

# 具有时滞的耦合 Hindmarsh-Rose 神经元系统的放电模式\*

曹淑红<sup>1</sup> 段利霞<sup>1</sup> 唐旭晖<sup>1</sup> 赵勇<sup>2</sup>

(1. 北方工业大学理学院, 北京 100144) (2. 北京航空航天大学动力学与控制系, 北京 100191)

**摘要** 基于在时无滞的情况下, 非全同的 Hindmarsh-Rose 耦合神经元达到几乎完全同步的放电模式, 通过数值模拟的方法, 研究了时滞对耦合 Hindmarsh-Rose 神经元同步后放电模式的影响. 结果表明时滞使得神经元的放电模式发生改变, 同时时滞的增加能够诱导簇中的峰逐渐地减小或消失. 这一研究将有助于我们更深入地了解时滞对耦合神经元系统行为的影响.

**关键词** 时滞, 几乎完全同步, 放电模式

## 引言

耦合神经元系统的同步是非线性神经科学领域的一个重要问题, 国内外的许多学者关于耦合神经元同步做出了各种研究. Myongkeun 等人<sup>[1]</sup> 对非弱耦合的 I 类神经元抑制网络模型中锁相的消失进行了较为详细的研究; Dhamala 等人<sup>[2]</sup> 对电耦合的多尺度 HR 神经元做了研究, 指出神经元耦合系统的同步转迁由簇同步过渡到峰同步, 而且簇同步总是先于峰同步; Postnova<sup>[3]</sup> 研究了神经元关于强直性放电到簇放电的同步及非同步的转迁, 并且研究了各种同步现象, 例如: 反相同步、在相同步、混沌中的几乎在相同步等. 王亚龙等<sup>[4]</sup> 研究了网络噪声和振子数量对同步化的影响. 近年来, 时滞对神经元系统同步现象的影响引起了国内外许多学者的关注<sup>[5-8]</sup>. 在文献 [6] 中 Park 等人研究了时滞对神经振子的作用, 发现时滞能诱导丰富的非线性现象, 比如系统能被分成一些相锁定群体、同步和多稳定性, 结果表明时滞在于神经运动的时空结构的信息处理中起了重要的角色. Pierre 和 Amir<sup>[7]</sup> 关于时滞对简单神经网络的振荡和动力学的影响进行了研究. 王青云等人<sup>[8]</sup> 通过时滞耦合混沌 ML 神经元同步的研究, 发现了时滞不仅能促进耦合神经元的同步, 而且还能诱发耦合神经元丰富的放电模式. Zheng 等<sup>[9]</sup> 以 FitzHugh - Nagumo 模型为例研究了耦合强度和时滞在稳定状态分岔上的影响, 他发现了耦合强度能够诱导叉形分岔和

分岔临界值, 并且时滞耦合对这些分岔有重大的影响; Song 等<sup>[10]</sup> 还对 W - C 系统进行了分析, 深入研究了簇放电行为的产生机理及其复杂的簇放电现象. 目前, 关于时滞方面的研究, 主要集中在其对耦合神经系统同步行为的影响方面, 而关于时滞对耦合神经系统同步后放电模式的影响研究较少. 本文通过数值模拟的方法, 研究了时滞对两电突触耦合 Hindmarsh - Rose (HR) 神经元同步后放电模式的影响. 在第二部分, 我们给出了时无滞时, 电突触耦合 HR 神经元的放电模式. 第三部分我们研究了时滞对其放电模式的产生及模式转迁的影响. 最后一部分我们给出本文的结论.

## 1 时无滞时两耦合非全同 HR 神经元

具有外界直流电输入的单个 HR 神经元模型如下:

$$\begin{cases} x' = y - ax^3 + bx^3 - z + I \\ y' = c - dx^2 - y \\ z' = r[s(x - \chi) - z] \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x$  代表神经细胞的膜电位,  $y$  是与内电流相关的恢复变量,  $z$  表示与  $Ca^{2+}$  离子激活的  $K^+$  离子电流相关的慢变调节电流.  $a, b, c, d, r, s$  和  $\chi$  都是系统参数,  $I$  表示外界直流激励.

在单个 HR 神经元模型中,  $I$  作为控制参数. 其他参数都是常量, 其取值见文献 [11]. 随着外界输入电流的变化, HR 神经元表现出不同的放电模式, 其 ISI 序列图见文献 [11] 中的图 3. 13.

无时滞时两电耦合的 HR 神经元模型如下所示:

$$\begin{cases} x'_1 = y_1 - ax_1^3 + bx_1^3 - z_1 + I_1 + H(x_2 - x_1) \\ y'_1 = c - dx_1^2 - y_1 \\ z'_1 = r(s(x_1 - \chi) - z_1) \\ x'_2 = y_2 - ax_2^3 + bx_2^2 - z_2 + I_2 + H(x_1 - x_2) \\ y'_2 = c - dx_2^2 - y_2 \\ z'_2 = r(s(x_2 - \chi) - z_2) \end{cases} \quad (2)$$

其中  $H$  代表耦合强度,其他参数同文献[11].

记  $X_1 = (x_1, y_1, z_1), X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , 则同步差为  $e = X_2 - X_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ , 如果在某耦合情况下,随着时间的增加,  $\max \|e\|$  的极大值趋于零,那么耦合神经元就达到了完全同步[11]. 当外界输入电流分别为  $I_1 = 1.3, I_2 = 1.5$  时,  $\|e\|$  的极大值随着耦合强度  $H$  的变化如图 1(a) 所示.

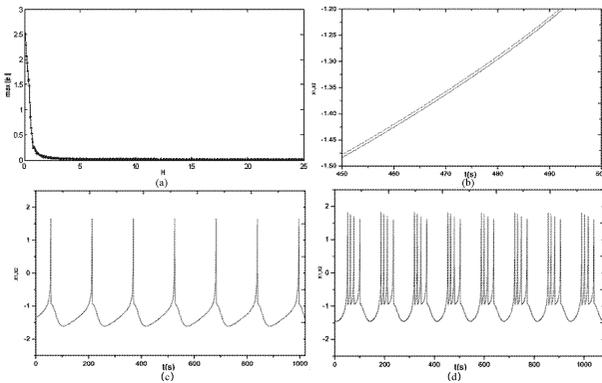


图 1 (a)  $\|e\|$  的极大值随着耦合强度  $H$  的变化图, (b) 是图(c)的局部放大图, (c)-(d) 为耦合强度  $H = 16$  时神经元  $x_1, x_2$  的放电模式, 其中, (c)  $I_1 = 1.3, I_2 = 1.5$ ; (d)  $I_1 = 2.5, I_2 = 3$

如图 1(a) 所示, 外界输入电流分别为  $I_1 = 1.3, I_2 = 1.5$ , 两非全同 HR 神经元在耦合强度  $H = 16$  时的膜电位差趋于零, 但是其放电模式的局部放大图 1(b) 显示出膜电位并没有完全重合, 从而表明耦合神经元系统 (2) 达到了几乎完全同步而不是完全同步, 其放电模式见图 1(c).

同理, 当外界输入电流  $I_1 = 2.5, I_2 = 3$  时, 该耦合神经元在耦合强度  $H = 16$  时也达到几乎完全同步, 而此时的放电模式为周期 4 的簇放电, 如图 1(d) 所示.

## 2 时滞对两耦合 HR 神经元电放电模式的影响

在这一部分, 我们研究随着时滞的变化, 时滞对两非全同的耦合 HR 神经元同步后的放电模式的影响. 具有时滞的两电耦合 HR 神经元系统, 如方程组 (3) 所示:

$$\begin{cases} x'_1 = y_1 - ax_1^3 + bx_1^2 - z_1 + I_1 + H(x_2(t - \tau) - x_1) \\ y'_1 = c - dx_1^2 - y_1 \\ z'_1 = r(s(x_1 - \chi) - z_1) \\ x'_2 = y_2 - ax_2^3 + bx_2^2 - z_2 + I_2 + H(x_1(t - \tau) - x_2) \\ y'_2 = c - dx_2^2 - y_2 \\ z'_2 = r(s(x_2 - \chi) - z_2) \end{cases} \quad (3)$$

其中  $\tau$  代表时间延迟即时滞, 是控制参数, 其它参数均为常量, 取值和第二部分相同.

$\tau \in (0, 0.3)$ , 通过数值模拟的方法, 当  $\tau$  在这一区间内变化时对耦合系统神经元的放电模式的同步差进行研究. 当参数与图 1(c) 中参数取值相同的情况下,  $\|e\|$  的极大值随着时滞增加的变化趋势如图 2(a) 所示. 图 2(b) 所示为  $\|e\|$  的极大值随时滞变化的趋势, 其参数与图 1(d) 中参数相同.

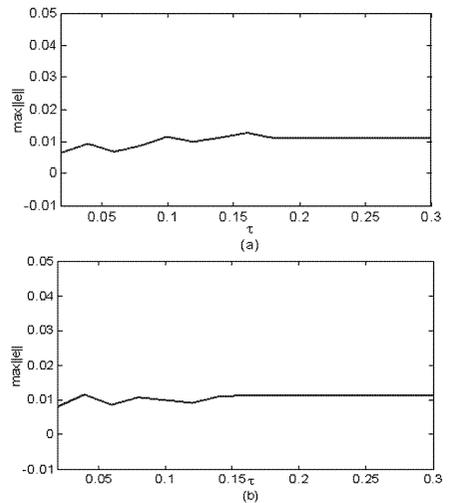


图 2 (a) 当  $I_1 = 1.3, I_2 = 1.5, H = 16$  时, 时滞  $\tau \in (0, 0.3)$  内变化时,  $\|e\|$  的极大值随时滞增加的变化规律. (b) 同(a), 参数取值为  $I_1 = 2.5, I_2 = 3, H = 16$

Fig.2 (a) Change of the maximum of  $\|e\|$  with the time-delay in  $\tau \in (0, 0.3)$  increasing, with  $I_1 = 1.3, I_2 = 1.5, H = 16$  (b) Similar as that of (a) except  $I_1 = 2.5, I_2 = 3, H = 16$

当时滞在区间  $(0, 0.3)$  内逐渐增加时,  $\|e\|$  的

极大值在很小的范围内浮动,由此说明时滞对耦合神经元同步的影响很小.为进一步分析时滞对耦合系统的影响,我们考察随着时滞的变化,耦合系统放电模式的变化,即时滞对耦合系统同步后放电模式的影响.

上一部分的结果表明,当  $I_1 = 1.3, I_2 = 1.5, H = 16$  时,无时滞的耦合 HR 神经元达到几乎完全同步并且达到周期 1 的簇放电模式.在此基础上考察时滞对耦合 HR 神经元同步后的放电模式的影响.

当时滞  $\tau = 0.01$ , 系统(3)中的耦合神经元迅速地由周期 1 的簇放电模式(见图 1(c))转变为周期 4 的簇放电模式(见图 3(a));随着时滞  $\tau$  由 0.01 渐渐增加到 0.3, 簇中的峰随着时滞的增加逐渐消失,如图 3(a)-3(d)所示.

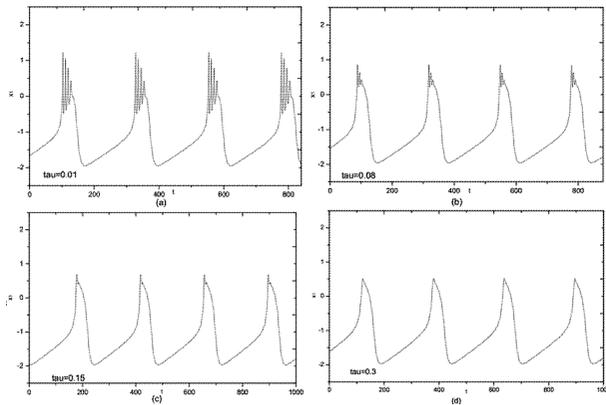


图3 时滞对耦合 HR 神经元同步后的放电模式的影响,其中时滞  $\tau$  是控制参数。(a)当  $\tau = 0.01$  时,耦合神经元系统的放电模式由周期 1 的簇放电迅速转变为周期 4 的簇放电,(b)  $\tau = 0.08$ , (c)  $\tau = 0.15$ , (d)  $\tau = 0.3$  随着  $\tau$  从 0.01 逐渐增加到 0.3, 簇中的峰渐渐消失

Fig. 3 The effect of time-delay on the firing patterns in two coupled HR neurons, here  $\tau$  is the control parameter. (a) the firing patterns of the coupled neuron system quickly change into period-4 bursting with the time-delay  $\tau = 0.01$ ; (b)  $\tau = 0.08$ , (c)  $\tau = 0.15$ , (d)  $\tau = 0.3$ . As  $\tau$  is increased from 0.01 to 0.3, the spikes within per bursting is gradually decreased,

当  $I_1 = 2.5, I_2 = 3$  时,无时滞的两耦合神经元在一定的耦合强度 ( $H = 16$ ) 下,达到了几乎完全同步并为周期 4 的簇放电(见图 1(d)),在此种情况下,我们研究时滞对该放电模式的影响.

随着时滞  $\tau$  在闭区间  $[0.01, 0.3]$  逐渐增加,具有时滞的两 HR 耦合神经元的放电模式如图 4(a)-(d)所示.当时滞  $\tau$  等于 0.01 时,系统(3)中两 HR 耦合神经元快速地产生周期为 8 的簇放电(图 4

(a)).时滞是从 0.01 增加到 0.3 时,簇中的峰随着时滞的增加逐渐的消失,其放电模式的变化见图 4(a)-4(d).

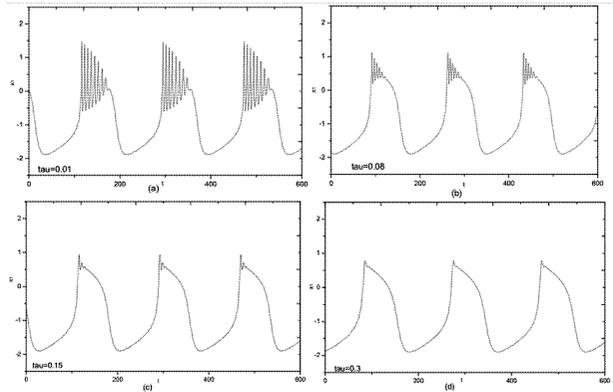


图4 (a) 当  $\tau = 0.01$  时,其放电模式为周期 8 的簇放电模式;(b)  $\tau = 0.08$ , (c)  $\tau = 0.15$ , (d)  $\tau = 0.3$ , 随着时滞  $\tau$  从 0.01 逐渐增加到 0.3, 簇中的峰也渐渐消失

Fig. 4 (a) the firing pattern is period-8 bursting with  $\tau = 0.01$ ; (b)  $\tau = 0.08$ , (c)  $\tau = 0.15$ , (d)  $\tau = 0.3$ , as  $\tau$  is increased from 0.01 to 0.3, the spiking within per bursting is gradually decreased

### 3 结论

具有电突触耦合的两个 HR 神经元,在耦合强度的影响下可以达到几乎完全同步的簇放电模式.在此基础上,我们研究了时滞对其放电模式的影响.研究表明随着时滞的增加,时滞对达到几乎完全同步的耦合神经元的同步影响很小,但对其放电模式的影响却比较明显,它能够诱导簇中的峰逐渐减少甚至消失.这一发现将有助于我们进一步了解时滞对耦合系统中的放电模式的重要影响.

### 参 考 文 献

- 1 Myongkeun O, Matveev V. Loss of phase-locking in non-weakly coupled inhibitory networks of type-I model neurons. *J Comput Neurosci*, 2009, 26(2): 303 ~ 320
- 2 Dhamala M, Viktor K J, Ding M Z. Transitions to synchrony in coupled bursting neurons. *Phys. Rev. Lett*, 2004, 92(2): 028101
- 3 Postnova S, Voigt K, Braun H A. Neural synchronization at tonic-to-bursting transitions. *J. Biological Physics*, 2007, 33(2): 129 ~ 143
- 4 王亚龙,李玉叶,古华光.网络噪声和振子数量对同步化行为的影响. *动力学与控制学报*, 2011, 9(3): 271 ~ 276 (Wang Y L, Li Y Y and Gu H G. The influences of noise

- and oscillator number on synchronization of the network. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(3): 271 ~ 276 (in Chinese)
- 5 郑艳红, 陆启韶. 时滞影响下的环式耦合混沌神经元同步. *动力学与控制学报*, 2008, 6(3): 208 ~ 212 (Zheng Y H, Lu Q S. Synchronization in ring coupled chaotic neurons with time delay. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(3): 208 ~ 212 (in Chinese))
- 6 Park S H, Kim S, Pyo H B and Lee S. Effect of time-delayed interactions on dynamic patterns in a coupled phase oscillator system. *Physical Review E*, 1999, 60(4): 4962 ~ 4965
- 7 Baldi P, Amir F A. How delays affect neural dynamics and learning. *IEEE Transactions on Neural Network*, 1994, 4(5): 612 ~ 621
- 8 Wang Q Y, Lu Q S. Time-delay enhances synchronization and regularization in two coupled chaotic ML neurons. *Chinese Physics Letters*, 2005, 22(3): 543 ~ 546
- 9 Zhen B, Xu J. Simple zero singularity analysis in coupled FitzHugh-Nagumo neural system with delay. *Neurocomputing*, 2010, 73: 874 ~ 882
- 10 Song Z G, Xu J. Bursting near Bautin bifurcation in neural network with delay coupling. *Inter. Journal of Neural System*, 2009, 19(5): 359 ~ 373
- 11 王青云, 石霞, 陆启韶. 神经元耦合系统的同步动力学. 北京: 科学出版社, 2008 (Wang Q Y, Shi X and Lu Q S. Synchronous dynamics of coupled neuronal system. Science Press, 2008 (in Chinese))

## FIRING PATTERNS IN COUPLED HINDMARSH-ROSE NEURAL SYSTEM WITH TIME-DELAY \*

Cao Shuhong<sup>1</sup> Duan Lixia<sup>1</sup> Tang Xuhui<sup>1</sup> Zhao Yong<sup>2</sup>

(1. College of Science, North China University of Technology, Beijing 100144, China)

(2. Department of Dynamics and Control, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract** Based on the firing patterns of the nonidentical coupled Hindmarsh-Rose neuronal system without time-delay, we numerically studied the effect of time-delay on the bursting patterns when the coupled Hindmarsh-Rose neurons obtained almost complete synchronization. The results show that the time-delay makes the firing pattern change, compared with the case without time-delay, and makes the spikes within per busting gradually decrease or almost disappear with the values of delay increasing. The results will help us better understand the important effect of time-delay on the behavior of the coupled neural systems.

**Key words** time-delay, almost complete synchronization, firing patterns