第 10 卷第 1 期 2012 年 3 月
1672-6553/2012/10(1)/058-4

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 10 No. 1
Mar. 2012

移动质量 – 梁振动的时空有限元法数值分析*

王金福　杨国来　葛建立
（南京理工大学机械工程学院，南京　210094）

摘要　为了获得移动质量沿梁匀速运动的系统动态响应，建立了时空有限元数值求解模型. 考虑移动质量惯性项，得到移动质量 – 梁时变系统的动力学方程. 应用时空有限元法. 得到了移动集中质量作用下 Bernoulli – Euler 梁离散单元的质量矩阵、刚度矩阵. 与 Newmark – β 法、Wilson – θ 法计算结果进行比较，时空有限元法计算梁的动态响应的精度更高.

关键词　移动质量，　梁，　时空有限元法，　数值分析

引言

梁在移动质量作用下的动态响应问题一直是学者们研究的重点，如列车桥梁问题、火车道上的导电弓架问题、火炮后坐等问题，对于移动载荷问题，人们做了大量的工作. 移动力模型比较简单，可以得到解析解，Fryba[1] 研究了载荷速度、阻尼对 Bernoulli – Euler 动力响应的影响，但当考虑移动载荷质量时，系统的运动方程为相互耦合的时变微分方程组，只能用数值方法进行求解. Wu[2] 通过有限元法对建立的移动质量模型进行求解，考虑了倾斜梁单元，与梁的动态响应相比，证明了柯氏力的影响很小. 彭献等[3] 通过振型叠加法进行了求解. 振兴叠加法虽然可以得到耦合系统的数值解，但是精度差，计算量大. Bajer CI[4,5] 对时空域使用了三角形和四面体时空有限单元，从而使原先时空变量同时求解要求较大存储的问题转化为时间上的递推计算格式，这一方法在带可移动载荷的结构振动问题和波动问题中比较有效.

本文从系统的角度出发，根据移动质量沿梁运动的系统动力学方程，利用虚速度，推导出了 Bernoulli – Euler 梁单元的时变质量矩阵和时变刚度矩阵，很据时空有限元法，推导出求解位移、速度的时间域上的递推格式.

1　移动质量沿悬臂梁匀速运动的系统动力学方程

如图 1 所示，移动质量 m 以恒定的速度 ν_m 沿梁运动，考虑移动惯性载荷作用下的系统运动方程为：

$$EI\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=f(x,t) \tag{1}$$

其中

$$f(x,t)=\delta(x-\nu_m t)\times [m_m g-m_m\frac{d^2 u(\boldsymbol{v}_m t,t)}{dt^2}]$$

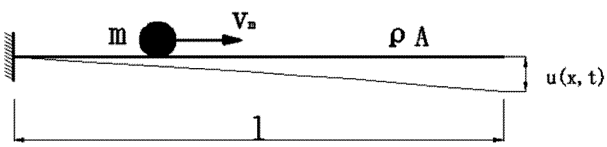

图 1　移动质量作用下的悬臂梁

Fig. 1　Cantilever beam under a moving mass

边界和初始条件为：

$$u(0,t)=0,\quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0,$$

$$u(x,0)=0,\quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

其中：EI 表示梁的弯曲刚度，ρA 表示梁的单位长度质量，$u(x,t)$ 表示梁上坐标 x 处在 t 刻的横向位移，向下为正.

如果不考虑惯性载荷项，即将移动质量简化为一移动力，则上面的方程很容易求得解析解和数值解. 在对移动惯性载荷作用问题进行数值分析时，应用时空有限元法进行求解.

2010-05-19 收到第 1 稿，2011-06-28 收到修改稿.
*国家重点基础研究发展计划 973 项目(613116)

2　移动质量作用下梁的时空有限元法建模

2.1　Bernoulli – Euler 梁的离散

考虑时空域 $\Omega=\{(x,t):0\leqslant x\leqslant b,0\leqslant t\leqslant h\}$，方程(1)左边乘以虚速度 $v^*(x,t)$ 并积分，得到虚功为[6]：

$$\int_0^h\int_0^b \boldsymbol{v}^*(x,t)\left(\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0 \tag{2}$$

仅考虑 x，对(2)进行积分，其中 $\boldsymbol{v}=\partial u/\partial t$ 得：

$$\rho A\iint_\Omega \boldsymbol{v}^*\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\mathrm{d}\Omega+EI\iint_\Omega \boldsymbol{v}^*\frac{\partial^2\boldsymbol{v}^*}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}\Omega=0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v}(x,t)=\sum_{i=1}^{8}N_i(x,t)\boldsymbol{v}_i \tag{4}$$

在时空域中，形函数为：

$$\begin{aligned}N=[&(1-3\frac{x^2}{b^2}+2\frac{x^3}{b^3})\frac{(h-t)}{h},\\&(\frac{x}{b}-2\frac{x^2}{b^2}+\frac{x^3}{b^3})b\frac{(h-t)}{h},(3\frac{x^2}{b^2}-2\frac{x^3}{b^3})\frac{(h-t)}{h},\\&(-\frac{x^2}{b^2}+\frac{x^3}{b^3})b\frac{(h-t)}{h},(1-3\frac{x^2}{b^2}+2\frac{x^3}{b^3})\frac{t}{h},\\&(\frac{x}{b}-2\frac{x^2}{b^2}+\frac{x^3}{b^3})b\frac{t}{h},(3\frac{x^2}{b^2}-2\frac{x^3}{b^3})\frac{t}{h},\\&(-\frac{x^2}{b^2}+\frac{x^3}{b^3})b\frac{t}{h}]=[N_1\frac{(h-t)}{h},N_2\frac{(h-t)}{h},\\&N_3\frac{(h-t)}{h},N_4\frac{(h-t)}{h},N_5\frac{t}{h},N_6\frac{t}{h},\\&N_7\frac{(h-t)}{h},N_8\frac{t}{h},]\end{aligned} \tag{5}$$

对(4)在时间上积分得到

$$\begin{aligned}u(x,t)&=u(x,0)+\int_0^t(N_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+N_8\boldsymbol{v}_8)\mathrm{d}t=\\&u(x,0)+\int_0^t N^*v\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6}$$

$N^*=[N_1\cdots N_8]$，$v=[\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_8]^T$；

构造的虚函数为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}^*(x,t)=&(1-3\frac{x^2}{b^2}+2\frac{x^3}{b^3})\boldsymbol{v}_3+(\frac{x}{b}-2\frac{x^2}{b^2}+\\&\frac{x^3}{b^3})b\varphi_3+(3\frac{x^2}{b^2}-2\frac{x^3}{b^3})\boldsymbol{v}_4+(-\frac{x^2}{b^2}+\frac{x^3}{b^3})b\varphi_4\end{aligned} \tag{7}$$

则方程(3)可以写成如下的矩阵形式：

$$\begin{aligned}\{&\frac{\rho A}{h}\int_0^b[N^{**}]^T[-N_1\cdots N_8]\mathrm{d}x+\\&EIh\int_0^b[N^{**''}]^T[\alpha(1-\\&\alpha/2)N_1''\cdots(\alpha^2/2)N_8'']\mathrm{d}x|_{t=\alpha h/2}\}\{\boldsymbol{v}\}^T=0\end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$N^{**}=[N_1\quad N_2\quad N_3\quad N_4],\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_8]$$

可得到 Bernoulli – Euler 梁单元的的质量矩阵、刚度矩阵如下：

$$M=\frac{1}{h}[-M_s|M_s],$$

$$K=h[\alpha(1-\frac{\alpha}{2})K_s\left|\frac{\alpha^2}{2}K_s\right.]$$

其中

$$M_s=\frac{mb}{420}\begin{bmatrix}156&22b&54&-13b\\22b&4b^2&13b&-3b^2\\54&13b&156&-22b\\-13b&-3b^2&-22b&4b^2\end{bmatrix} \tag{9}$$

$$K_s=\frac{EI}{b^3}\begin{bmatrix}12&6b&-12&6b\\6b&4b^2&-6b&2b^2\\-12&-6b&12&-6b\\6b&2b^2&-6b&4b^2\end{bmatrix} \tag{10}$$

M,K 分别为时空质量矩阵和刚度矩阵. 可以看到它们由两个方阵组成，每个方阵的维数与时空单元自由度的个数相等. 矩阵 M_s,K_s 与传统有限元法得到的质量矩阵，刚度矩阵具有相同的形式. 在一个时空单元域 Ω 的边缘建立力的平衡，向量 v 中包含节点初始时刻 ti 的速度和末时刻 t_{i+1} 的速度.

$$(M+K)\begin{Bmatrix}v_i\\v_{i+1}\end{Bmatrix}+e_i=F_i,(K_L^*|K_R^*)\begin{Bmatrix}v_i\\v_{i+1}\end{Bmatrix}+e_i=F_i \tag{11}$$

其中

$$K^*=M+K\quad e=Ku_i$$

e_i 为初始时刻的节点力，上式递推格式中只有末速度 v_{i+1} 是未知量，可以求得每一时刻的速度值. 根据下式可以求得每个时间步上的位移值.

$$u_{i+1}=u_i+h[\beta v_i+(1-\beta)v_{i+1}],\beta=1-\alpha$$

2.2　移动质量作用下 Bernoulli – Euler 梁的离散

在时空有限元法中，移动质量的横向加速度可以表示成如下的形式[6]：

$$\frac{d^2u(\boldsymbol{v}_mt,t)}{dt^2}=\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}(x,t)}{\partial t}\right|_{x=v_mt}+\boldsymbol{v}_m\left.\frac{\partial\boldsymbol{v}(x,t)}{\partial x}\right|_{x=v_mt} \tag{12}$$

考虑方程(1)右边的惯性项，乘以虚速度，在时空域中积分得：

$$\int_0^h\int_0^b N^*m\delta(x-\boldsymbol{v}_mt)\frac{\partial^2u(\boldsymbol{v}_mt,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{13}$$

移动质量在梁上的位置是变化的，所以总体质

量矩阵、刚度矩阵必须在每个时间步上建立. 由式(13)得带有移动质量的梁单元质量矩阵和刚度矩阵分别为:

$$M_m=\frac{m}{h}[N^{**}]^T[N_1\cdots N_8]|_{x=v_mt},$$

$$K_m=mhv_m^2[N^{**}]^T[\alpha(1-\alpha/2)N_1''\cdots(\alpha^2/2)N_8'']|_{x=v_mt}$$

$$M_m=\frac{m}{h}[-M_{ms}|M_{ms}]_{x=v_mt},$$

$$K_m=mhv_m^2[\alpha(1-\alpha/2)K_{ms}|(\alpha^2/2)K_{ms}]|_{x=v_mt}$$

其中:

$$M_{ms}=\begin{bmatrix} N_1N_1 & N_1N_2 & N_1N_3 & N_1N_4 \\ N_2N_1 & N_2N_2 & N_2N_3 & N_2N_4 \\ N_3N_1 & N_3N_2 & N_3N_3 & N_3N_4 \\ N_4N_1 & N_4N_2 & N_4N_3 & N_4N_4 \end{bmatrix}_{x=v_mt} \tag{14}$$

$$K_{ms}=\begin{bmatrix} N_1N_1'' & N_1N_2'' & N_1N_3'' & N_1N_4'' \\ N_2N_1'' & N_2N_2'' & N_2N_3'' & N_2N_4'' \\ N_3N_1'' & N_3N_2'' & N_3N_3'' & N_3N_4'' \\ N_4N_1'' & N_4N_2'' & N_4N_3'' & N_4N_4'' \end{bmatrix}_{x=v_mt} \tag{15}$$

最终的时空有限元方程为:

$$[K_L^*+K_{Lm}^*]\{\dot{u}_i\}+[K_R^*+K_{Rm}^*]\{\dot{u}_{i+1}\}=\{F\} \tag{16}$$

3 时空有限元法求解步骤

由式(11),得时空有限元法求解步骤:

1、形成质量矩阵 M,刚度矩阵 K;

2、计算力向量:

$$F=f_n-s_n-[K(1-\alpha/2)\alpha h-(1/h)M]v_n; \tag{17}$$

3、求解方程

$$[K(\alpha^2/2)h+(1/h)M]v_{n+1}=F; \tag{18}$$

4、求位移

$$u_{n+1}=u_n+h[\alpha v_n+(1-\alpha)v_{n+1}]; \tag{19}$$

5、节点力

$$s_n=Ku_n; \tag{20}$$

4 梁的时空有限元数值结果

算例1:有一长度 $L=2$m,弹性模量 $E=2.09e11$Pa,惯性矩 $I=1.65\text{e}-6\text{m}^4$,线密度 $m=35.49$kg/m 的悬臂梁,梁上有一移动质量 $m_m=17.8$kg 的作用.

当移动质量速度 $v_m=10$m/s 时,悬臂梁自由端的位移和速度响应如图2和图3所示. 移动质量移动到0.14s时悬臂梁自由端的位移和速度度响应的几种算法比较如表1.

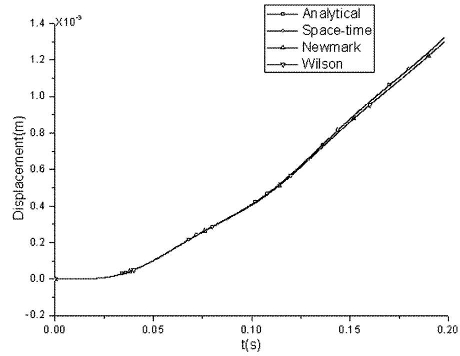

图2 悬臂梁自由端位移响应

Fig. 2 Displacement of the free end of cantilever beam

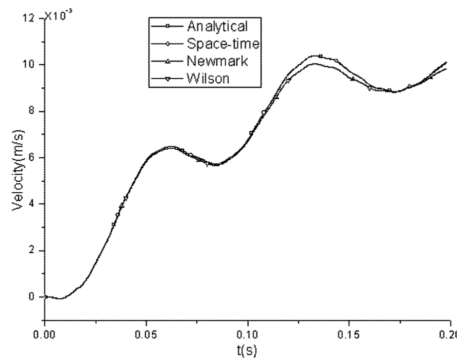

图3 悬臂梁自由端速度响应

Fig. 3 Velocity of the free end of cantilever beam

表1 几种算法所得值与解析解比较

Table 1 The comparison of response between several algorithm and exact solution

Algonithm	Displacement(m)	Velocity(m/s)	relative error
Analytical	7.7576E-4	0.0103E-6	-
Space-time	7.7489E-4	0.0103E-6	0
Newmark-β	7.6252E-4	0.0099E-6	3.89%
Wilson-θ	7.6212E-4	0.0068E-6	33.98%

算例2:使用与算例1相同的悬臂梁系统,改变移动质量的运动状态,假设移动质量以初速度为零进行匀加速运动,加速度值 $a_m=1$m/s 时,当移动质量移动到1s时悬臂梁自由端的位移和速度度响应的几种算法比较如表2

表2 几种算法所得值与解析解比较

Table 2 The comparison of response between several algorithm and exact solution

Algonithm	Displacement(m)	Velocity(m/s)	relative error
Analytical	1.1725E-4	4.4776E-4	-
Space-time	1.1719E-4	4.4708E-4	1.50%
Newmark-β	1.1674E-4	4.4618E-4	3.53%
Wilson-θ	1.1657E-4	4.4571E-4	4.48%

从悬臂梁梁的位移和速度响应结果中看到,时空有限元法解精度明显高于 Newmark - β 法和 Wilson - θ 法,精度的优势从速度值可以明显的看出. 从而可以看出时空有限元法在解决移动载荷作用下梁的振动问题的高精度性.

5　结论

移动质量与梁的耦合振动方程为时变系数的微分方程,为了分析移动质量作用下梁的动态响应,建立了移动质量作用下梁的时空有限元模型. 本文利用时空有限元法,推导出时空域中求解结构动态响应的算法格式,通过几种算法对移动质量作用下悬臂梁自由端动态响应值进行了比较,可以看出本文的时空有限元法的计算精度比 Newmark-β 法和 Wilson-θ 法高,不失为一种高精度的数值计算方法,而传统的数值算法解的精度稍差.

参　考　文　献

1　Fryba L. Vibration of solids and structures under moving loads(3rd Edition). London: Thomas Telford,1999

2　Jia J W. Dynamic analysis of an inclined beam due to moving loads. *Sound and vibration*, 2005, 288:107 ~ 131

3　彭献,游福贺. 车桥耦合系统固有频率的研究. 动力学与控制学报,2010,8(3):258 ~ 262(Peng X, You F H. Research on natural frequency of vehicle-bridge coupled system. *Journal of Dynamics and Contral*, 2010,8(3):258 ~ 262 (in Chinese))

4　Bajer C I. Triangular and tetrahedral space-time finite elements in vibration analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* ,1986,23:2031 ~ 2048

5　Bajer C I. Space-time finite element formulation for the dynamical evolutionary process. *Applied Mathematics and Computer Science*, 1993,3(2):251 ~ 268

6　Bajer C I, Dyniewicz B. Space-time approach to numerical analysis of a string with a moving mass. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008,76(10): 1528 ~ 1543

NUMERICAL ANALYSIS OF MOVING MASS-BEAM VIBRATION WITH SPACE TIME FINITE ELEMENT METHOD *

Wang Jinfu　Yang Guolai　Ge Jianli

(*School of Mechanical Engineering*, *NUST*, *Nanjing*　210094, *China*)

Abstract　In order to obtain the dynamic response of a beam subjected to a moving mass, Its numerical model of space-time finite element method was established. Considering the inertial terms of a travelling mass, the time-varies different equation of beam under a mass was presented by using. the space-time finite element method. The characteristic matrices of the discrete element of the Bernoulli-Euler beam carrying concentrated mass like space-time inertia and stiffness matrices. Numerical examples by comparing with the results the dynamic response of the beam under the moving mass and the Classical time integration schemes like Newmark-β and Wilson-θ prove the simplicity and efficiency of the method.

Key words　moving mass,　beam,　space-time finite element method,　numerical analysis

Received 19 May 2011, revised 28 June 2011.

* The project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (613116)