柔性板的模态价值降阶及其主动控制研究*

章敏 蔡国平

(上海交通大学工程力学系,上海 200240)

摘要 对柔性板的模型降阶和主动控制进行研究,并且进行实验验证.首先采用假设模态方法给出系统的 动力学方程,然后采用价值模态分析方法进行降阶研究.考虑到弱阻尼系统,文中给出了一种价值模态分析 方法的近似公式.控制律采用最优控制方法进行设计.仿真和实验结果显示,价值模态分析方法能够有效地 显示出系统各阶模态的重要程度,因此能够有效地对系统模型进行降阶.

关键词 柔性板, 模型降阶, 模态价值分析方法, 主动控制, 实验

引 言

20世纪70年代以来,为了实现复杂功能和延 长航天器的使用寿命,柔性附件在航天器中大量引 入,如大型太阳阵和大型空间天线等,而且这些附 件多为悬臂外伸薄板结构^[1].然而柔性附件的引入 为动力学建模与控制带来了困难.为了准确描述航 天器的运动,必须在动力学模型中充分考虑其柔性 特征,使得所建立的动力学模型的自由度数目通常 很大,而控制的设计和实现则要求系统模型的阶数 应尽可能地低^[2].这就要求对模型进行降阶处理, 而且降阶后的模型既要能真实地反映出系统的动 力学特性,阶数也要足够低,以便进行控制设计和 实现.另外从动力学仿真角度看,为提高动力学仿 真的计算效率,模型阶数也不应太高^[2].

模型降阶一般可以从两方面考虑^[3]:一方面是 从建模的角度进行降阶,即根据经典的假设模态 法,选择具有良好正交性的模态集,截取少数低阶 模型以构成系统模型.另一方面是选择合适的降阶 准则进行降阶,即根据系统价值函数的大小,确定 出那些对系统特性贡献较大的少数主要模态,并以 这些模态组成系统模型,以达到模型降阶的目的. 目前常采用的降阶准则有惯性完备性准则^[4]、模态 价值分析准则^[5-7]、内平衡准则^[8]等,其中模态价 值分析准则是根据各阶模态的模态价值对系统价 值函数的贡献来决定对该模态的取舍,保留那些价 值高的模态,略去价值很小的模态.模态价值分析 准则通过计算模态价值提供了一种截断模态的方法,由于它直接将模态选择与控制目标联系起来, 因而与其他方法相比其降阶更加合理.

本文采用模态价值分析方法对柔性板的模型 降阶进行研究,并且进行主动控制设计,通过数值 仿真和实验对比验证模态价值分析方法的有效性.

1 动力学方程

考虑图 1 所示的柔性悬臂板. 将板的横向位移 w(x,y,t)展开成模态叠加形式 $w(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} W_{ij}(x,y)\eta_{ij}(t)$,其中 $W_{ij}(x,y) = X_i(x)Y_j(y)$ 为板的第 ij 阶模态试函数, $X_i(x)$ 为板的第阶模态坐标, $Y_j(y)$ 采用固定 – 自由悬臂梁的模态函数,采用自由 – 自由梁的模态函数,详见文献[1]. 假定截取板 的前阶模态作为结构的真实响应,则可得出柔性板 的动力学方程为:



$$\begin{cases} M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = Bu\\ y = \bar{C}_d q + \bar{C}_r \dot{q} \end{cases}$$
(1)

2008-06-09 收到第1稿,2008-07-15 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(10772112,10472065)、教育部重点项目(107043)和高校博士点基金(20070248032)资助项目

式中, $q \in R^n$ 为物理坐标列向量; $M \in R^{n \times n}$ 、 $D \in R^{n \times n}$ 、 $K \in R^{n \times n}$ 分别为质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵,且有 $M = M^T > 0$, $D = D^T \ge 0$, $K = K^T \ge 0$; $u \in R^{r_1}$ 为控制力列阵, r_1 为作动器的个数; $B \in R^{n \times r_1}$ 为作动器的分布矩阵; $y \in R^{r_2 \times 1}$ 是需要由控制系统抑制的输出量, $\overline{C}_d \in R^{r_2 \times n}$ 和 $\overline{C}_r \in R^{r_2 \times n}$ 分别为位移观测矩阵和速率观测矩阵.

2 模态价值分析

模态价值分析准则是由 Skelton 等人^[5-7]提出 来的动力学模型降阶方法,它考虑了扰动作用和控 制性能要求对模态选择的影响,是一种较为广泛应 用的模型降阶方法.它提供了一种方法,以确定系 统中各组成要素对控制目标函数的贡献.这些要素 可以是物理上的子系统,也可以是如模态坐标这样 的数学子系统,它们通称为分量(Component).对于 一般意义上的分量,这一方法称为分量价值分析 (Component Cost Anslysis,简称 CCA).当取模态作 为子系统时,则称为模态价值分析(Modal Cost Analysis,简称 MCA).

(1) MCA 的基本理论

采用正则模态矩阵 *T*,可将式(1)变换到正则 模态空间:

$$\begin{cases} \ddot{\eta} + \operatorname{diag}(2\zeta_i\omega_i)\dot{\eta} + \operatorname{diag}(\omega_i^2)\eta = Bu\\ y = C_d\eta + C_r\dot{\eta} \end{cases}$$
(2)

其中, $C_d = \overline{C}_d T$, $C_r = \overline{C}_r T$, $\widehat{B} = T^T \overline{B}$, η 为模态坐标列 向量, $\omega_i \, \zeta_i$ 分别为第 *i* 阶模态的固有频率和阻尼 比.

将方程(2)转成状态方程形式,有:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu\\ y = Cx \end{cases}$$
(3)

$$\begin{split} & [\dot{\eta}_1, \omega_1 \eta_1, \cdots \dot{\eta}_n, \omega_n \eta_n], A = \operatorname{diag}(A_i), B = \\ & [B_1^T, \cdots, B_n^T]^T, C = [C_1, \cdots, C_n]; A_i = \\ & \begin{bmatrix} -2\zeta_i \omega_i & -\omega_i \\ & \omega_i & 0 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} b_i \\ 0 \end{bmatrix}, C_i = [C_{r_i}, C_{d_i}/\omega_i]; b_i \end{split}$$

是 B 的第 i 行, C_{r_i} 、 C_{d_i} 分别为 C_r 、 C_d 的第 i 列.

由于方程(3)中的状态分量为模态坐标,故分量价值即为模态价值. 第阶模态的模态价值计算公式为^[2]:

$$V_i = tr[XC^TQC]_{ii} \tag{4}$$

其中,tr(·)代表矩阵的迹;Q表示输出 y 中各分

量相对重要性的权矩阵;X 为系统状态的协方差矩 阵,为以下 Lyapunov 方程的解:

$$XA^T + AX + BB^T = 0 \tag{5}$$

模态价值也可按照以下方法进行计算.记:

$$X = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & \cdots & X_n^{(1)} & X_n^{(2)} \end{bmatrix}^T,$$

$$C_i^{(1)} = C_{ii}, C_i^{(2)} = C_{di} / \omega_i$$
(6)

则第 i 阶模态的模态价值为^[2]:

$$V_{i} = tr[XC^{T}QC]_{ii} = V_{i1} + V_{i2}$$
(7)

式中,

$$\begin{cases} V_{i1} = X_{i}^{(1)} C^{T} Q C_{i}^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} [2\omega_{i}\omega_{j} (\zeta_{j}\omega_{i} + \zeta_{i}\omega_{j}) \frac{\mathbf{d}_{ij}}{\Delta_{ij}} C_{j}^{(1)T} Q C_{i}^{(1)} + \\ \omega_{j} (\omega_{j}^{2} - \omega_{i}^{2}) \frac{\mathbf{d}_{ij}}{\Delta_{ij}} C_{j}^{(2)T} Q C_{i}^{(1)}] \\ V_{i2} = X_{i}^{(2)} C^{T} Q C_{i}^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} [2\omega_{i}\omega_{j} (\zeta_{j}\omega_{i} + \zeta_{i}\omega_{j}) \frac{\mathbf{d}_{ij}}{\Delta_{ij}} C_{j}^{(2)T} Q C_{i}^{(2)} + \\ \omega_{j} (\omega_{j}^{2} - \omega_{i}^{2}) \frac{\mathbf{d}_{ij}}{\Delta_{ij}} C_{j}^{(1)T} Q C_{i}^{(2)}] \end{cases}$$

$$\tag{8}$$

其中, $d_{ij} = b_i b_j^T$, $\Delta_{ij} = 4\omega_i \omega_j (\zeta_i \omega_i + \zeta_j \omega_j) (\zeta_j \omega_i + \zeta_i \omega_j) + (\omega_j^2 - \omega_i^2)^2$.

由上式可见, V_i 不仅包含第 i 阶模态的贡献, 还包含其它模态的贡献,即模态价值并不是价值解 耦的, V_i = 0 并不意味着可略去第阶模态而不影响 其它模态价值. 所以模态价值分析准则就是根据各 阶模态价值对系统价值函数的贡献来决定对该阶 模态的取舍. 系统的价值函数 V 为各阶模态价值之 和:

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i \tag{9}$$

Skelton 和 Hughes 曾引入模型品质指标(Model Quality Index,简称 MQI)^[5-7]:

$$MQI = \left(\sum_{i=1}^{r} V_i\right) / \left(\sum_{i=1}^{n} V_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{r} V_i\right) / V$$
(10)

其中, $\sum_{i=1}^{r} V_i$ 表示保留下的模态价值,r为保留模态的个数,n为系统总的模态数. MQI 接近于 1 时表示该模型品质最理想.

通过计算各阶模态价值,按照模态价值的大小 对模态进行排列,一般讲模态价值并不按频率大小 排列.模型降阶时,保留那些价值高的模态,略去那 些价值很小的模态.若模态价值分析要求保留的模 态数过多,则应修改控制目标,即改变作动器在结 构中的位置,也即改变方程(1)中的 B 矩阵,使只 需保留合理的模态数. 一般地讲,保留模态的选择 是个反复的过程.

(2)弱阻尼、频率足够分开时模态价值的近似 计算

前面给出的是模态价值计算公式的一般形式. 下面介绍一种计算弱阻尼系统模态价值的近似公 式.

由表达式 $\Delta_{ij} = 4\omega_i\omega_j(\zeta_i\omega_i + \zeta_j\omega_j)(\zeta_j\omega_i + \zeta_i\omega_j)$ + $(\omega_j^2 - \omega_i^2)^2$ 可知,当i = j时,有:

$$\Delta_{ii} = 16\zeta_i^2 \omega_i^4 \tag{11}$$

当i≠j时,对于阻尼比ζ≪1的弱阻尼系统,当 相应的模态频率足够分开,即当满足以下条件时,

$$4\omega_i\omega_j(\zeta_i\omega_i+\zeta_j\omega_j)(\zeta_j\omega_i+\zeta_i\omega_j)\ll(\omega_j^2-\omega_i^2)^2$$
(12)

有:

$$\Delta_{ij} \approx (\omega_j^2 - \omega_i^2)^2 \tag{13}$$

于是,

$$V_{i1} = \frac{d_{ii}C_{i}^{(1)T}QC_{i}^{(1)}}{4\zeta_{i}\omega_{i}} + \sum_{i \neq j} \left[\frac{2\omega_{i}\omega_{j}(\zeta_{j}\omega_{i} + \zeta_{i}\omega_{j})d_{ij}}{(\omega_{j}^{2} - \omega_{i}^{2})^{2}} \times C_{j}^{(1)T}QC_{i}^{(1)} + \frac{\omega_{j}d_{ij}}{(\omega_{j}^{2} - \omega_{i}^{2})}C_{j}^{(2)T}QC_{i}^{(1)}\right] \approx \frac{d_{ii}C_{i}^{(1)T}QC_{i}^{(1)}}{4\zeta_{i}\omega_{i}} = \frac{C_{ii}^{T}QC_{ii}d_{ii}}{4\zeta_{i}\omega_{i}}$$

$$V_{i2} = \frac{d_{ii}C_{i}^{(2)T}QC_{i}^{(2)}}{4\zeta_{i}\omega_{i}} + \sum_{i \neq j} \left[\frac{2\omega_{i}\omega_{j}(\zeta_{j}\omega_{i} + \zeta_{i}\omega_{j})d_{ij}}{(\omega_{j}^{2} - \omega_{i}^{2})^{2}} \times C_{j}^{(2)T}QC_{i}^{(2)} - \frac{\omega_{j}d_{ij}}{(\omega_{j}^{2} - \omega_{i}^{2})}C_{j}^{(1)T}QC_{i}^{(2)}\right] \approx \frac{d_{ii}C_{i}^{(2)T}QC_{i}^{(2)}}{4\zeta_{i}\omega_{i}} = \frac{C_{di}^{T}QC_{di}d_{ii}}{4\zeta_{i}\omega_{i}}$$
(14)

所以第 i 阶模态的模态价值近似为^[2]:

$$V_{i} = V_{i1} + V_{i2} \approx \frac{(C_{di}^{T}QC_{di} + \omega_{i}^{2}C_{ri}^{T}QC_{ri})\sigma_{i}^{2}}{4\zeta_{i}\omega_{i}^{3}} \quad (15)$$

式中, $\sigma_i^2 = d_{ii} = b_i b_i^T = (\hat{B}\hat{B}^T)_{ii}$,下标 *i* 表示取矩阵 的第 *i* 个对角元素.

3 主动控制设计

假设采用模态价值分析方法所确定的重要模态数目为 r,并假定对这 r 个模态进行控制,作动器的个数为 r₁. 受控模态方程为:

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c u \tag{16}$$

其中, $x_c \in R^{2r}$ 为由受控模态所组成的系统状态, $A \in R^{2r \times 2r}$ 为受控模态状态方程的系统矩阵, $B \in C$

 $R^{2r \times r_1}$ 为受控模态状态方程的作动器位置矩阵, $u \in R^{r_1 \times 1}$ 为控制力列向量.

根据最优控制理论,取性能指标:

$$\boldsymbol{J} = \int_{0}^{+\infty} \left[x_{c}^{T}(t) \overline{\boldsymbol{Q}} x_{c}(t) + \boldsymbol{u}^{T}(t) \overline{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{u}(t) \right] dt$$
(17)

其中, $\overline{Q} \in R^{2r \times 2r}$ 和 $\overline{R} \in R^{r_1 \times r_1}$ 为正定对称增益矩阵. 可以得到最优控制律为:

$$\boldsymbol{u}(t) = -\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{c}^{T}\overline{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{x}_{c}(t)$$
(18)

其中, $\overline{S} \in R^{2r \times 2r}$ 为正定对称矩阵,为如下 Riccati 矩 阵方程的解:

$$\overline{\mathbf{S}}\mathbf{A}_{c} + \mathbf{A}_{c}^{T}\overline{\mathbf{S}} - \overline{\mathbf{S}}\mathbf{B}_{c}\overline{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{B}_{c}^{T}\overline{\mathbf{S}} + \overline{\mathbf{Q}} = 0$$
(19)

4 数值仿真与实验对比

本节进行仿真计算. 悬臂板为铝合金板,尺寸 为0.6m×0.3m×0.0015m,密度为2766kg/m³,弹 性模量为69GPa,泊松比为0.32,阻尼比取为0. 5%.假定在悬臂板的右下角点处施加一个外力,使 得该点产生2cm的初始位移,即(x₀,y₀)=(0.6, 0),初始速度为0.然后去掉外力,板在该初始条件 下自由振动.仿真计算时,截取板的前5阶模态作 为板的真实响应,即 n=5.则控制矩阵和观测矩阵 为:

$$\begin{split} \overline{B} &= \begin{bmatrix} X_1(x_0) Y_1(y_0) & X_1(x_0) Y_2(y_0) & X_2(x_0) Y_1(y_0) \\ & X_2(x_0) Y_2(y_0) & X_3(x_0) Y_1(y_0) \end{bmatrix}^T \\ \overline{C}_d &= \begin{bmatrix} X_1(x_0) Y_1(y_0) & X_1(x_0) Y_2(y_0) & X_2(x_0) Y_1(y_0) \\ & X_2(x_0) Y_2(y_0) & X_3(x_0) Y_1(y_0) \end{bmatrix}^T \\ \overline{C}_\gamma &= 0 \end{split}$$

表1 模态价值计算结果

Table 1 Results of modal cost analysis

ModalFrequency		y W	Without control			With control		
order	(Hz)	V_1	V_2	MQI	$V_1(10^{.9})$	$V_2(10^{-9})$	MQI	
1	3.5669	0.1337	0.1337	0.9519	0.4244	0.4244	0.7747	
2	15.1730	0.0059	0.0059	0.0417	0.0577	0.0577	0.1054	
3	22.3534	0.0005	0.0005	0.0039	0.0367	0.0368	0.0671	
4	49.8231	0.0003	0.0003	0.0023	0.0114	0.0114	0.0209	
5	98.1131	2.47e-5	2.47e-5	0.0002	0.0175	0.0175	0.0320	

表1中第3-5列给出了模态价值结果,其中 V₁为采用公式(4)所得出的精确解,V₂为采用近似 公式(7)的结果,MQI为各阶模态价值占总价值的 百分比.计算时,因为方程(1)中的观测点为板右 下角点,因此公式(4)中Q为标量,取值为1.因为 本文考虑的柔性板为弱阻尼和频率足够分开,因此

351

V1 的结果和 V2 的基本相同,这也验证了模态价值 近似解在弱阻尼、频率足够分开的情况下是适用 的.同时可以看到,对于自由响应模态分析,前两阶 模态价值之和已经达到总价值的 99.36%,所以只 需要截取第一、第二阶模态便可以很好的对原高阶 系统进行近似,因此取前两阶模态组成降阶系统. 图 2(a)中虚线给出了采用原高阶系统所得出的柔 性板右下角点的响应时程,采用降阶系统所得出的 该点的时程和原系统的吻合良好,局部放大图如图 2(b)所示.图 3 为原系统的频率响应,图 4 为降阶 系统的频率响应,可看出,降阶系统能够较好地逼 近原系统.



考虑采用两片压电作动器对板的自由振动进行控制. 压电片尺寸为 0.06m×0.015m×0.0005m,密度为 7600kg/m³,横向弹性模量 E_{11} 为 69GPa,轴向弹性模量 E_{33} 为 54GPa,压电常数 d_{31} 为 – 1.75×10⁻¹⁰. 压电材料用于结构控制会引起附加质量和刚度效应^[9],因为本文中板的尺寸远大于压电作动器,因此可忽略压电作动器所引起的质量和刚度效应. 文献[10]采用粒子群优化方法对柔性板上作动器的优化位置进行了详细研究,本文中两片压电作动器的位置放置在文献[10]中所确定出的优化位置,压电作动器沿长度方向中点在板坐标系 XY 中的坐标为(0.067m,0.0285m)和(0.45m,0.2135m),如图 1 所示. 此时方程(1)中, $\overline{B} \in R^{5\times 2}$ 与两个压电作动器的位置有关;因为观测点仍

为板的右下角点,因此 \overline{C}_{a} 、 \overline{C} ,仍如前所示.模态价 值结果如表1中第6-8列所示,可看出,对于施加 控制的情况,前两阶模态价值之和也高达总价值的 88.01%,因此也只需截取前两阶模态组成降阶系 统,以进行控制设计.控制设计时,取公式(17)中 的增益矩阵为 \overline{Q} = diag([100,100,1,1]), \overline{R} = diag (4×10⁻⁷,4×10⁻⁸).施加控制后,柔性板右下角点 的响应时程如图 2(a)中实线所示.

为了验证以上仿真结果的正确性,在此开展实 验研究.实验系统以 DSP TMS320F2812 为核心进 行构建,实验系统流程如图 5 所示.在悬臂板根部 位置粘贴两片电阻应变片,用于板振动信号的拾 取.应变片为浙江黄岩测试仪器厂生产,型号为 BX120-4AA,应变片在板坐标系 XY 中的坐标为 (0.031m,0.1475m)和(0.034m,0.254m),见图1. 压电作动器尺寸如上所示,为江苏联能电子技术有 限公司生产.图 6 给出了实验结果,为柔性板右下 角点的响应时程,其中虚线为自由振动的结果,实 线是施加控制的结果.对比图 6 和图 2(a)可看出, 结果吻合较好.关于模态坐标的提取和模态控制力 向实际控制力的转换可参考文献[10].



5 结论

对柔性板模型降阶的模态价值分析方法和主 动控制进行了研究,并且开展了实验验证.考虑到 弱阻尼的情况,给出了一个模态价值的近似计算公 式.研究结果显示出,模态价值分析方法能够显示 出结构各阶模态的重要程度,因此模态截断可以据 此而进行.当系统为弱阻尼和固有频率足够分开 时,可以采用模态价值的近似公式进行降阶.本文 的实验结果也验证了模态价值分析方法的有效性.

参考文献

- 邱志成. 航天器挠性板系统的模态分析和模型降阶. 航 天控制,2006,24(3):89~96(Qiu Zhicheng. Modal analysis and model reduction for flexible cantilever plate system of spacecraft. *Aerospace Control*, 2006, 24(3):89~96(in Chinese))
- 2 施高萍. 多柔体系统动力学模型的降阶研究. 浙江工业 大学硕士学位论文,2004(Shi Gaoping. The study of model reduction for dynamics of flexible multibody system. Masder's dissertation in Zhe Jiang University of Technology, 2004(in Chinese))
- 3 缪炳祺,曲广吉,程道生.柔性航天器的动力学建模问题.中国空间科学技术,1999,5:35~40(Miao Bingqi,Qu Guangji,Cheng Daosheng. A study on dynamics modeling of flexible spacecraft. *Chinese Space Science and Technology*, 1999,5:35~40(in Chinese))
- 4 Hughes PC. Modal identities for elastic bodies with application to vehicle dynamics and control. *Journal of Applied Me*-

chanics, 1980, 47:177 ~ 184

- 5 Skelton RE. Cost decomposition of linear systems with application to model reduction. *International Journal of Control*, 1980, 32:1031 ~ 1055
- 6 Skelton RE and Yousuff A. Component cost analysis of large scale systems. *International Journal of Control*, 1983, 37 (2):285 ~ 304
- 7 Skelton RE and Gregory CZ. Measurement feedback and model reduction by modal cost analysis. Joint Automatic Control Conference, Denver, 1979:211 ~ 218
- 8 Moore BC. Principal component analysis in linear system: controllability, observability and model reduction. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1981, 26(1):17~31
- 9 滕悠优,蔡国平.旋转运动柔性梁的压电质量和刚度效应.动力学与控制学报,2008,6(1):22~25(Teng Youyou,Cai Guoping. Effects of PZT mass and stiffness on rotating flexible beam. *Journal of Dynamics and Control*,2008, 6(1):22~25(in Chinese))
- 10 潘继.结构作动器/传感器的优化位置及其主动控制研究.上海交通大学硕士学位论文,2008(Pai Ji. Optimal locations of actuator/sensor and active control of structures. Master's dissertation in Shanghai Jiaotong University,2008 (in Chinese))

MODAL COST REDUCTION AND ACTIVE CONTROL OF A FLEXIBLE PLATE *

Zhang Min Cai Guopping

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract Model reduction and active control of a flexible plate were investigated and experimented to verify the theoretical result. Firstly, the dynamic equation of the plate was presented using the assumed mode method. Then model reduction was studied using the modal cost analysis (MCA) method. Considering the system with small damping, a simplified approach for the MCA method was presented. An active controller was designed using the classical optimal control method. Simulation and experimental results indicate that the MCA method is able to demonstrate the relative importance of all the modes of the plate, so it can be used for model reduction of the plate.

Key words flexible plate, model reduction, modal cost analysis method, active control, experiment

Received 8 June 2008, revised 15 July 2008.

^{*} The project supported by the Science Foundation of China (10772112, 10472065), the Key Project of Ministry of Education of China (107043) and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (20070248032)