

基于非线性单元模型的绳系卫星系统动力学

刘壮壮¹ 宝音贺西²

(1. 清华大学航天航空学院, 北京 100084) (2. 清华大学航天航空学院, 北京 100084)

摘要 建立连续绳系卫星系统的离散的可变自由度有限维动力学模型, 描述其长时间空间大范围运动. 绳系卫星系统为复杂的非线性动力学系统. 考虑了系绳的黏弹性、分布质量和空间位形, 使得建立的改进珠式模型能够细致地描述系绳的纵横向振动. 根据绳索只能受拉而不能抗压的特性引入了系绳单元的松弛模型, 准确反映系绳真实受力情况. 研究了系统自由度改变的实现方法, 通过数值积分计算得到了绳系卫星系统释放、收拢和保持阶段的长时间历程的动力学响应, 计算结果是收敛的. 仿真结果印证了稳定平衡位置在绳系系统动力学中的重要特性.

关键词 绳系卫星系统, 可变自由度, 有限维, 松弛单元模型, 动力学

引言

空间绳系系统^[1]最为常见的形式为两颗卫星通过一根牢固细长的绳索连接并且一起在轨道上运动. 主星包含绳系卫星系统的控制装置和动力装置, 通过主星中系绳的伸卷机构可以把子星放出、保持或回收. 由于绳系卫星成本低廉而且可以重复利用, 能够用于人工重力、深空探测和航天器交会捕获等领域, 有着广阔的应用前景^[2-4].

绳系卫星的动力学问题吸引了许多学者的注意^[5]. 绳系卫星系统为复杂的非线性动力学系统, 根据研究目的的不同, 可以建立简化的动力学模型来研究其动力学行为. 早期不考虑系绳质量和形状的“哑铃”模型^[6]不能准确的反应柔性系绳的运动情况. 近些年有些学者考虑了多种影响因素, 建立起更加复杂的动力学模型^[7]. Mankala 和 Agrawal^[8]为解决空间系绳运动中的振动问题给出了一种考虑系绳位形和分布质量的连续体动力学模型, 研究了短距离绳系卫星系统在常重力下的动力学行为. Steiner 等^[9]在研究绳系卫星的大幅摆动时, 将系绳考虑为一根弹性柔绳, 分别采用 Galerkin 法和有限单元法对系绳进行离散, 并数值模拟了系统动力学行为. Wiedermann 等^[10]描述了应用有限单元法对绳系卫星释放与回收过程进行数值模拟的具体方法. 李强^[11]在对绳系卫星系统进行动力学

研究时, 将系绳简化为由足够多质点和无质弹簧相连接的珠式模型, 得到了空间绳系系统的规律性认识. 余本嵩等^[12]建立了两体绳系卫星系统的时变动力学模型, 单元数目为几十个, 实现了绳系卫星系统释放动力学行为的数值模拟.

用线性模型来替代实际的非线性系统, 以求方便地获得其动力学行为的某种逼近. 然而, 被忽略的非线性因素常常会在分析和计算中引起无法接受的误差, 使得线性逼近徒劳无功. 特别对于系统的长时间历程动力学问题, 有时即使略去很微弱的非线性因素, 也会在分析和计算中出现本质性的错误.

上述文献中系绳单元的基本变形均考虑为满足胡克定律的线弹性变形, 与系绳运动过程中的真实受力情况有很大差距. 本文针对无限维长距离绳系卫星系统的释放、保持和收拢过程, 建立可变自由度离散的改进珠式动力学模型, 根据该非线性动力学系统中绳索单元只能受拉而不能抗压的特性, 建立符合非线性本构关系的绳索单元松弛模型, 能够准确反映系绳真实受力情况, 得到了空间绳系系统大范围空间运动长时间历程的动力学响应.

1 系统离散动力学模型

1.1 系统描述

考虑图 1 绳系卫星系统所示的绳系卫星系统.

主星为 M , 子星为 S , 质量分别为 m_M 和 m_s . 系绳缠绕于主星内的卷轴上, 可通过控制机构实现系绳的释放与收拢. 系绳刚度为 EA , 线密度为 ρ_l , 长度为 L , 为可延展的黏弹性均匀系绳. 设主星运行的轨道平面与赤道平面夹角为 δ , 地球为均质圆球体, 建立固结于地球质心 O , X 轴指向升交点、 Z 轴垂直于轨道平面的右手惯性坐标系 $O-XYZ$ 和固结于主星质心 o , x 轴指向主星运动反方向、 z 轴平行于 Z 轴的右手轨道坐标系 $o-xyz$.

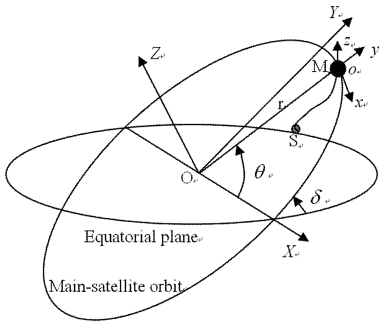


图1 绳系卫星系统

Fig. 1 Tethered satellite system

本文重点研究系绳和子星相对于主星运动的动力学行为, 故为了降低系统复杂度做出如下假设:

- 1) 系统运行于圆形开普勒轨道, 忽略摄动干扰.
- 2) 主星质量远大于系绳和从星质量, 因此, 系绳的运动对主星的运动的影响可以忽略, 即主星的轨道参数不因系绳和从星运动而发生变化.
- 3) 展开后系绳长度在 10 公里级, 可忽略子星外形尺寸, 将其视为质点.
- 4) 不考虑大气阻力和太阳光压的作用.
- 5) 系绳被认为是均匀的, 不考虑扭转和弯曲刚度.

1.2 系统动力学模型

将系绳均匀地分为 N 个单元, 并设绳单元的质量 $m_e = \rho l_e$ 集中于单元中心, 其中 $l_e = L/N$ 表示绳单元的长度 (L 为系绳总长度). 设当前珠点总数为 $n+1$, 对于第 n 个珠点, 假设它不是直接通过无质量弹簧和阻尼器与主星相连的, 而是在第 n 个珠点与主星之间插入一个锚点, 在本文中对锚点的定义是为了模拟系绳的收放和施加控制力, 在系绳上设定的一个锚点, 锚点绳段的长度设为 l_a , 绳段的质量集中到锚点上. 记子星结点为 1, 沿子星至主

星方向将系绳上的集中质量点依次记为珠点 B_1, B_2, \dots, B_n 和 B_a . 建模时将系绳所受外力集中施加在珠点上, 根据系绳线密度通过集中质量法确定节点质量, 并将子星质量叠加到第一个珠点上 ($m_1 = m_s + \frac{1}{2}\rho l_e$). 只要绳单元数足够多, 就可获得足够精确的真实的绳系系统动力学模型, 如图 2 所示.

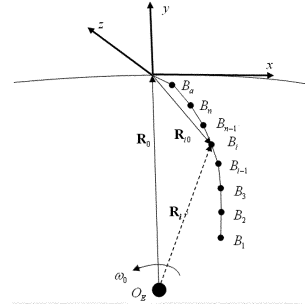


图2 系统离散质点模型

Fig. 2 Discrete bead point model of the system

仅考虑地球引力及系绳张力和卫星作用力, 根据牛顿第二定律, 可得珠点 B_i 的矢量动力学方程为

$$m_i \ddot{R}_i = m_i (\ddot{R}_0 + \ddot{R}_{i0}) = T_i + T'_i - \frac{\mu m_i}{\|R_i\|^3} R_i \quad (1)$$

其中, T_i 和 T'_i 分别为珠点 B_{i+1} 和 B_{i-1} 对节点 B_i 的拉力. 将重力项展开取一阶近似, 方程亦可化为

$$\ddot{R}_0 + \ddot{R}_{i0} = \frac{T_i + T'_{i-1}}{m_i} - \omega_0^2 \left(R_0 + R_{i0} - \frac{3(R_0 \cdot R_{i0})R_0}{\|R_0\|^2} \right) \quad (2)$$

在地心惯性坐标系, 主星的动力学方程为

$$\ddot{R}_0 = -\omega_0^2 R_0 + \frac{T'_M}{m_M} \quad (3)$$

其中, T'_M 为珠点 B_n 对主星的拉力. 主星质量 m_M 比子星和系绳大很多, 系统质心在主星位置, 因此可以认为 $\frac{T'_M}{m_M} \approx 0$, 所以可得主星(质心)动力学方程为

$$\ddot{R}_0 = -\omega_0^2 R_0 \quad (4)$$

式(2)减去式(4)可得

$$\ddot{R}_{i0} = \frac{T_i + T'_{i-1}}{m_i} - \omega_0^2 \left(R_{i0} - \frac{3(R_0 \cdot R_{i0})R_0}{\|R_0\|^2} \right) \quad (5)$$

上面得到的(5)式珠点动力学方程是处于中间部位的珠点的动力学方程, 对于第一个结点(子星) B_1 ($i=1$), 令公式中所有下标为 $i-1$ 的项都不

存在,剩下的就是第一个珠点的动力学方程。

对于锚点 B_a ,对它的处理涉及到系绳释放过程的建模,还有需要详细讨论的地方,因此这个点将在下面系绳运动模型中详细描述.锚点动力学方程为

$$\ddot{R}_{a0} = \frac{T_a + T'_n}{m_a} - \omega_0^2 \left(R_{a0} - \frac{3(R_0 \cdot R_{a0})R_0}{\|R_0\|^2} \right) \quad (6)$$

式中 T_a 和 T'_n 分别为主星和珠点 B_n 对锚点 B_a 拉力。

为了进行数值仿真,需要将向量形式的动力学方程写成标量形式.令 x_i, y_i 和 z_i 分别为珠点 B_i 在主星轨道坐标系内的坐标.这样,珠点相对于主星的位置矢量可以表示为

$$R_{i0} = x_i(t)i + y_i(t)j + z_i(t)k \quad (i=1,2,\dots,n,a) \quad (7)$$

式(5)和(6)描述了自由度为 $3n+3$ 的三维空间离散绳系卫星系统动力学模型.对于空间绳系卫星系统,可获得离散系统在主星轨道坐标系下的动力学方程的具体形式为

$$M \ddot{X} = F \quad (8)$$

其中

$$M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \dots, m_n, m_n, m_n, m_a, m_a, m_a)$$

$$X = [x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, x_a, y_a, z_a]^T$$

$$F = [f_{1,x}, f_{1,y}, f_{1,z}, f_{2,x}, f_{2,y}, f_{2,z}, \dots, f_{n,x}, f_{n,y}, f_{n,z}, f_{a,x}, f_{a,y}, f_{a,z}]^T$$

这里称 M 为系统的质量矩阵, X 和 F 为系统的位移向量和载荷向量.一旦给定各珠点初始条件,就能通过求解由式(8)给出的常微分方程组得到系绳在任意时刻的空间构形。

在上述离散的高维数绳系卫星系统中系绳结点在释放时从主星内部移至星外,或在收拢时从主星外部移至星内,是通过增大(减小)锚点 B_a 和主星间距离 l_a 和增加(减少)结点的数目来实现的,导致该离散动力学系统具有时变的自由度。

当系绳向主星外释放时,锚点 B_a 的前端拉力成为^[13]

$$T_a = T_M + \mu \dot{l}_M^2 \eta_{a,M} \quad (9)$$

当系绳向主星内收拢时,锚点 B_a 的前端拉力成为

$$T_a = T_M + \mu \dot{l}_M^2 (\eta_{a,M} - 1) \quad (10)$$

式(9)和(10)中 T_M 表示系绳对主星的拉力, \dot{l}_M 为主星内系绳长度的时间变化率, $\mu \dot{l}_M^2 \eta_{a,M}$ 和 $\mu \dot{l}_M^2 (\eta_{a,M} - 1)$ 称为由主星内部系绳的质量发生变化时导致的“火箭项”。

另外需要注意的是,处理系统自由度变化过程中,在 Δt 时间内,可能有一个或多个星内绳结点位置发生变化的情况,处理思路是一样的。

1.3 系绳单元松弛模型

对于系绳单元模型,这里考虑到系绳的柔性和黏弹性.根据 Kelvin-Voigt 模型^[14],可将相邻的绳结点和之间的拉力表示成如下形式

$$T_{i,j} = EA(\eta_{i,j} - 1 + \alpha \dot{\eta}_{i,j}) \quad i,j=0,1,\dots,n+1, i \neq j \quad (11)$$

式中 $\eta_{i,j}$ 表示相邻结点 i 和 j 之间的系绳的延伸率, $\dot{\eta}_{i,j}$ 为该延伸率对于时间的变化率, α 为系绳的阻尼耗散因数。

通常所说的绳索多为复合材料,是多根纤维编织成的纤维束,在自然不受外力的状态下,绳索中的各个纤维呈松弛状态,而纤维只有在拉紧状态下才表现出较大的刚度.所以,当绳索受压时,各个纤维抵抗压力的能力都非常低,绳索整体只表现出很小的刚度.当绳索受拉时,各个纤维的受拉状态也并不一致:由于纤维的松弛余量,当绳索受到微小的拉力,各个纤维仍保持松弛,绳索整体刚度依然很小;拉力逐渐增加,纤维逐个被拉紧,绳索整体表现为刚度逐渐增加,直至趋近于一个常值。

空间受力绳索单元不是简单的线性本构关系,为准确反映系绳真实受力情况,根据绳索单元只能受拉而不能抗压的特性,建立应力-应变关系的松弛模型^{[15]-[16]}表示成如下形式

$$\sigma = \frac{1}{2} \left[(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + 4 \left(\frac{T_0}{EA} \right)^2} \right] E \quad (12)$$

式中, EA , ε_0 和 T_0 分别代表轴向刚度、初始应变和初始轴向力,三者可以通过松弛绳索的拉伸试验得到。

图3是基于式(12)的应力-应变曲线,图中给出了 T_0/EA 的5种不同的取值,分别为 4.0×10^{-4} , 3.0×10^{-4} , 2.0×10^{-4} , 1.0×10^{-4} 和 0.0×10^{-4} .当 $T_0=0$ 时,如图3中所示,其对应的是一条双线性应力-应变曲线,轴向刚度在 $\Delta/L=0$ 处并

不连续,存在突变.因此,通过给 T_0 赋小值来确保平衡分析中迭代的稳定性.

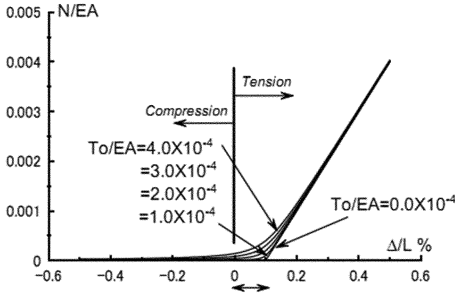


图3 绳索单元的应力-应变曲线

Fig. 3 Modeled stress - strain relation of a tether unit

综合式(11)和式(12),可得改进后的相邻的绳结点 i 和 j 之间的拉力表示成如下形式

$$T_{i,j} = \frac{1}{2}EA \left[(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + 4\left(\frac{T_0}{EA}\right)^2} + 2\alpha\eta_{i,j} \right] \quad (13)$$

$$i, j = 0, 1, \dots, n+1, i \neq j$$

单元数目越多模型越接近真实系统,但是当单元数目达到一定数目时,单元数继续增加对计算精度增加影响不大.自由释放过程子星相对于主星运动轨迹如图4所示,系绳末端为子星;图(a)和(b)分别表示单元数目为1000和2000的情形.10km的系绳完全释放,仿真时间均为1445.56s,结果是收敛的.两种单元数目情况下,子星运动轨迹相差很小,而使用2000个系绳单元会使仿真计算时间增加很多,1000个系绳单元就符合精度要求了.

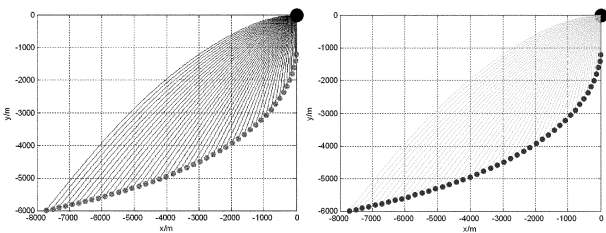


图4 系绳单元数分别为1000和2000时子星自由释放过程

Fig. 4 Free deployment process of the subsatellite for tether unit number 1000 and 2000

2 算例

地球引力常数 $\mu = 3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$,主星始终在圆轨道上运动,主星轨道半径 $R_0 = 7100 \text{ km}$,子星质量为 $m_s = 1000 \text{ kg}$.系绳刚度 $EA = 3 \times 10^5 \text{ N}$,线密度 $\rho_l = 3.0 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$,阻尼耗散因数 $\alpha = 0.01$,绳长 $L = 10 \text{ km}$,绳单元数 $N = 1000$.

初始时刻,子星位于主星正下方下5m处,以

1m/s的速度匀速释放系绳直到系绳全部释放;待释放系绳置于主星内,对于星释放情形进行仿真,结果如图5所示.图5(a)表示开始释放系绳以后,每释放记录100m的系绳相对于主星的位置变化,系绳末端为子星.图5(b)表示开始释放系绳以后,主星外连接处系绳的张力(即系绳对主星的拉力)随时间变化的情况.从图中可以看出,匀速释放过程中由于系绳的纵向振动,子星轨迹并不光滑;释放刚开始阶段主星端系绳张力较小,随着系绳继续释放张力随时间波动变化.

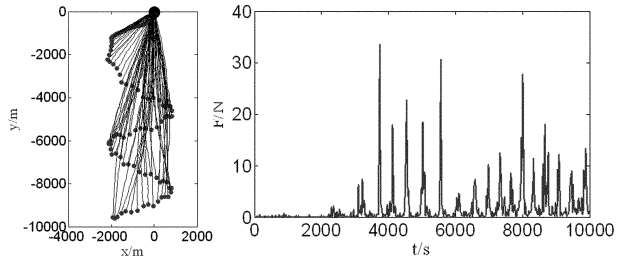


图5 释放阶段绳系卫星系统动力学

Fig. 5 Dynamics of tethered satellite system during the releasing phases

系统匀速释放完成后,主星内制动机构控制系统不再释放,绳系系统进入保持阶段,仿真结果如图6所示.图6(a)表示释放过程结束后8000m的内的系绳运动轨迹,图中每隔200m记录一次系绳的位置.保持阶段系统运动类似周期性的单摆运动,子星在横向(-2100~2100m),纵向(-10000~9500m)的空间范围内运动,且摆动周期近似为3600s符合理论值近似值^[17].图6(b)表示保持阶段主星外连接处系绳的张力随时间变化的情况.起始时刻,由于突然制动导致系绳绷紧,引起系绳纵向振动,几秒钟内主星端系绳张力达到最大值为26.54N,然后张力急剧减小,后来随时间如图波动变化,系绳内阻尼使纵向振动有减弱趋势.

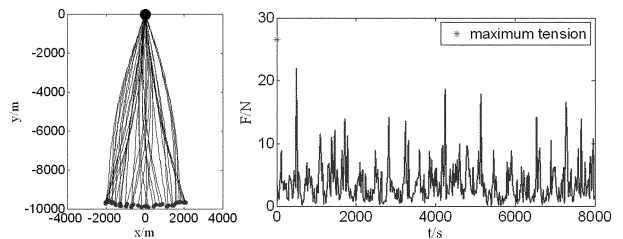


图6 保持阶段卫星绳系系统动力学

Fig. 6 Dynamics of tethered satellite system during the retaining phases

竖直向上或向下是绳系系统的稳定平衡位置,在保持阶段需要施加适当主动控制使系统在稳定平衡位置处保持相对静止. 对将系绳回收入主星情形进行仿真,引入距离速率控制,以匀速1.0m/s收拢系绳直到主星外剩余系绳长度为1km. 收拢初始时刻,绳系系统与稳定平衡位置重合,在主星正下方,仿真结果如图7. 图7(a)表示开始收拢系绳以后,每收拢100m记录的系绳相对于主星的位置变化,系绳末端为子星. 图7(b)表示收拢阶段主星外连接处系绳的张力随时间变化的情况. 从图中可以看出,与释放过程相比,匀速回收过程中,子星轨迹比较光滑,回收后期系绳会对主星发生缠绕. 回收刚开始阶段主星端系绳张力刚开始比较大,后随时间波动变化先减小后增大.

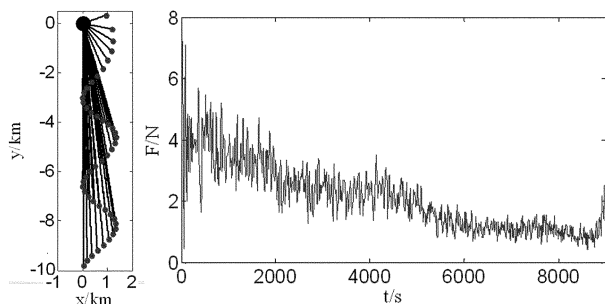


图7 收拢阶段绳系卫星系统动力学

Fig.7 Dynamics of tethered satellite system during the retrieving phases

3 结论

考虑无限维绳系卫星系统中系绳的分布质量、柔性和黏弹性,建立其离散的有限维动力学模型,通过设置锚点,得到卫星释放和收拢过程系统自由度变化的判定方法以及时变自由度绳系卫星系统动力学响应的计算方法.

由于考虑了系绳的黏弹性、分布质量和空间位形,还有绳索单元模型受力本身的特点,使得建立的改进珠式模型能够细致地描述系绳的纵横向振动,能够描述系绳不同的振型;根据绳索只能受拉而不能抗压的特性建立了系绳单元的松弛模型,准确反映系绳真实受力情况,分析了微重力下非线性绳系卫星系统大范围运动长时间历程的动力学行为,计算结果具有很好的收敛性.

从仿真结果可以清晰地看出系绳内部张力和纵向弹性振动情况,应用非线性本构单元建模能够细致、精确地描述系绳张力变化和横、纵向振动. 此

外仿真绳系系统运动过程也印证了稳定平衡位置在该系统动力学中的重要特性.

参 考 文 献

- 1 COLOMBO G, et al. The 《Skyhook》: A shuttle-borne tool for low-orbital-altitude research. *Meccanica*, 1975,10(1): 3~20
- 2 Carroll J A. Tether applications in space transportation. *Acta Astronautica*, 1984, 13(4):165~174
- 3 许滨,张珩. 空间绳系技术及其应用. 863 航天航空技术, 2002, 10: 30~36 (Xu B, Zhang H. Space tethers technology and its application. *863 Astronautics Technology*, 2002,10:30~36 (in Chinese))
- 4 张万周. 空间系绳系统的发展及其应用前景. 中国航天, 1999, 3: 23~28 (Zhang W Z. The development and application perspective of space electrodynamic tethered system. *Aerospace China*, 1999, 3: 23~28 (in Chinese))
- 5 Misra A K, Modi V J. A survey on the dynamics and control of tethered satellite system. *Advances in the Astronautical Sciences*, 1986, 62: 667~719
- 6 Synge J L. On the behavior according to Newtonian theory of a plumb line or pendulum attached to an artificial satellite. *Proceeding of the Royal Irish Academy*, 1959,60:1~6
- 7 Williams P. Deployment/retrieval optimization for flexible tethered satellite systems. *Nonlinear Dynamics*, 2008, 52 (1-2): 159~179
- 8 Makala K K, Agrawal S K. Dynamic modeling and simulation of satellite tethered systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2005, 127(2): 144~156
- 9 Steiner W, Zemann J, Steindl A, et al. Numerical study of large amplitude oscillations of a two-satellite continuous tether system with a varying length. *Acta Astronautica*, 1995, 35(9-11): 607~621
- 10 Wiedermann G, Schagerl M, Steindl A, et al. Computation of force controlled deployment and retrieval of a tethered satellite system by the finite element method. European Conference on Computational Mechanics 99, Wunchen, Germany, 1999, 410~429
- 11 李强. 空间绳系卫星系统动力学建模与仿真研究. 国防科学技术大学[博士学位论文], 2007 (Li Q. Study on space tethered satellite system dynamic modeling and simulating [Dissertation for the Doctoral Degree]. National University of Defence Technology, 2007 (in Chinese))
- 12 余本嵩,文浩,金栋平. 时变自由度绳系卫星系统动力

- 学. 力学学报, 2010, 42(5): 926 ~ 932 (Yu B S, Wen H, Jin D P. Dynamics of tethered satellite system with a time-varying number of degrees-of-freedom. *Acta Mechanica Sinica*, 2010, V42(5): 926 ~ 932 (in Chinese))
- 13 Krupa M, Poth W, Schagerl M, et al. Modelling, dynamics and control of tethered satellite systems. *Nonlinear Dynamics*, 2006, 43(1-2): 73 ~ 96
- 14 He X, Powell J D. Tether damping in space. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1990, 13(1): 104 ~ 112
- 15 Fujiwara J, Segawa S, Kenshi ODA, et al. Static loading texts and a computational model of a flexible net. *In: Architectural Institute of Japan*, 2007: 66 ~ 72
- 16 李京阳, 于洋等. 空间飞网两种动力学模型的比较研究. 力学学报, 2011, 43(3): 542 ~ 550 (Li J Y, Yu Y, et al. Simulation and comparison of different dynamical models of space webs. *Acta Mechanica Sinica*, 2011, 43(3): 542 ~ 550 (in Chinese))
- 17 王维. 绳系卫星的动力学与控制研究. 清华大学[博士学位论文], 2008 (Wang W. Study on dynamics and control of the tethered satellite. Tsinghua University [Dissertation for the Doctoral Degree], 2008 (in Chinese))

DYNAMICS OF TETHERED SATELLITE SYSTEM BASED ON NONLINEAR UNIT MODEL

Liu Zhuangzhuang¹ BaoYin Hexi²

(1. School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

(2. School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract A discrete finite-dimensional dynamical model was built to describe the space large overall motion of tethered satellite system with an infinite-dimensional viscoelastic tether in a long time. The tethered satellite system is a complex nonlinear dynamic system. Considering the tether's viscoelasticity, distributed mass and space form, the established improved bead model can meticulously describe the tether's vertical and horizontal vibration. According to tether's characteristic of tensile and not compressive, the slack tether unit model was set up to accurately reflect real stress of tether. The determination of the number of degrees-of-freedom of the system was studied. Based on numerical integral calculation, the dynamic response was obtained via numerical simulation of the deployment, retrieval and retainment process of tethered satellite system in a long time. The result is convergent. The simulation proves the important role of the stable equilibrium position in the dynamics of tethered space system.

Key words tethered satellite system, variable freedom, finite-dimensional, slack unit model, dynamics