

# 谱元法在求解刚架结构动力学问题中的应用\*

吴志静<sup>1</sup> 李凤明<sup>1</sup> 胡恒山<sup>1</sup> 刘荣强<sup>2</sup>

(1. 哈尔滨工业大学航天学院 137 信箱, 哈尔滨 150001) (2. 哈尔滨工业大学机电工程学院, 哈尔滨 150001)

**摘要** 把谱元法应用于刚架结构的动力学响应计算和分析中. 建立了杆和梁的谱单元动力学刚度阵, 针对刚架结构组装了整体动力学刚度阵, 建立了整体结构的运动方程, 计算了结构的固有频率和时域响应, 并与采用有限元方法得到的结果进行了对比. 从结果中可以看出谱元法在数值模拟中的独特优势.

**关键词** 谱元法, 刚架结构, 固有频率, 时域响应

## 引言

有限元法作为解决工程结构动力学问题的一种常用方法, 得到了广泛普及和应用<sup>[1-3]</sup>. 但是经典的有限元法采用与频率无关的多项式来做插值函数, 这就不可避免地需要优化网格来提高计算精度. 尤其是在高频时, 会大大的增加计算量, 这个缺点可用谱元法来改进.

采用与频率有关的插值函数, 而不是简单的多项式, 这种频域内建模的方法称为谱元法 (SEM)<sup>[4,5]</sup>. 谱元法通常基于波动解来推导插值函数, 由于波动解在频域内精确地满足运动方程, 故谱元法会提供精确的频域解<sup>[6]</sup>. 如果结构在几何形状和材料性质上没有不连续或不规则的地方, 谱元法可以将整体结构处理为一个谱单元. 这就减少了结构的自由度, 从而减少计算时间. 在谱元法中, 通常用逆 FFT 求解结构的时域动力学响应<sup>[7]</sup>. 然而, 谱元法也有一些不足之处. 谱元法以运动方程的波动解为基础, 但对于复杂或多维问题并没有精确的波动解, 所以精确的谱单元模型至今多应用于可以求得波动解的规则结构 (如: 杆、梁、板、圆柱壳等). 另外因为谱元法是基于离散傅里叶变换技术上的频域分析方法, 它不能直接应用到时变系统和不支持叠加原理的非线性系统. 在谱元法中, 时域上的解是在频域解的基础上应用逆 FFT 算法得到的. 尽管谱元法能够得到精确的频域解, 但在实际计算中由混淆和溢出而引起的误差是不可避免的, 所以在求时域解时必须要注意逆 FFT 算法的精度

问题. 有很多学者已经用谱元法计算结构的动力学问题, 如铁木辛柯梁<sup>[8]</sup>、弯扭耦合梁<sup>[9]</sup>、拉扭耦合梁<sup>[10]</sup>、曲梁<sup>[11]</sup>、螺旋梁或杆<sup>[12]</sup>、层合梁<sup>[13]</sup>、附加主动约束层阻尼梁<sup>[14]</sup>、功能梯度梁<sup>[15]</sup>、锥形梁<sup>[16]</sup>、平板<sup>[17]</sup>、压电梁系统<sup>[18]</sup>、含裂纹杆<sup>[19]</sup>等. 刚架结构具有质量轻, 强度高特性, 广泛应用于空间可折展机构, 其中可折展天线较为典型. Lee 等人对此作了相关研究<sup>[20]</sup>, 他们采用谱元法计算了点阵梁的固有频率和等效材料参数, 但他们没有计算结构的受迫振动时间响应历程曲线.

本文采用谱元法建立了刚架结构的动力学刚度矩阵, 建立了整体结构的运动方程, 计算了结构的频响曲线和受迫振动时域响应, 并将谱元法计算结果与有限元法结果进行了对比分析.

## 1 结构运动方程

研究图 1 所示的刚架结构动力学响应问题. 该刚架结构包含 10 个子结构, 其两端为固定支撑, 每个子结构中含 4 个谱单元, 如图 2 所示. 谱单元发生变形时, 考虑它的纵向位移、横向位移和转角. 外激励作用于如图 1 所示结构的中点位置.  $v(t)$  表示 A 点时域响应.

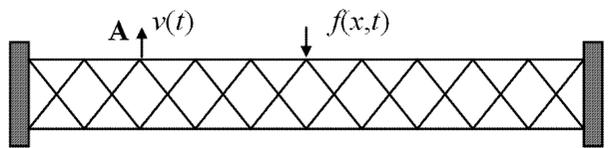


图 1 含 10 个子结构的刚架结构

Fig. 1 Frame structure with 10 repeating lattice cells

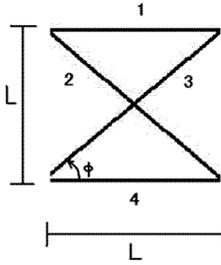


图2 子结构

Fig. 2 Single representative cell

### 1.1 杆单元

已知杆的运动方程为

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

其中  $u$  表示杆的纵向位移,  $\rho$ 、 $A$  和  $E$  分别代表杆的密度、横截面积和弹性模量.  $u$  可以写成谱表达式如下

$$u(x, t) = \sum_n \bar{U}_{Rn}(x, \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (2)$$

其中  $\omega_n$  为圆频率,  $\bar{U}_{Rn}(x, \omega_n)$  为纵向位移的谱分量. 将式(2)代入式(1), 得到

$$\bar{U}_{Rn}(x, \omega_n) = A_1 e^{-ik_n x} + A_4 e^{-ik_n(L-x)} \quad (3)$$

$$k_n = \omega_n \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (4)$$

为书写方便, 略去上式中的下标  $n$ :

$$\bar{U}_R(x, \omega) = A_1 e^{-ikx} + A_4 e^{-ik(L-x)} \quad (5)$$

把节点处的位移代入上式, 得到系数与节点位移之间的关系如下

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1 - e^{-i2kL})} \begin{bmatrix} 1 & -e^{-ikL} \\ -e^{-ikL} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_{R1} \\ \bar{U}_{R2} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式中  $\bar{U}_{R1}$  和  $\bar{U}_{R2}$  为杆单元的节点位移.

将式(6)代入式(5), 得到

$$\bar{U}_R(x, \omega) = N_{R1}(x, \omega) \bar{U}_{R1} + N_{R2}(x, \omega) \bar{U}_{R2} \quad (7)$$

其中  $N_{R1}(x, \omega) = \frac{\sin k(L-x)}{\sin kL}$  和  $N_{R2}(x, \omega) = \frac{\sin kx}{\sin kL}$

表示与频率有关的形函数.

将轴力  $F(x, t)$  写成谱表达式

$$F(x, t) = \sum_n \bar{F}_{Rn}(x, \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (8)$$

已知轴向力与位移的关系为

$$F(x, t) = EAu'(x, t) \quad (9)$$

由式(7)、(8)、(9)得到频域上节点力与节点位移

关系为

$$[S_R(\omega)] = \begin{Bmatrix} \bar{U}_{R1} \\ \bar{U}_{R2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

式中  $\bar{F}_1$  和  $\bar{F}_2$  为杆单元的节点力,  $[S_R(\omega)]$  即为杆单元的动力学单元刚度矩阵, 其表示为

$$[S_R(\omega)] = \frac{EA}{L} \frac{kL}{\sin kL} \begin{bmatrix} \cos kL & -1 \\ -1 & \cos kL \end{bmatrix} \quad (11)$$

从上式可见, 单元刚度矩阵是与频率有关的实矩阵.

### 1.2 梁单元

已知梁的运动方程为

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \quad (12)$$

将位移写成谱表达式

$$v(x, t) = \sum_n \bar{v}_n(x, \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (13)$$

将式(13)代入(12)中, 并略去下标  $n$  得到

$$\bar{v}(x, \omega) = A_2 e^{-ikx} + A_3 e^{-kx} + A_5 e^{-ik(L-x)} + A_6 e^{-k(L-x)} \quad (14)$$

其中  $k = \sqrt{\omega} \left( \frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4}$ , 第一项与第三项表示行波解,

第一项表示沿  $x$  正方向传播的波, 第三项表示沿  $x$  负方向传播的波; 第二项和第四项表示空间衰减振动. 利用与杆单元相同的推导过程, 可得梁单元节点位移和节点力之间的关系

$$[S_B(\omega)] = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

式中  $v_1$ 、 $v_2$ 、 $\theta_1$  和  $\theta_2$  为节点位移,  $V_1$ 、 $V_2$ 、 $M_1$  和  $M_2$  为节点力,  $[S_B(\omega)]$  为梁单元的力学刚度矩阵, 其表示为

$$[S_B(\omega)] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \alpha & \bar{\gamma}L & -\bar{\alpha} & \gamma L \\ & \beta L^2 & -\gamma L & \bar{\beta} L^2 \\ & & \alpha & -\bar{\gamma}L \\ \text{sym} & & & \beta L^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

其中:

$$\alpha = (CSh + SCh)(kL)^3 / \det,$$

$$\beta = (-CSh + SCh)(kL) / \det,$$

$$\gamma = (-C + Ch)(kL)^2 / \det$$

$$\bar{\alpha} = (S + Sh)(kL)^3 / \det,$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= (-S + Sh)(kL)/\det, \\ \bar{\gamma} &= (SSH)(kL)^2/\det, \\ \det &= 1 - CCh, C \equiv \cosh kL, \\ S &\equiv \sin kL, Ch \equiv \cosh kL, Sh \equiv \sinh kL. \end{aligned}$$

1.3 整体结构运动方程

将式(10)与式(15)加以整合,即得到局部坐标系下一个谱单元的节点力与节点位移关系:

$$[S_e(\omega)] = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{V}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

由此不难求得整体坐标系下一个谱单元的动力学刚度阵,并进一步得到整体结构的动力学刚度阵.采用与有限元法相同的整合方式,可以得到刚架结构如下形式的节点力与节点位移关系

$$[S]\{\bar{U}\} = \{\bar{P}\} \quad (18)$$

式(17)和(18)中 $[S_e(\omega)]$ 和 $[S]$ 分别为谱单元和整体结构的刚度阵.通过求解式(18),即可得到结构的动力学响应.

2 算例

对于如图 1 所示两端固定、含有 10 个子结构的刚架结构<sup>[20]</sup>,其参数为, $L = 1m, \Phi = \pi/4, A = 8 \times 10^{-3}m^2, I = 7 \times 10^{-6}m^4, E = 20.6 \times 10^{10}N/m^2, \rho = 7800kg/m^3$ .激励力为指数衰减函数 $f(t) = Fe^{-\alpha t}$ ,其中 $F = 1000kN, \alpha = 20$ ,作用在图中所示刚架结构中点位置.力 $f(t)$ 随时间变化曲线如图 3 所示.

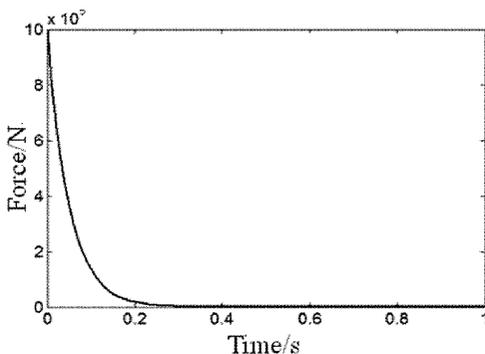


图 3 激励力随时间变化曲线

Fig. 3 The varying curve of the exciting force versus the time

求解式(18),得到刚架结构的频响曲线如图 4

所示.图中极大值点对应的横坐标即为结构的固有频率,列在表 1 中.为了与有限元法作比较,还采用有限元法计算了图 1 刚架结构各阶固有频率,也列在表 1 中.将谱元法与有限元法的结果对比后发现,在有限元法中单元数越多,结果越接近谱元法计算的结果,说明谱元法计算的固有频率是准确的.表 1 中本文的计算结果与文献[20]的结果一致,证明本程序 and 算法是正确的.

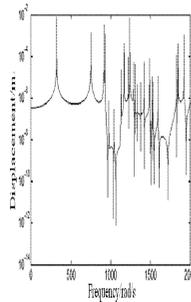


图 4 刚架结构 A 点的频响曲线

Fig. 4 The frequency response curve of the frame structure at point A

表 1 有限元法与谱元法计算的固有频率比较

Table 1 Comparison of the natural frequencies computed by the FEM and SEM

modes	FEM		SEM	
	40	80	160	40
1	322.70	321.20	321.10	321.09
2	775.66	754.21	752.85	752.74
3	963.37	919.75	916.75	916.51
4	991.95	932.23	928.86	928.59
5	1145.5	983.49	978.25	977.87
6	1247.9	1047.3	1041.0	1040.5
7	1313.8	1140.4	1132.2	1131.6

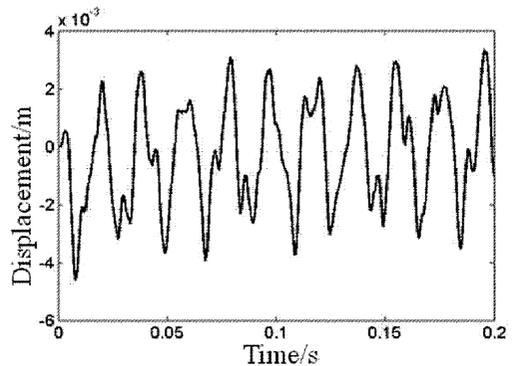


图 5 刚架结构 A 点的时域响应

Fig. 5 Time domain response curve of the space frame structure at point A

进一步将图 4 的频响曲线进行逆 FFT 变换,可

得到结构上 A 点的时域响应,计算结果如图 5 所示.可见,采用谱元法不但可以准确计算结构的固有频率,也可以方便地计算出结构的时域响应.

### 3 结论

本文采用谱元法研究了刚架结构的动力学问题,建立了杆和梁单元的动力学刚度矩阵,并组装了整体结构刚度矩阵.针对具体算例,计算了结构的固有频率和时域响应.将谱元法的计算结果与有限元结果进行了对比,可以看出谱元法的优越性.谱元法得到的结果准确性很高,尤其是在高频的情况下,计算精度明显高于以模态叠加为基础的有限元法.

### 参 考 文 献

- 1 周星德,刘志军.用有限元法计算特征值问题的一种新的动态凝聚方法.动力学与控制学报,2006,4(2):151~155(Zhou X D, Liu Z J. A new dynamic condensation method using finite element approach to calculate eigenvalue problem. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(2): 151~155(in Chinese))
- 2 但敏,卿光辉.脱层板固有频率的有限元方法分析.动力学与控制学报,2011,9(1):7~11(Dan M, Qing G H. Natural frequencies analysis of delamination planes with finite element method. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(1): 7~11(in Chinese))
- 3 林文静,陈树辉.平面薄膜自由振动的有限元分析.动力学与控制学报,2010,8(3):202~206(Lin W J, Chen S H. Free vibration analysis of plane membranes by finite element method. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(3): 202~206(in Chinese))
- 4 Doyle J F. Wave propagation in structures: spectral analysis using fast discrete Fourier transforms. Springer, New York, 1997
- 5 Lee U. Spectral element method in structural dynamics. Inha University Press, Inha University, Incheon, Korea, 2004
- 6 Banerjee J R. Dynamic stiffness formulation for structural elements: a general approach. *Computers & Structures*, 1997, 63(1): 101~103
- 7 Newland D E. Random vibrations, spectral and wavelet analysis. Longman, New York, 1993
- 8 Howson W P, Williams F W. Natural frequencies of frames with axially loaded Timoshenko members. *Journal of Sound and Vibration*, 1973, 26(4): 503~515
- 9 Friberg P O. Coupled vibration of beams-an exact dynamic element stiffness matrix. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1983, 19(4): 479~493
- 10 Banerjee J R, Williams F W. An exact dynamic stiffness matrix for coupled extensional-torsional vibration of structural members. *Computers & Structures*, 1994, 50(2): 161~166
- 11 Issa M S. Natural frequencies of continuous curved beams on Winkler-type foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, 127(2): 291~310
- 12 Leung A Y T. Exact stiffness matrix for twisted helix beam. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1991, 9(1): 23~32
- 13 Eisenberger M, Abramovich H, Shulepov O. Dynamic stiffness analysis of laminated beams using a first order shear deformation theory. *Computers & Structures*, 1995, 31(4): 265~271
- 14 Lee U, Kim J. Spectral element modeling for the beams treated with active constraining layer damping. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(32-33): 5679~5702
- 15 Chakraborty A, Gopalakrishnan S. A spectrally formulated finite element for wave propagation analysis in functionally graded beams. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40(10): 2421~2448
- 16 Banerjee J R, Williams F W. Exact Bernoulli-Euler dynamic stiffness matrix for a range of tapered beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 21(12): 2289~2302
- 17 Žak A. A novel formulation of a spectral plate element for wave propagation in isotropic structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2009, 45(10): 650~658
- 18 Park H W, Kim E J, Lim K L, Sohn H. Spectral element formulation for dynamic analysis of a coupled piezoelectric wafer and beam system. *Computers and Structures*, 2010, 88(9-10): 567~580
- 19 Fabro A T, Ritto T G, Sampaio R, Arruda J R F. Stochastic analysis of a cracked rod modeled via the spectral element method. *Mechanics Research Communications*, 2010, 37(3): 326~331
- 20 Lee U. Equivalent continuum representation of lattice beams: spectral element approach. *Engineering Structures*, 1998, 20(7): 587~592

## APPLICATION OF SPECTRAL ELEMENT METHOD IN SOLVING DYNAMIC PROBLEMS OF FRAME STRUCTURES \*

Wu Zhijing<sup>1</sup> Li Fengming<sup>1</sup> Hu Hengshan<sup>1</sup> Liu Rongqiang<sup>2</sup>

(1. P. O. Box 137, School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China )

(2. School of Mechanical and Electrical Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China )

**Abstract** The spectral element method was applied to analyze and calculate the dynamic response of frame structures. The dynamic stiffness matrices of the bar and beam elements were derived, and the dynamic stiffness matrix for the overall frame structure was assembled. The equations of motion of the overall structure were presented. The natural frequencies and time domain responses were calculated. The present method was compared with the finite element method. The results show that the spectral element method has its unique advantages in terms of numerical simulation.

**Key words** spectral element method, frame structure, natural frequency, time domain response