差异,但相对误差已经控制在  $10^{-8}$  量级以内,这主要是由于步进计算的传递矩阵计算次数比跳跃式计算要多出大约一倍,舍入误差已经在所难免。

分析计算结果可以发现平衡条件和弹性本构关系满足的很好,读者可以行验证。

还可以利用跳跃式的传递矩阵进行验算,计算出跳跃式传递矩阵,可以通过计算得出的  $\mathbf{q}_0 = [q_0, q_1, q_2]^T$  连同边界条件  $\mathbf{p}_0 = [p_0, p_1, p_2]^T$  组成初始变量  $\mathbf{v}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{p}_0 \end{Bmatrix}$ , 利用  $\mathbf{v}_0$  左乘跳跃式传递矩阵可得:

$$\mathbf{S}_1 \mathbf{v}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{p}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.67152878 \\ 1.28803274 \\ 0.91763402 \\ -2.07386086 \\ -1.34027373 \\ -0.58586539 \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{S}_2 \mathbf{S}_1 \mathbf{v}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_5 \\ \mathbf{p}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.56558074 \\ 0 \\ 0 \\ -1.97953259 \\ -1.56165039 \\ -0.45881701 \end{Bmatrix};$$

可以看到当  $n_l = 3$  时,步进三次与一次跳跃式传递矩阵计算的结果相一致,正好验证了前文所提出的:  $n_l$  次步进的积分结果与一次跳跃式积分结果相同。

## 2 连续系统的能量形式及其界带分析方法

以上只是离散系统,毕竟离散系统是连续系统的近似. 于是要问,在连续系统的情况下变形能究竟怎样表达. 按《力、功、能量与辛数学》分析结构力学的例题,有一次微商的能量,其实就是向量节点间的弹簧. 化到连续系统,有能量

$$U_1(q) = \int_0^L M \dot{q}^2(x)/2 \cdot dx \quad (13)$$

可将它离散组成的刚度阵的形式. 时滞弹簧则组成界带宽度的对称阵  $\mathbf{K}$ , 变形能  $\mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}/2$ . 当转换到连续坐标时,成为泛函

$$U_2(q) = \int_0^L \int_0^L [q(s)K(s,x)q(x)/2] \cdot ds dx \quad (14)$$

核函数  $K(s,x) = K(x,s)$ . 应明确

$$K(s,x) = 0, \quad \text{when } x > s + t_d \quad (15)$$

其中  $t_d$  就是界带宽度. 然后就是:

$$\min_{q(x)} [U_1(q) + U_2(q)] \quad (16)$$

完成(16)式的变分可得出微分-积分方程:

$$M \ddot{q}(x) - \int_0^L [K(s,x)q(s)] \cdot ds = 0 \quad (17)$$

对于  $U_1$ , 如果是在频域求解, 则  $U_1 = \int_0^L (-M\omega^2 q^2/2) dt$ , 成为能带分析了.

求解时滞系统只能离散成  $t = 0, \eta, \dots, j\eta, \dots, (n_l \eta = L)$ . 时滞的动能  $U_1(q)$  在时间离散后成为

$$T = \mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q}/2, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & 2 & -1 & \\ & & & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{M}{\eta}, \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n_l} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

先考虑定常系统, 此时  $K(s,x) = K(|s-x|)$ , 就是说只依赖一个变量  $|s-x|$ . 于是变形能  $U_2(q)$  的积分成为

$$U_2(q) = \int_0^L q(t) \left[ \int_{t-t_d}^{t+t_d} [q(s-t)K(\tau)/2] \cdot ds \right] dt, \quad \tau = s-t \quad (19)$$

微分-积分方程的分析求解, 还没有充分的研究. 寻求离散求解是必然的途径. 应考虑  $0 \sim t_d$  应划分多少区段的问题, 最简单是取一个区段. 设  $L$  划分为  $m_e$  个区段  $L = t_d \times m_e$ , 每个区段再划分为  $n_l$  个子区段  $t_d = n_l \eta$ ; 其中两端  $[0, t_d]$  处的  $\mathbf{p}_0$ , 以及  $[L - t_d, L]$  处的  $\mathbf{q}_{m_e-1}$  为给定两端边界条件(考虑到过渡到动力学, 如果是初值条件则应给定  $[0, t_d]$  处的  $\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0$ ),  $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{m_e-2}$  为未知数. 于是区域  $-t_d \leq s-t \leq t_d$  离散得到  $2n_l + 1$  个点, 包括点  $s=t$ , 时滞离散的段数是  $n_l$  个, 有  $n_l + 1$  点. 离散后得到的代数矩阵本征值方程为  $(2n_l + 1) \times (2n_l + 1)$  矩阵的本征值方程.

现在要计算  $x = k\eta$  附近的变形能  $U_2(q)$  积分, (18)的积分区间是  $-t_d \leq \tau \leq t_d, x = k\eta$  有关的位移是  $q_{k-1}, q_k, q_{k+1}$ . 积分时采用线性插值, 于是:

$$q(s-t) = q(\tau) =$$

$$\begin{cases} q_k + (q_{k+1} - q_k) \cdot \tau/t_d, & \text{when } \tau > 0 \\ q_k + (q_k - q_{k-1}) \cdot \tau/t_d, & \text{when } \tau < 0 \end{cases} \quad -t_d < \tau < t_d \quad (20)$$

#I号( $i-1$ )~ $i$ 子区段中间两端节点位移是 $q_{i-1}$ , $q_i$ ,而分布则是

$$q(i\eta - \eta + \tau) = q_{i-1} + (q_i - q_{i-1}) \cdot \tau/\eta \quad (21)$$

首先观察 $x$ 的一个步长 $x_{k-1} \sim x_k, x_k \sim k_{k-1} = \eta$ 区段的积分,运用梯形近似积分公式有

$$\begin{aligned} U_2(q_{k-1}, q_k) &= \int_{k\eta-\eta}^{k\eta} q(x) \left[ \int_{-t_d}^{t_d} [q(x - \tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau \right] dx \approx \frac{\eta}{2} [q_{k-1} \int_{-t_d}^{t_d} [q(k\eta - \eta - \tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau + q_k \int_{-t_d}^{t_d} [q(k\eta - \tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau] \quad (22) \end{aligned}$$

其中,积分 $\int_{-t_d}^{t_d} [q(k\eta - \eta - \tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau$ 中的函数 $q(k\eta - \eta - \tau)$ ,就是 $x_{k-1}$ 附近的;而 $\int_{-t_d}^{t_d} [q(k\eta - \tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau$ 中的函数 $q(k\eta - \tau)$ ,就是 $x_k$ 附近的.

(22)已经将作用量的两重积分化成为其两端的积分:

$\int_{-t_d}^{t_d} [q(k\eta - \tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau$ ,与 $\int_{-t_d}^{t_d} [q(k\eta - \eta - \tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau$ 之和.可以看到 $q(k\eta - \tau)$ 在 $-t_d \leq \tau \leq t_d$ 范围内,在离散后有以 $q_k$ 为中心的 $n_l + 1$ 个节点对积分有贡献.同样 $q(k\eta - \eta - \tau)$ 在离散后也有以 $q_{k-1}$ 为中心的 $n_l + 1$ 个节点对积分有贡献.表明,区段 $x_{k-1} \sim x_k$

$$\begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \end{Bmatrix}^n = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{2n} \end{Bmatrix}, \mathbf{K} = \frac{\eta^2}{4} \begin{bmatrix} k_0 & 2k_1 & 2k_2 & \cdots & \cdots & 1.5k_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ k_1 & 2k_0 & 2k_1 & 2k_2 & \cdots & \cdots & k_n & 0 & \ddots & \vdots \\ 2k_2 & 4k_1 & 4k_0 & 4k_1 & 4k_2 & \cdots & \cdots & 2k_n & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1.5k_n \\ 1.5k_n & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 2k_n & \cdots & \cdots & 4k_2 & 4k_1 & 4k_0 & 4k_1 & 2k_2 \\ \vdots & \ddots & 0 & 2k_n & \cdots & \cdots & 4k_2 & 4k_1 & 4k_0 & 2k_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1.5k_n & \cdots & \cdots & 2k_2 & 2k_1 & k_0 \end{bmatrix}$$

这是连续结构的变形能公式,如果考虑的是时滞问题,每次影响的范围微积分变为:

$$U_2(q_{k-1}, q_k) = \int_{k\eta-\eta}^{k\eta} q(x) \left[ \int_{-t_d}^0 [q(x-\tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau \right] dx \quad (24)$$

= $k\eta$ 的作用量就是等带宽的矩阵.与前面的离散系统比较,可发现其矩阵的结构是一致的.这样,前文的计算方法,对于连续系统离散后的计算,是可用的.由于 $t_d = n\eta$ ,则:

$$\begin{aligned} &\int_{-t_d}^{t_d} [q(k\eta - \tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau = \\ &\int_{-n\eta}^{n\eta} [q(k\eta - \tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau = \\ &\frac{\eta}{2} [q_{k-1}k_n + 2q_{k-n+1}k_{n-1} + 2q_{k-n+2}k_{n-2} + \cdots + \\ &2q_{k+n-1}k_{n-1} + q_{k+n}k_n] \end{aligned}$$

故可得:

$$\begin{aligned} U_2(q_{k-1}, q_k) &= \frac{\eta}{2} [q_{k-1} \int_{-n\eta}^{n\eta} [q(k\eta - \tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau + \\ &q_k \int_{-t_d}^{t_d} [q(k\eta - \tau)K(\tau)/2] \cdot d\tau] = \\ &\frac{\eta^2}{8} [q_{k-1}(q_{k-1-n}k_n + 2q_{k-n}k_{n-1} + 2q_{k-n}k_{n-1} + \cdots + \\ &q_{k-1+n}k_n) + q_k(q_{k-n}k_n + 2q_{k-n+1}k_{n-1} + \cdots + q_{k+n}k_n)] \end{aligned}$$

对于区段 $0 \sim 2t_d$ ,将该区段划分为 $2n$ 份,已知区段为 $[0, t_d]$ ,待求区段为 $(t_d, 2t_d]$ ,则离散后,已知区段内共有 $n+1$ 个已知点,下一个界带宽度内有 $n$ 个未知节点.进而得到区段变形能公式为:

$$U_2(q_0, q_{2n}) = \int_0^{2t_d} q(x) \left[ \int_{-t_d}^{t_d} [q(x - |\tau|)K(\tau)/2] \cdot d\tau \right] dx = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_a \\ q_b \end{Bmatrix}^T \mathbf{K} \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_a \\ q_b \end{Bmatrix} \quad (23)$$

此时对应的刚度矩阵为:

$$U_{2t}(q_0, q_{2n}) = \int_0^{2t_d} q(x) \left[ \int_{-t_d}^0 [q(x - |\tau|)K(\tau)/2] \cdot d\tau \right] dx =$$

$$\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{Bmatrix}^T \mathbf{K}_i \begin{Bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{Bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{K}_i = \frac{\eta^2}{4} \times$$

$$\begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 & \cdots & \cdots & k_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ k_1 & 2k_0 & 2k_1 & 2k_2 & \cdots & \cdots & k_n & 0 & \ddots & \vdots \\ k_2 & 2k_1 & 2k_0 & 2k_1 & 2k_2 & \cdots & \cdots & k_n & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & k_n \\ k_n & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & k_n & \cdots & \cdots & 2k_2 & 2k_1 & 2k_0 & 2k_1 & k_2 \\ \vdots & \ddots & 0 & k_n & \cdots & \cdots & 2k_2 & 2k_1 & 2k_0 & k_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & k_n & \cdots & \cdots & k_2 & k_1 & k_0 \end{bmatrix}$$

从而连续结构变形能为:

$$S = U_1 + U_2 = \mathbf{q}^T \mathbf{R} \mathbf{q} / 2, \quad \mathbf{R} = (\mathbf{M} + \mathbf{K}) \quad (26)$$

微分积分方程为:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(x) - \int_0^L [K(s, x) \mathbf{q}(s)] \cdot ds = 0 \quad (27)$$

时间滞后问题的拉格朗日函数为:

$$S = T - U_2 = \mathbf{q}^T \mathbf{R} \mathbf{q} / 2, \quad \mathbf{R} = (\mathbf{M} + \mathbf{K}) \quad (28)$$

微分积分方程为:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \int_{t-t_d}^t [K(s, x) \mathbf{q}(s)] \cdot ds = 0 \quad (29)$$

可以看到连续结构的界带问题与时间滞后问题在数学关系上并没有本质的区别,而两者的刚度矩阵还具有近乎相同的结构形式,因而都可利用界带分析通过步进完成计算.下面给出算例与验证:

**算例 2:** 考虑时滞问题(29)的计算,由于难以构建在界带区段内满足(29)式的连续函数,这里先按两端边值问题给出两端的边界条件,然后利用步进算法,逐步计算完成各时间点的积分计算.通过采用不同的时间步长来验证以上算法.最后再计算用得出的左端边界条件利用迁移矩阵的方法计算各时间点的位移,并完成结果的对比分析.

令  $M = 1$ , 采用式(25)的刚度矩阵.  $K(\tau)$  取下式的函数形式:

$$K(\tau) = k_c + k_d(t_d - \tau) / t_d, \quad 0 < \tau \leq t_d \quad (30)$$

其中  $k_c = 1, k_d = 1$ ; 设左端存在边界条件  $q = 2, 0 \leq t \leq t_d$  右端边界条件为  $q = 0, t_f - t_d \leq t \leq t_f$ ; 取:  $t_f = 5t_d = 5$ . 分别取不同的离散方案,同样计算每个界带的两端节点和中间点的位移  $q_i$ , 计算结果如下表所示:

表 2 不同离散方案下的位移计算结果

Table 2 The results of displacement based on different scatter method

number of elements in inter - belt	displacement $q_0$	displacement $q_n$	displacement $q_{2n}$	displacement $q_{3n}$
n = 6	-7.43428382985196	-4.35970290434218	3.55744473878689	6.43595220742801
n = 20	-7.38482432933390	-4.28471166659958	3.52774083612823	6.35738539108173
n = 60	-7.38029947057316	-4.27807905712847	3.52503018749989	6.35036551118705
n = 100	-7.37993627964732	-4.27754819110740	3.52481265993378	6.34980316275568
n = 200	-7.37978300463443	-4.27732422038449	3.52472086021824	6.34956588795758

分析以上结果不难发现,不同离散方案下的计算结果间的相对误差较小; $n = 6$  与  $n = 200$  时四个采样点的相对误差分别为 0.73%, 1.9%, 0.93% 和 1.4%;  $n = 20$  与  $n = 200$  时的相对误差分别为: 0.068%, 0.17%, 0.086% 和 0.12%, 全部在  $10^{-3}$  量级;而  $n = 60$  与  $n = 200$  时各点的相对误差则全部在  $10^{-4}$  量级以内;  $n = 100$  与  $n = 200$  时各点的相对误差则全部在  $10^{-5}$  量级以内. 各点的相对误差在  $n = 6$  与  $n = 200$  已经可以接受,而对于  $n = 60$  和  $n = 200$  则非常满意了. 下图给出了  $n$  取不同值的位移曲线图,可以看到,随着  $n$  增大,曲线逐渐收敛

( $n = 60, 100$  与  $n = 200$  几乎完全重合这里便不再给出).

将计算得出的左端位移边界条件  $q_0$  与左端边界条件  $\dot{q}_0$  相结合构成初值条件,按照式(4, 5) 构建迁移矩阵,从新计算各时间点的位移. 计算结果如下表所示:

观察上表发现,当  $n$  较大时结果非但没有收敛却产生了较大的误差. 这是由于表 3 中计算的结果是利用表 2 的边值问题得到的迭代结果再次计算得出的. 由于边值问题的边界条件是确定的连续性边界条件,各点的位移可以通过迁移矩阵与确定的

边界条件相关联,从而得出较好的结果.但这些结果中的左端界带内的位移毕竟是通过迭代得出的,而且也是误差积累最多的;以此作为初值问题边界条件进行计算会进一步引入误差,从而造成表3的结果.通过表2的结果,不难预见:如果有准确的连续边值条件,必能获取较好的计算结果.

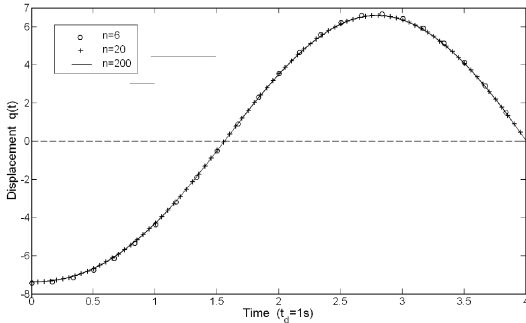


图2 不同离散方案下的计算结果

Fig. 2 Numerical results based on different scatter method

表3 不同离散方案下初值问题的计算结果

Table 3 The results of initial value problem based on different scatter method

number of elements in inter-belt	displacement $q_{2n}$	displacement $q_{3n}$	displacement $q_{4n}$
$n = 6$	3.55744473773049	6.43595220763954	$2.624909567484 \times 10^{-9}$
$n = 20$	3.52774500175886	6.35738612698930	$3.836407001300 \times 10^{-6}$
$n = 60$	3.52184884667423	6.35592843661002	$4.428174324912 \times 10^{-3}$
$n = 100$	3.45599295417105	6.30161033785728	$-2.907212128830 \times 10^{-2}$
$n = 200$	3.56006916903425	7.81479854659251	$9.058022807734 \times 10^{-2}$

注意:当  $n$  较大时,由于  $M$  阵和  $K$  阵相差较大的数量级,此时计算应注意分开存储,分别做累计运算;转换为迁移矩阵时再将其组合,以减少舍入误差.

至此时间滞后问题的理论和计算框架的可行性已得到验证,而(27)和(29)两式的计算从数学模型上说已无差异,因而可从连续结构问题直接过渡到时间滞后问题的计算,方法和理论完全是一套体系,虽然刚度阵不同,但结构上已无差异.

### 3 结束语

辛的出现已经有70年多了.本来是从分析力学而发展的,但随后却成为纯数学的表述,微分形式、切丛、余切丛、外乘积、Cartan几何,…….纯数学家特别喜欢采用公理体系.回顾英国1990年皇家学会会长,现代纯数学大师, M. Atiyah 表示:“一些

人认为公理是用来界定一个自我封闭的完整的数学领域的.我认为这是错的.公理的范围愈窄,您舍弃得愈多.……但是通过定义,舍弃了宣布您认为不感兴趣的东西,而从长远来看,您舍弃了很多根芽.如果您用公理化方法做了些东西,那么在一定阶段后您应该回到它的来源处,在那儿进行同花和异花受精,这样是健康的”.

辛数学在其公理系统下发育成长后,就要破茧.要向更广阔天地发展.纯数学关于辛的定义是不能满意的.当回归到辛数学的来源处,从分析动力学的数值求解方面,就看到了其不足.应当打破束缚,扩展概念.辛破茧就是要突破传统辛的公理系统,根据变分法的进一步发展及结构力学的实际,以及前面讲的4方面不足,重新考虑.本文只是对于4方面的不足分别加以破茧,发展还需要总体考虑.可称破茧辛.即使单纯是时滞保守系统,其数学理论也未见到过.破茧后的辛扩展,路还长着呢!

怎样扩展呢?应当看到,“数学是人类的一项活动”.它不是单独存在的而是与其它学科有千丝万缕联系的.变分法广泛适用于保守体系,而计算科学、有限元又与变分法紧密相连.破茧辛在数学方面与变分法可一起考虑;所以破茧辛的继续扩充发展,不应是封闭式的,而是应与客观问题联系在一起,不宜单纯局限于公理系统.

冯·诺依曼在数学家(The mathematician)一文中说:“不可否认,在数学中在那些人们所能想象的最纯的纯数学部分,一些最好的灵感来源于自然科学”.“现代数学的某些最好的灵感(我认为是最好的)无疑来自于自然科学”.“许多最美妙的数学灵感来源于经验,而且很难相信会有绝对的、一成不变的、脱离人类经验的数学严密性概念”.“在数学的本质中存在一种非常特殊的二重性.人们必须认识、接受这种二重性,并将它吸收到这门学科的思考中来.这种两面性就是数学的本来面目”.

所以辛数学也应与实际相结合.“数学是一门将完全不同的和毫无联系的事物组织成一个整体的艺术”,将辛数学融合于变分法中继续发展,就有望在计算科学方面达到新的高度.

Von Neumann:“在牛顿之后的一百五十多年里,唯一有的只是一个不精确的、半物理的描述!然而与这种不精确的、数学上不充分的背景形成对



照的是,数学分析中的某些最重要的进展却发生在这段时间!这一时期数学上的一些领军人物,例如欧拉,在学术上显然并不严密;而其他,总的来说与高斯或雅可比差不多。当时数学分析发展的混乱与模糊无以复加,并且它与经验的关系当然也不符合我们今天的(或欧几里德的)抽象与严密的概念。但是,没有哪一位数学家会把它排除在数学发展的历史长卷之外,这一时期产生的数学是曾经有过的第一流的数学!”。数学家喜欢听到“科学的皇后”的褒词,“毕竟,数学在所有科学领域中达到了抽象的顶峰,它应该适用与广阔的现象领域…将众多来自经验科学或数学本身的不同事物结合在一起,乃是数学的本质特征之一”。但不可以“皇后”自居,数学应密切与力学、物理等领域联系发展,哲学的指导意义是深刻的。

Von Neumann:“大多数数学家决定无论如何还是要使用这个系统。毕竟古典数学正产生着既优美又实用的结果,它至少是建立在如同电子的存在一样坚实的基础上的。因此,一个人愿意承认科学,那他同样会承认古典数学系统”。这些论述是很有启发意义的。本书呼吁对传统辛的公理体系进行破茧,就是期望与广大领域融合发展。应当看到,即使变分法也有局限性的。世界是极其复杂的,不可能用公理来定义的。人们只能不断学习,以适应世界。

Hilbert 指出:“数学问题的解答…以有限个前提为基础的有限步推理来证明的正确性…就是对于证明过程的严格性的要求”。Atiyah 在《数学与计算机革命》文中说:“特别还有‘构造性’证明的概念,即仅在有限个确定的步骤后就得到所要求的结论…与构造性密切相关的概念是所谓‘算法’”。可认识到,计算科学的算法与数学证明的关系。

辛数学破茧后,相信会有“反客为主”式的新发展。大家一起努力吧!

## 参 考 文 献

- 1 钟万勰.应用力学的辛数学方法.北京:高等教育出版社,2006 (Zhong W X. Symplectic solution methodology in applied mechanics. Beijing: Higher Education Press, 2006 (in Chinese))
- 2 冯康,秦孟兆. Hamilton 体系的辛计算格式.杭州:浙江科技出版社,2004 (Feng K, Qin M Z. Symplectic geometric algorithm for Hamiltonian systems. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Press, 2004 (In Chinese))
- 3 Zhong G, Marsden J E. Lie-Poisson Hamilton-Jacobi theory and Lie-Poisson integrators. *Physics Letter A*, 1988, 113 (3): 134 ~ 139
- 4 Hairer E, Lubich C H, Wanner G. Geometric numerical integration-Structure preserving algorithms for ordinary differential equations-2nd Ed. Berlin: Springer, 2006
- 5 高强,钟万勰. Hamilton 系统的保辛-守恒积分算法. 动力学与控制学报,2009,7(3):193 ~ 199 (Gao Q, Zhong W X. The symplectic and energy preserving method for the integration of Hamilton system. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(3): 193 ~ 199 (in Chinese))
- 6 钟万勰,高强. 时间-空间混和有限元. 动力学与控制学报,2007,5(1):1 ~ 7 (Zhong W X, Gao Q. Harmony element method for time and space domain. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(1): 1 ~ 7 (in Chinese))
- 7 H Goldstein. Classical mechanics, 2nd ed., Addison-Wesley, 1980
- 8 P M Morse, H Feshbach: Methods of Theoretical Physics, chapter 2. McGraw-Hill, 1953
- 9 高强,钟万勰. 有限元、变分原理与辛数学的推广. 动力学与控制学报,2010,8(4):289 ~ 296 (Gao Q, Zhong W X. FEM, Variational principle and the generalization of symplectic mathematics. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(4): 289 ~ 296 (in Chinese))
- 10 张洪武,姚征,钟万勰. 界带分析的基本理论和计算方法. 计算力学学报,2006,23(3):257 ~ 263 (Zhang H W, Yao Z, Zhong W X. Basic theory and algorithm for Inter-Belt analysis. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2006, 23(3): 257 ~ 263 (in Chinese))
- 11 姚征,张洪武,王晋宝,钟万勰. 基于界带模型的碳纳米管声子谱的辛分析. 固体力学学报,2008,29(1):13 ~ 22 (Yao Z, Zhang H W, Wang J B, Zhong W X. Symplectic analysis for phonon dispersion of carbon nanotubes based on inter-belt model. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2008, 29(1): 13 ~ 22 (in Chinese))
- 12 钟万勰. 力、功、能量与辛数学. 大连:大连理工大学出版社,2009 (Zhong W X. Force, work, energy and symplectic mathematics. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2009 (in Chinese))
- 13 Courant R, Hilbert D. Methods of Mathematical Physics, vol. 1. Wiley, New York, 1953
- 14 Bellman R, Cooke K L. Differential-difference equations. London: Academic Press, 1963

## TIME DELAY AND INTER-BELT\*

Yao Zheng<sup>1</sup> Zhang Hongwu<sup>2</sup> Zhong Wanxie<sup>2</sup>

(1. *Traffic Transportation Equipment and Ocean Engineering College, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China*)

(2. *State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China*)

**Abstract** Based on analytic structural mechanics, the interface of the two nearest sub-structures extends to a region with a certain width, named inter-belt, where the inter-belt theory and the corresponding algorithm under the framework of symplectic system can analyze the nonlocal characteristic of structures. The integral of time delay elasticity system in analytic dynamics still has many questions in theoretical aspects, which needs to be made clear. There are simulative relations between analytic dynamics and analytic structural mechanics, hence the inter-belt theory can be applied in solving the integral problems of time delay elasticity system, and the corresponding arithmetic can be founded based on symplectic system. Numerical examples were carried out for the validity of the theory and algorithm developed. As a basic research work, the present study illustrates well the potential of the inter-belt as well as the symplectic algorithm and is valuable for the further research.

**Key words** inter-belt analysis, time delay, symplectic method, analytic structural mechanics, sub-structure technique