

## 二维映射神经元模型中的振动共振\*

刘秋香<sup>1</sup> 于海涛<sup>2</sup> 王江<sup>2</sup>

(1. 河北工业大学计算机科学与软件学院, 天津 300401) (2. 天津大学电气与自动化工程学院, 天津 300072)

**摘要** 在二维映射神经元模型中,同时施加高、低两种不同频率的刺激信号,以高频信号为调制信号,研究其对系统动力学特性的影响.仿真结果表明,通过调节高频信号的幅值为某一合适值,可以使得神经元膜电位对弱低频信号的线性响应达到最优,产生振动共振现象,从而证实了高频刺激信号能够帮助神经元探测和传导弱低频信号.另外,还研究了模型和信号参数对系统共振特性的影响.

**关键词** 神经元, 二维映射模型, 振动共振, 刺激信号

### 引言

传统的观念认为噪声是有害的,然而在非线性系统中噪声对于一些重要动力学过程的发生是必要的,其中一个重要的方面就是噪声诱导的随机共振现象<sup>[1-2]</sup>.随机共振的概念最早是由 Benzi 等人于 1981 年在研究周期循环的冰期气候问题时提出来的,是指在弱噪声和外界周期输入信号的协同作用下,非线性系统输出的信噪比在某一噪声强度下达到最大<sup>[3]</sup>.随机共振理论的提出,使人们意识到噪声对非线性复杂动力学系统具有积极的调控作用.到目前为止,随机共振现象在许多非线性系统中被广泛研究,尤其是神经系统,不管是单个神经元还是神经网络,都发现了频率依赖的随机共振现象<sup>[4-7]</sup>.

随着共振研究的发展,另一种与随机共振相关的现象称之为振动共振引起了人们的极大关注,振动共振是指双稳系统在高、低两种不同频率信号作用下,以高频信号为调制信号,通过调节高频信号的幅值或频率来改变系统的动力学特性,使系统对低频信号的响应幅值达到极值<sup>[8-10]</sup>.振动共振的发生需要两种不同频率的信号,而在通讯、声学、神经系统科学、激光物理等领域确实存在高低两种频率信号,且低频信号携带的信息又往往是人们感兴趣的,因此振动共振在这些领域得到了广泛的研究和应用<sup>[11-13]</sup>.振动共振理论的提出对人们进一步认识非线性共振机制具有重要意义和价值.

最近,神经系统中的振动共振现象引起了科学家的广泛兴趣,神经元在高、低频刺激信号的共同作用下,超过放电阈值而产生动作电位,并在一定的高频信号强度下系统对低频信号的膜电位响应达到最优,从而达到放大低频信号的效果.到目前为止,我们已经在神经元的 FitzHugu - Nagumo (FHN)模型中观察到了振动共振现象<sup>[14-16]</sup>,证实了高频噪声能够帮助神经元感受和传导弱低频信号.然而,对于离散化的神经元模型,其振动共振现象有待进一步研究.本文对二维映射神经元模型<sup>[17-18]</sup>同时施加高、低两种不同频率信号,以高频信号为调制信号,研究其对系统动力学特性的影响,以及诱导产生的振动共振现象.

### 1 模型

2002年,Rulkov最早提出了二维映射神经元模型<sup>[17]</sup>.根据参数取值的不同,该模型可以模拟生物神经元的静息、连续神经脉冲放电和爆发式神经脉冲放电等不同的动力学行为.2004年,为了描述神经元的次阈值振荡行为,Rulkov和Shilnikov对这个二维映射模型进行了修改<sup>[18]</sup>.修改后模型的动力学方程为:

$$x(n+1) = f_{\alpha}(x(n), y(n) + \beta) \quad (1)$$

$$y(n+1) = y(n) - \mu(x(n) + 1 - \sigma) \quad (2)$$

其中参数  $n$  表示迭代序数,  $x$  为系统的快变量,代表神经元的膜电位;  $y$  为系统的慢变量,或者恢复变量,表征神经元细胞膜上离子通道的门控离子

(主要为  $Ca^{2+}$ ) 的浓度;较小的常数  $\mu$  使  $x$  的变化对  $y$  的影响十分微小; $\beta$  和  $\sigma$  描述外部对系统的输入或影响, $\sigma$  也常被用来作为控制单个神经元动力学行为的参量. 非线性函数是  $f_\alpha(x, y + \beta)$  一个分段函数,具体形式如下:

$$f_\alpha(x, y + \beta) = \begin{cases} -\alpha^2/4 - \alpha + y + \beta & (x < -1 - \alpha/2) \\ \alpha x + (x+1)^2 + y + \beta & (-1 - \alpha/2 \leq x \leq 0) \\ y + 1 + \beta & (0 < x < y + 1 + \beta) \\ -1 & (x \geq y + 1 + \beta) \end{cases} \quad (3)$$

其中  $\alpha$  为系统参量.

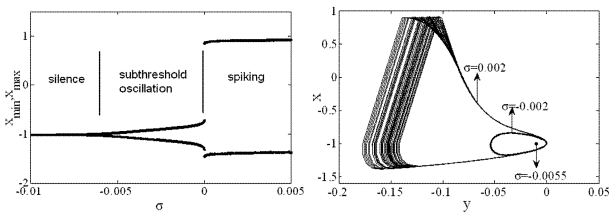


图 1 映射模型的动力学特性. (a) 分岔图; (b) 相空间图

Fig 1 Dynamics of the map. (a) Bifurcation diagram; (b) Phase space map

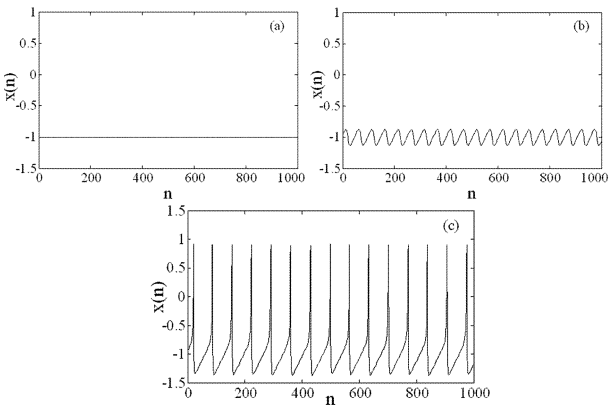


图 2 映射模型的动力学行为. (a) 静息; (b) 次阈值振荡; (c) 连续神经脉冲放电

Fig. 2 Dynamical behaviors of the map. (a) silence; (b) subthreshold oscillation; (c) spiking

首先设定模型参数  $\alpha = 0.99, \beta = 0, \mu = 0.02$ , 选取  $\sigma$  为控制参数, 研究神经元模型的确定性动力学行为. 结果表明, 随着控制参数  $\sigma$  的变化, 神经元可分别处于静息状态、次阈值振荡状态和连续神经脉冲放电状态. 系统的分岔特性如图 1 (a) 所示, 模型在  $\sigma \approx -0.005$  处发生 Andronov - Hopf 分岔, 由稳定的静息状态进入稳定的次阈值振荡状态; 随着  $\sigma$  的进一步增大, 系统由稳定的次阈值振荡状态转变为神经脉冲放电状态. 图 1 (b) 给出了系统在不同的控制参数  $\sigma$  下对应的相空间轨迹,

当  $\sigma \leq 0.005$  时, 系统处于稳定的定态; 当  $-0.005 < \sigma < 0$  时, 小幅的次阈值振荡出现; 当  $\sigma \geq 0$  时, 系统开始大幅振荡, 产生神经脉冲放电. 对应以上不同状态的膜电位时间序列如图 2 所示.

## 2 振动共振

考虑受高、低两种不同频率信号作用的二维映射神经元模型, 可用如下方程来描述:

$$x(n+1) = f_\alpha(x(n), y(n) + \beta) + A \cos(\omega n) + B \cos(\Omega n) \quad (4)$$

$$y(n+1) = y(n) - \mu(x(n) + 1 - \sigma) \quad (5)$$

其中  $A \cos(\omega n)$  是幅值为  $A$ 、频率为  $\omega$  的低频信号,  $B \cos(\Omega n)$  是幅值为  $B$ 、频率为  $\Omega$  的高频信号, 且  $\Omega \gg \omega$ .

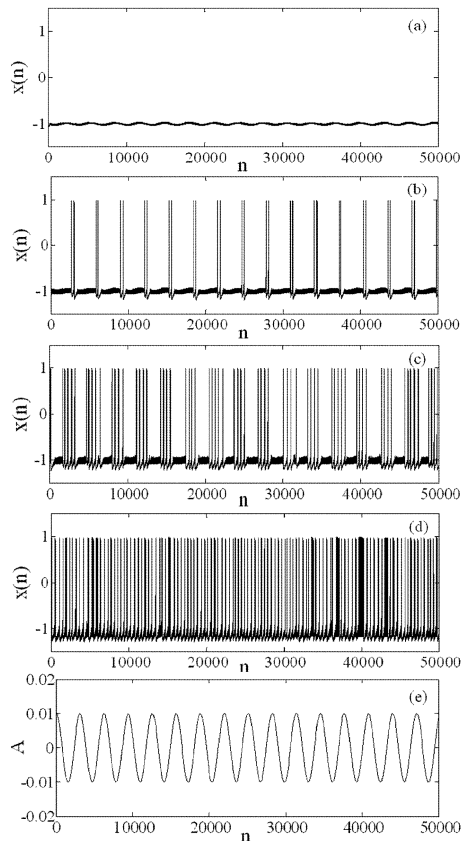


图 3 不同噪声强度下神经元的膜电位时间序列. (a)  $B = 0.002$ , (b)  $B = 0.005$ , (c)  $B = 0.008$ , (d)  $B = 0.015$ , (e) 低频信号

Fig. 3 Time series of the neuron for different noise intensities.

(a)  $B = 0.002$ , (b)  $B = 0.005$ , (c)  $B = 0.008$ , (d)  $B = 0.015$ , (e) low-frequency signal

首先, 我们选取模型的控制参数  $\sigma = -0.0055$ , 其他参数与图 1 中保持一致, 由图 2 可知此参数下神经元处于静息状态. 选取低频信号为  $0.01 \cos(0.002n)$ , 是一个次阈值信号, 即在无高频

信号的情况下低频信号不足以触发动作电位,这样可以保证加入高频信号以后得到的动作电位完全是由高频信号所激发的.另外,选取高频信号的频率为 $\Omega=0.1$ ,改变高频信号的幅值 $B$ ,研究其对神经元动力学特性的影响.

图3给出了不同 $B$ 的情况下神经元的膜电位时间序列.明显可见根据高频信号幅值的不同,神经元表现出完全不同的动力学特性.当幅值很小时,如 $B=0.002$ ,高频信号不足以触发动作电位,神经元膜电位只是在平衡点附近小幅波动,系统保持次阈值振荡状态;随着幅值的逐渐增加,如 $B=0.005$ 和 $0.008$ 时,神经元产生大幅的动作电位,系统出现周期簇放电现象,且 $B$ 越大单个簇放电内脉冲放电个数越多,此时神经元簇放电频率与低频信号频率相等,即出现锁相状态;但是当幅值超过某一个阈值后,如 $B=0.015$ 时,神经元开始产生连续的神神经脉冲放电现象,此时神经元的放电频率与低频信号无明显关联.由此可见,神经元对低频信号的膜电位响应与高频信号的强度有关,强度很小时没有动作电位产生,而强度很大时产生的动作电位则与低频信号的频率不相关.存在一个合适的高频信号强度,使得神经元的膜电位能够较好地响应弱低频信号.

为了定量刻画神经元输出的膜电位对输入低频信号的响应,我们计算了输出信号对输入信号频率 $\omega$ 的线性响应,其定义为<sup>[19]</sup>

$$Q_{\sin} = \frac{1}{NT} \sum_{n=1}^{NT} 2x_n \sin(\omega n) \quad (6)$$

$$Q_{\cos} = \frac{1}{NT} \sum_{n=1}^{NT} 2x_n \cos(\omega n) \quad (7)$$

$$Q = \sqrt{Q_{\sin}^2 + Q_{\cos}^2} \quad (8)$$

其中, $NT$ 为神经元的动力学演化迭代的总步数.在后面的计算中,我们取 $NT=100000$ ,为了保证计算结果的准确性,对每一个相同的参数计算了10次动力学演化,取其平均 $Q$ 值为最终结果.

图4给出了低频信号幅值 $A$ 取不同值时,系统的线性响应 $Q$ 随 $B$ 的变化曲线.随着 $B$ 的增大, $Q$ 值一开始几乎保持不变,此时神经元保持次阈值振荡状态,无动作电位产生(图3(a));当 $B$ 达到某一阈值时, $Q$ 值迅速增加到极值,此时神经元膜电位对低频输入信号的线性响应最佳,产生了振动共振现象(图3(c));随着 $B$ 值进一步增大, $Q$ 值逐渐

降低(图3(d)).另外,随着低频信号幅值 $A$ 的增大,系统发生共振所需要的高频信号强度阈值不断降低,且对应的最大 $Q$ 值单调增大.这是因为低频信号幅值越大,导致神经元的兴奋性越强,激发动作电位所需要的高频信号强度也就越低,共振效果越显著.

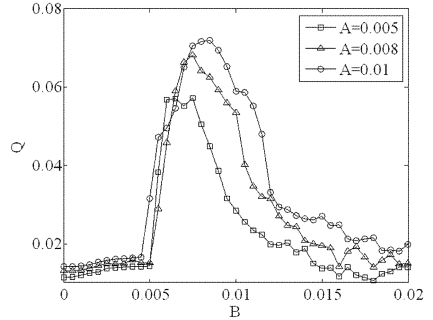


图4 低频信号幅值 $A$ 取不同值时,线性响应 $Q$ 随 $B$ 的变化曲线, $\omega=0.02, \Omega=0.1$

Fig. 4 Linear response  $Q$  versus  $B$  for different values of  $A$ ,  $\omega=0.02, \Omega=0.1$

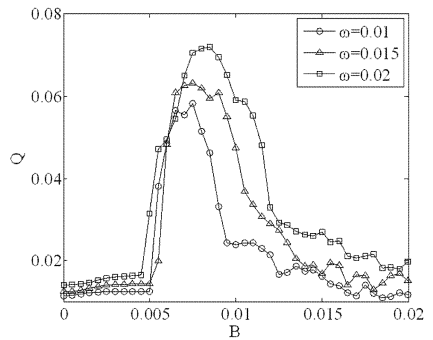


图5 低频信号频率 $\omega$ 取不同值时,线性响应 $Q$ 随 $B$ 的变化曲线, $A=0.01, \Omega=0.1$

Fig. 5 Linear response versus for different values of  $\omega$ ,  $A=0.01, \Omega=0.1$

下面研究低频信号频率对系统振动共振特性的影响.图5给出了 $\omega$ 取不同值时,系统的线性响应 $Q$ 随 $B$ 的变化曲线.对于不同的 $\omega$ ,随着 $B$ 的逐渐增大, $Q$ 值先增大后减小,存在某一适中的 $B$ 值使得 $Q$ 达到最大值.这与改变低频信号强度 $A$ 的效果类似,表明存在合适强度的高频信号使神经元对低频刺激信号的线性响应最优,这有利于神经元感受和传递弱低频信号;而较弱或者过强的高频信号都会使得神经元对低频信号的线性响应变差.另外,随着低频信号频率的增大,系统的最大 $Q$ 值不断增加,振动共振效果越明显.

进一步研究高频信号的频率和幅值对系统振

动共振特性的影响. 图 6(a) 给出了高频信号频率  $\Omega$  取不同值时, 系统的线性响应  $Q$  随  $B$  的变化曲线. 可见随着  $\Omega$  的增大, 系统的最大  $Q$  值不断减小, 且对应的高频信号强度不断增大. 表明高频信号频率越大, 振动共振现象越难发生. 事实上, 当  $\Omega$  值很大时, 无论如何调节幅值  $B$  神经元都不会不产生动作电位, 表明系统对高频信号的频率具有选择性. 图 6(b) 给出了高频信号幅值  $B$  取不同值时, 系统的线性响应  $Q$  随  $\Omega$  的变化曲线. 分析可知, 对于任一  $B$  值, 随着  $\Omega$  的逐渐增大,  $Q$  值先增大后减小, 都存在某一适中  $\Omega$  的值使得  $Q$  达到最大值, 表明通过调节高频信号频率  $\Omega$  系统同样能够产生振动共振现象.

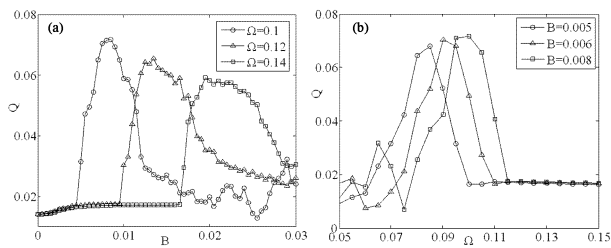


图 6 (a) 高频信号频率  $\Omega$  取不同值时, 线性响应  $Q$  随  $B$  的变化曲线;  
(b) 高频信号幅值  $B$  取不同值时, 线性响应  $Q$  随  $\Omega$  的变化曲线.

Fig. 6 (a) Linear response  $Q$  versus  $B$  for different values of  $\Omega$ ;  
(b) Linear response  $Q$  versus  $\Omega$  for different values of  $B$

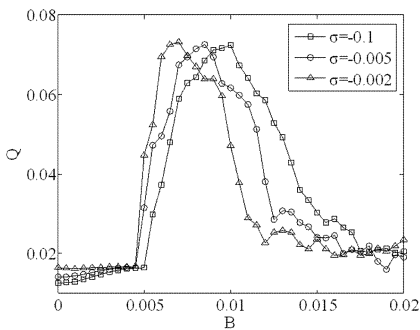


图 7 控制参数  $\sigma$  取不同值时, 线性响应  $Q$  随  $B$  的变化曲线

Fig. 7 Linear response  $Q$  versus  $B$  for different values of  $\sigma$

最后研究神经元模型的控制参数对系统共振特性的影响. 图 7 给出了控制参数  $\sigma$  取值分别为  $-0.1$ 、 $-0.005$  和  $-0.002$  的情况下, 系统的线性响应  $Q$  随  $B$  的变化曲线. 随着控制参数  $\sigma$  的取值不断增大, 系统达到振动共振所需要的高频信号强度不断降低. 这是因为当  $\sigma = -0.01$  时, 神经元处于更深的静息状态, 其平均膜电位与放电阈值的差距较大, 因此激发动作电位所需要的高频刺激也就越强.

### 3 结论

本文对二维映射神经元模型同时施加高、低两种不同频率信号刺激, 以高频信号为调制信号, 研究其对系统动力学特性的影响. 仿真结果表明, 处于静息状态的神经元, 在加入弱低频信号后进入次阈值振荡状态, 通过调节高频信号的幅值可以使得系统对弱低频信号的线性响应达到最优, 产生振动共振现象, 从而帮助神经元探测和传导弱低频信号. 研究发现输入低频信号的幅值和频率越大, 系统的共振效果越显著; 而高频信号频率越大, 振动共振现象越难发生, 系统对高频信号的频率具有选择性. 另外, 模型参数对神经元的共振特性有重要影响, 控制参数越接近放电分岔点, 发生共振所需要的高频信号强度越小.

### 参 考 文 献

- Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F. Stochastic resonance. *Reviews of Modern Physics*, 1998, 70(1): 223 ~ 288
- Jung P, Mayer-Kress G. Spatiotemporal stochastic resonance in excitable media. *Physical Review Letters*, 1995, 74(11): 2130 ~ 2133
- Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance. *Journal of Physics A*, 1981, 14: L453 ~ L457
- 焦贤发, 王俊琦, 王如彬. 突触噪声作用下的 IF 阈值神经元模型的随机共振. *动力学与控制学报*, 2010, 8(3): 273 ~ 276 (Jiao J F, Wang J Q, Wang R B. Stochastic resonance of an integrate and fire neuron model with threshold driven by synaptic noise. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(3): 273 ~ 276 (in Chinese))
- 王宝华, 陆启韶, 吕淑娟. 阈下激励与噪声联合作用下肝细胞系统的内钙时空随机共振问题. *物理学报*, 2009, 58(11): 7458 ~ 7465 (Wang B H, Lu Q S, Lv S J. The spatio-temporal stochastic resonance of calcium in coupled hepatocytes systems affected by subthreshold stimuli and noise. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(11): 7458 ~ 7465 (in Chinese))
- Lee S G, Kim S. Parameter dependence of stochastic resonance in the stochastic Hodgkin-Huxley neuron. *Physical Review E*, 1999, 60(1): 826 ~ 830
- Perc M. Stochastic resonance on excitable small-world net-

- works via a pacemaker. *Physical Review E*, 2007, 76(6), 066203:1~7
- 8 Landa P S, McClintock P V E. Vibrational resonance. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2000, 33: L433~L438
- 9 Gitterman M. Bistable oscillator driven by two periodic fields. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2001, 34: L355~L357
- 10 Zaikin A A, Lopez L, Baltanas J P, Kurths J, Sanjuan M A F. Vibrational resonance in noise-induced structures. *Physical Review E*, 2002, 66(1), 011106:1~5
- 11 Chizhevsky V N, Giacomelli G. Improvement of signal-to-noise ratio in a bistable optical system: Comparison between vibrational and stochastic resonance. *Physical Review A*, 2005, 71(1), 011801:1~7
- 12 Chizhevsky V N, Giovanni G. Vibrational resonance and the detection of aperiodic binary signals. *Physical Review E*, 2008, 77(5): 051126
- 13 林敏, 黄咏梅. 双稳系统的振动共振及特性分析. 振动与冲击, 2007, 26(12): 151~153 (Lin M, Huang Y M. Analysis of vibrational resonance and characteristics in a bistable systems. *Journal of Vibration and Shock*, 2007, 26(12): 151~153 (in Chinese))
- 14 Ullner E, Zaikin A, García-Ojalvo J, Bascónes R, Kurths J. Vibrational resonance and vibrational propagation in excitable systems. *Physics Letters A*, 2003, 312(5-6): 348~354
- 15 Deng B, Wang J, Wei X. Effect of chemical synapse on vibrational resonance in coupled neurons. *Chaos*, 2009, 19(1): 013117
- 16 Deng B, Wang J, Wei X, Tsang K M, Chan W L. Vibrational resonance in neuron populations. *Chaos*, 2010, 20: 013113
- 17 Rulkov N F. Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map. *Physical Review E*, 2002, 65(4): 041922
- 18 Shilnikov A L, Rulkov N F. Subthreshold oscillations in a map-based neuron model. *Physics Letters A*, 2004, 328(2-3): 177~184
- 19 汪茂胜. 二维映射神经元模型中频率依赖的随机共振. 物理学报, 2009, 58(10): 6833~6837 (Wang M S. Frequency-dependent stochastic resonance in a two-dimensional neural map. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(10): 6833~6837 (in Chinese))

## VIBRATIONAL RESONANCE IN A TWO-DIMENSIONAL NEURAL MAP\*

Liu Qiuxiang<sup>1</sup> Yu Haitao<sup>2</sup> Wang Jiang<sup>2</sup>

(1. School of Computer Science and Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China)

(2. School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

**Abstract** The dynamics of a two-dimensional neural map subjected to two harmonic signals with different frequencies was investigated by numerical simulation. The linear response of neuron membrane potential to the low-frequency signal can achieve optimal by modulating the amplitude of high-frequency signal to an appropriate value, where the phenomenon of vibrational resonance occurs. It is shown that the high-frequency signal can help the weak low-frequency signal detection and information propagation. Furthermore, the influences of parameters of the map and input signals on the resonance dynamics were also studied.

**Key words** neuron, two-dimensional map, vibrational resonance, input signal