

轴向受力梁结构线弹性碰撞问题求解

黄志斌^{1,2} 罗旗帜²

(1. 广东工业大学 建设学院, 广州 510006) (2. 佛山科学技术学院 土木工程与建筑系, 佛山 528000)

摘要 研究了质点对轴向受力的 Euler - Bernoulli 梁结构任意位置的横向撞击问题. 把撞击体系简化为质量 - 弹簧体系模型, 采用积分变换方法, 对撞击体系的控制微分方程、边界条件和连续条件进行 Laplace 变换, 在频域内求得其解析表达式, 然后采用 Crump 逆变换方法进行数值反演, 得到时域内的各种动力响应. 数值算例给出了撞击力、弯曲应力和剪力随时间变化的曲线, 通过与有限元比较验证了本方法的正确性. 最后研究了撞击位置、轴向压力、撞击质量、撞击速度和柔度系数等参数对撞击力的影响, 得出了一些有用的结论.

关键词 Euler - Bernoulli 梁, 撞击, 轴力, 任意撞击位置, Laplace 变换, Crump 法

引言

结构的弹性撞击问题是一个经典问题可以追溯到二十世纪初叶. Timoshenko 曾建立了钢球中心冲击简支梁问题的非线性积分方程, 并用分段数值求积方法进行了求解, 后来许多研究者对这问题做了更深入的的研究^[1-4]. 但是, 这些研究均是以 Hertz 接触理论为基础的, 它并不代表物体间所有真实接触过程, 也不能反映物体间相互撞击时波的传播过程.

近年来, 发展了另一种求解弹性碰撞问题的直接模态叠加方法 (DMSM)^[5], 它把结构弹性撞击问题看成是撞击结构系统振动的初值问题, 从而使复杂的碰撞问题简单化. 这种方法不但可以用来分析平动结构的碰撞问题, 还可以用来分析机构的各种弹性锁定问题. 文献[6]得到了质点、杆分别与简支梁跨中横向碰撞问题的解析解, 并借助数值分析方法探讨碰撞问题的动态响应特性, 分析了冲击载荷的收敛性. 文献[7]扩大研究的适用范围, 讨论撞击点位于梁上任意位置的撞击力变化情况.

由于梁受质点撞击作用的时间极短, 了解梁的瞬态变形和应力变化规律是很重要的, 若采用振动解答, 由于频带较宽, 尽管级数取很多项, 但还是很难得到满意的结果, 所以本文采用了积分变换方法求解. 而且本文扩大了研究的适用范围, 在文献[7]的基础上, 研究撞击点位于梁上任意位置的撞

击问题, 对控制微分方程增加了轴力的影响, 运用 Laplace 变换和 Crump 逆变换方法^[8-10] 求得了梁与质点线弹性碰撞问题的解析表达式.

1 基本方程频域内求解

考虑轴力的 Euler - Bernoulli 梁的控制微分方程为^[11]

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{N}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

其中 x 为梁的轴线坐标; y 为梁的挠度; t 为时间; E 为梁的弹性模量; I 为截面惯性矩; N 为轴力; ρ 为密度; A 为截面面积.

令 $\alpha = \frac{\rho A}{EI}$, $\beta = \frac{N}{EI}$, 考虑到梁初始位移和速度为零 ($y|_{t=0} = 0, \frac{\partial y}{\partial t}|_{t=0} = 0$), 所以对式关于 t 进行 Laplace 变换为

$$\frac{\partial^4 \tilde{y}}{\partial x^4} + \beta \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} + \alpha p^2 \tilde{y} = 0 \quad (2)$$

上式的特征方程为:

$$\lambda^4 + \beta \lambda^2 + \alpha p^2 = 0 \quad (3)$$

其四个特征值为 $n_1, -n_1, n_2, -n_2$

则方程(2)的基本解形式为

$$\tilde{y}(x, p) = c_1 e^{n_1 x} + c_2 e^{-n_1 x} + c_3 e^{n_2 x} + c_4 e^{-n_2 x} \quad (0 \leq x \leq l_2) \quad (4a)$$

$$\tilde{y}(x, p) = a_1 e^{n_1 x} + a_2 e^{-n_1 x} + a_3 e^{n_2 x} + a_4 e^{-n_2 x} \quad (-l_1 \leq x \leq 0) \quad (4b)$$

其中 $c_1, c_2, c_3, c_4, a_1, a_2, a_3, a_4$ 为待求系数, l_1, l_2 分

别为撞击两侧的梁长。

梁上任一点的转角 θ , 弯矩 M , 剪力 Q 与梁挠度 y 的关系分别为:

$$\theta = \frac{\partial y}{\partial x}, M = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, Q = -EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

对其进行 Laplace 变换, 代入式(4)则

$$\tilde{\theta}(x, p) = n_1 c_1 e^{n_1 x} - n_1 c_2 e^{-n_1 x} + n_2 c_3 e^{n_2 x} - n_2 c_4 e^{-n_2 x} \quad (5)$$

$$\tilde{M}(x, p) = k_1 c_1 e^{n_1 x} + k_1 c_2 e^{-n_1 x} + k_2 c_3 e^{n_2 x} + k_2 c_4 e^{-n_2 x} \quad (6)$$

$$\tilde{Q}(x, p) = k_3 c_1 e^{n_1 x} - k_3 c_2 e^{-n_1 x} + k_4 c_3 e^{n_2 x} - k_4 c_4 e^{-n_2 x} \quad (7)$$

其中 $k_1 = -EI n_1^2, k_2 = -EI n_2^2, k_3 = -EI n_1^3, k_4 = -EI n_2^3$. 将式(5) - (7)中的 c_i 改为 a_i 同样可以得到当 $(-l_1 \leq x \leq 0)$ 时转角、弯矩和剪力的表达式。

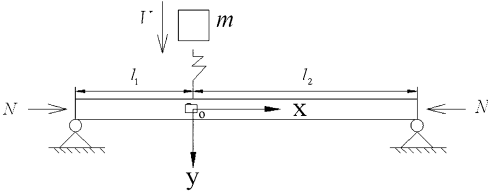


图1 撞击示意图
Fig. 1 Sketch of impact

精确求解梁的撞击问题是很困难的, 实用时常采用一些近似的方法来近似解决梁的横向冲击接触问题. 复旦大学的张文^[12]提出一种叫线化法的简化方法, 即把复杂的非线性碰撞问题在定性和定量上用当量初速度和当量弹簧加以线性化, 从而把问题简化为线弹性系统的自由振动初值问题. 文献[12]中证明了此计算方法的简便性和有较好的精度, 为分析弹性系统的撞击响应提供了一个实用方法。

针对本文问题运用线化法, 考虑一质量为 m 物体以速度 V 横向撞击简支梁, 撞击时物体和梁的接触用一柔度系数为 f 的弹簧模拟, 如图1. 其接触平衡条件如下

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{f}(u - y) = 0 \quad (8a)$$

$$\frac{1}{f}(u - y) = Q_1 - Q_2 \quad (8b)$$

其中 $u(t)$ 为撞击物的位移, Q_1, Q_2 近似地取撞击点正、负侧的剪力值, 即 $Q_1 \approx Q|_{x=0^-}, Q_2 \approx Q|_{x=0^+}$. 进行 Laplace 变换, 且由于撞击物初始位移为零, 初始

速度为 V (即 $u = 0, \frac{du}{dt} = V$), 则式(8)可简化为

$$mp^2 \tilde{y}|_{x=0} + (\tilde{Q}_1|_{x=0^-} - \tilde{Q}_2|_{x=0^+}) \times (mp^2 f + 1) = mV \quad (9)$$

撞击正负两侧的位移、转角、弯矩为连续的, 即

$$\begin{aligned} \tilde{y}|_{x=0^+} &= \tilde{y}|_{x=0^-}, \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}|_{x=0^+} = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}|_{x=0^-}, \\ -EI \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2}|_{x=0^+} &= -EI \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2}|_{x=0^-} \end{aligned} \quad (10)$$

对于梁的边界条件, 有如下关系式

$$\begin{aligned} \tilde{y}|_{x=-l_1} &= 0, -EI \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2}|_{x=-l_1} = 0, \\ \tilde{y}|_{x=l_2} &= 0, -EI \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2}|_{x=l_2} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

将式(4) - (7)代入(9) - (11)可以求得系数 $c_1, c_2, c_3, c_4, a_1, a_2, a_3, a_4$, 从而可以求得撞击力和各种动力响应的表达式。

2 数值反演

应用 Laplace 变换求时域响应的主要困难之一就是迅速地获得其反演, 这个问题往往对于简单的有理函数也不能轻易解决. 研究表明 Laplace 逆变换是一个病态问题, 得到解析的 Laplace 逆变换结果一般很困难, 常采用数值逆变换的方法. 比较常见的 Laplace 数值反演方法有 Duber 法和 Abate 法、Durbin 法、Stefest 法、Crump 法、Schapery 法、Legendre 多项式法、Laguerre 多项式法等许多方法, 针对本问题的具体特点以及各种方法的优缺点, 本文采用 Crump 法。

定义函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换式为:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (12)$$

Laplace 逆变换求 $f(t)$ 的公式为:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s) e^{st} ds \quad (13)$$

式中: $s = \beta + iw, \beta$ 和 w 分别为 s 的实部和虚部, i 为虚数单位。

采用 Crump 逆变换方法进行数值反演, 其反演公式如下

$$\begin{aligned} f(t) \approx \frac{e^{at}}{T} \left\{ \frac{1}{2} Re[F(a)] + \sum_{k=1}^N Re[F(a + i \frac{k\pi}{T})] \times \right. \\ \left. \cos(\frac{k\pi}{T})t - \sum_{k=1}^N Im[F(a + i \frac{k\pi}{T})] \sin(\frac{k\pi}{T})t \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

式中: i 为虚数单位; $Re(s)$ 为求实部函数; $Im(s)$ 为

求虚部函数; $a = \alpha - \ln(E')/2T$; α 的取值要满足 $|f(t)| \leq Me^{at}$, M 为任意常数, E' 为容许误差, 可根据需要取为 $10^{-5} \sim 10^{-8}$; $T = 0.8t_{max}$; t_{max} 为欲求的最大时间, 但因为 t 越接近 t_{max} , 收敛越慢, 故 t_{max} 也可取为欲求的最大时间的两倍, 以保证在所需要的时间段内计算结果的准确性, 当然计算点数须相应扩大. 需要补充说明, 当 $t=0$ 时, 由式(14) 算得的值应乘以 2. 式(14) 中无穷级数求和可用欧拉变换方法或 FFT 法等加速算法提高收敛速度, 无穷级数的求和项数可通过收敛计算确定. 若不采用加速算法, 求和项一般需 500 项以上才收敛.

3 算例分析

有关计算参数为: 简支梁的密度 7.83×10^3 (kg/m^3), 弹性模量 2.07×10^2 (Gpa), 梁长为 5 (m), 梁的截面为 0.2×0.2 (m^2), 撞击体的质量 500(kg), 撞击速度 3 (m/s), 接触弹簧的柔度系数 0.2 (m/MN).

3.1 算法的验证

由本文方法计算求得的撞击力响应与用 ANSYS 有限元(100 个单元)求得的撞击力响应的对比如图 2 所示, 从图可以看出本文解与有限元解吻合得非常好, 说明本方法的正确性且有较好的精度. 从图 2 可以看出, 物体撞击梁的撞击力最大值为 119.71kN, 比撞击刚性墙的撞击力 150kN 小; 撞击时间为 51ms, 比撞击刚性墙的撞击时间 31.4ms 长, 这说明了由于梁柔性的作用, 使整个撞击体系的刚度减少, 从而导致撞击力减少, 撞击时间增长.

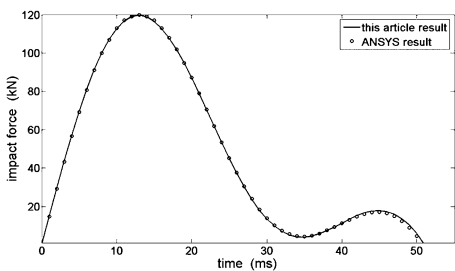


图 2 撞击力曲线

Fig. 2 Curves of impact loads

图 3 ~ 5 分别是位移、弯曲应力和剪力响应图, 从图中可以看出, 位移响应和弯曲应力响应都是呈正对称分布, 其最大位移和弯曲应力都在跨中. 而剪力响应呈反对称分布, 其剪力变化幅度最大的位置在两端边界上.

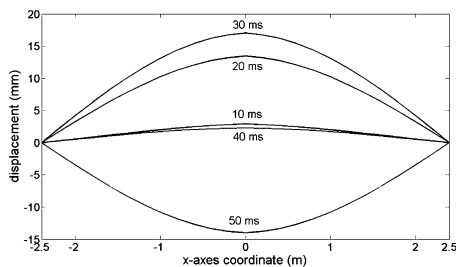


图 3 位移响应图

Fig. 3 Response of displacement

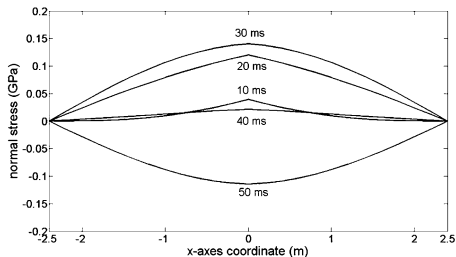


图 4 弯曲应力响应图

Fig. 4 Response of normal stress

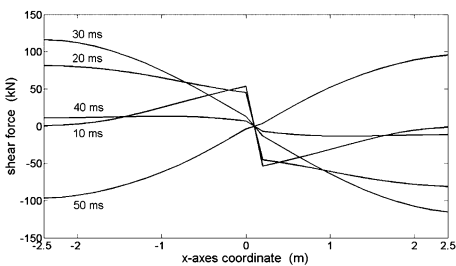


图 5 剪力响应图

Fig. 5 Response of shear force

3.2 参数影响分析

图 6 为撞击位置分别在梁长 1/2、2/5 和 1/5 位置的撞击力图, 从图中看可以看出, 撞击位置越靠近边界, 其最大撞击力越大, 撞击时间越短.

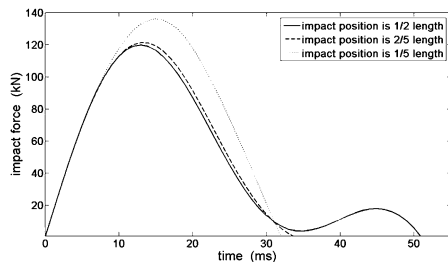


图 6 不同撞击位置的撞击力图

Fig. 6 Impact loads of different impact position

图 7 为轴压力分别为 0kN、2500kN、5000kN 和 7500kN 的撞击力图, 根据 Euler - Bernoulli 梁弯曲振动理论的特点^[13], 轴向压力可使梁的频率降低和刚度减小, 从图中可以看出, 随着轴压力的增大,

其最大冲击力略有减少,冲击时间也减少。

图8为冲击质量分别为250kg、500kg和750kg的冲击力图,从图中看可以看出,随着冲击质量的增大,其最大冲击力增大,冲击时间也增长。

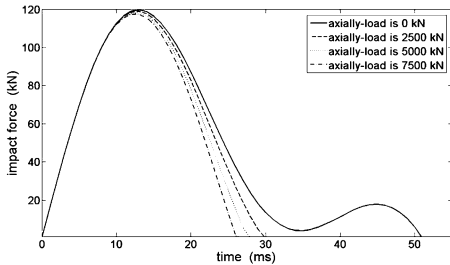


图7 不同轴压力的冲击力图

Fig.7 Impact loads of different axially-load

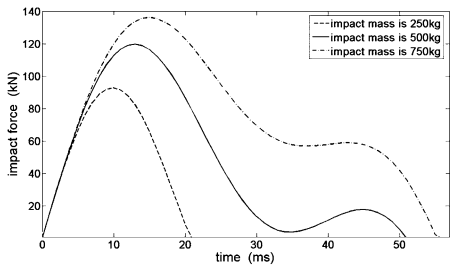


图8 不同冲击质量的冲击力图

Fig.8 Impact loads of different impact mass

图9为冲击速度分别为3m/s、5m/s和7m/s的冲击力图,从图中看可以看出,随着冲击速度的增大,其最大冲击力也随着线性增大,冲击速度与冲击时间无关。

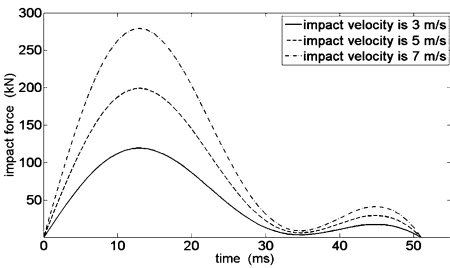


图9 不同冲击速度的冲击力图

Fig.9 Impact loads of different impact velocity

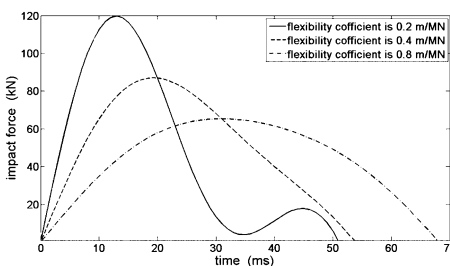


图10 不同柔度系数的冲击力图

Fig.10 Impact loads of different flexibility coefficient

图10为接触柔度系数分别为0.2m/MN、0.4m/MN和0.8m/MN的冲击力图,从图中看可以看出,随着柔度系数的增大,其最大冲击力减小,冲击时间增长。

4 结论

(1)通过对碰撞体系下 Euler - Bernoulli 梁的控制微分方程、边界条件和连续条件进行 Laplace 变换得到频域内的解析表达式,然后采用 Crump 逆变换方法进行数值反演,最后得到时域内的各种动力响应。数值算例中运用本文方法求解的结果与有限元解吻合得非常好,说明了本方法的正确性且有较高的精度。

(2)本文研究了冲击位置、轴向压力、冲击质量、冲击速度和柔度系数等参数对冲击力和冲击时间的影响,得出了一些有用的结论。

(3)本文方法可以研究冲击位置任意的预应力梁结构,还可以方便的对其边界条件进行修改,从而得到不同边界条件下各种动力响应的解答。

参 考 文 献

- 1 Timoshenko S, Young D H. Vibration problems in engineering. 2nd ed. New York: Van Nostrand, 1937: 348 ~ 358
- 2 Lee Y, Hamilton J F, Sullivan J W. The lumped parameter method for impact problems. *J Appl Mech*, 1983, 50: 823 ~ 827
- 3 B B Banerjee. Dynamic response of a multispan beam to transverse impact. *Nuclear Engineering and Design*, 1975, 34(3): 335
- 4 B V Sankar, C T Sun. An efficient numerical algorithm for transverse impact problems. *Computers and Structures*, 1985, 20(6): 1009 ~ 1012
- 5 鲍四元, 邓子辰. 利用 DMSM 方法求解弹性冲击恢复系数. 动力学与控制学报, 2005, 3(4): 44 ~ 49 (Bao Siyuan, Deng Zichen. Solution of the coefficient of restitution for elastic impact using DMSM. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4): 44 ~ 49 (in Chinese))
- 6 邢誉峰. 梁结构线弹性碰撞的解析解. 北京航空航天大学学报, 1998, 24(6): 633 ~ 637 (Xing Yufeng. Analytical solutions of linearly elastic impact of beams. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 1998, 24(6): 633 ~ 637 (in Chinese))

- 7 鲍四元,邓子辰,范存新. 质点与 Euler - Bernoulli 梁任意点撞击问题的解析解. 振动与冲击,2008,27(1):163 ~ 166 (Bao Siyuan, Deng Zichen, Fan Cunxin. Analytical solution to impact between a particle and an euler - bernoulli beam at arbitrary position on the beam. *Journal of Vibration and Shock*,2008,27(1):163 ~ 166(in Chinese))
- 8 盖秉政,黄剑敏. 论半无限长杆对有限长梁的横向弹性冲击问题. 应用力学学报,1996,13(4):28 ~ 34 (Gai Bingzheng, Huang Jiangmin. Transverse elastic impact of a half - infinite rod on a finite beam. *Chinese Journal of Applied Mechanics*,1996,13(4):28 ~ 34(in Chinese))
- 9 Crump K S. Numerical inversion of laplace transforms using a fourier series approximation. *J ACM*,1976,23(1):89 ~ 96
- 10 冯志刚,周建平. 基于直接数值积分的 Laplace 逆变换方法的比较研究. 应用数学与计算数学学报,1997,11(1):33 ~ 40(Feng Zhigang, Zhou Jianping. The comparison of numerical inversion methods of laplace transform relating to direct numerical integral. *Communication On Applied Mathematics and Computation*,1997,11(1):33 ~ 40 (in Chinese))
- 11 宋一凡. 公路桥梁动力学. 北京:人民交通出版社,2000:4 - 6 (Song Yifan. Highway bridges dynamics. Beijing:China Communications Press, 2000:4 ~ 6 (in Chinese))
- 12 张文. 弹性系统撞击响应的线化法. 固体力学学报,1981,8:317 ~ 324(Zhang Wen. Linearization of the impact of elastic systems. *Acta Mechanica Solida Sinica*,1981,8:317 ~ 324(in Chinese))
- 13 罗松南,杨敬林. 预应力混凝土梁桥在移动荷载作用下的动力响应分析. 应用力学学报,2008,25(1):103 ~ 106(Luo Songnan, Yang Jinglin. Dynamic response analysis of prestressed concrete beam bridge under moving load. *Chinese Journal of Applied Mechanics*,2008,25(1):103 ~ 106(in Chinese))

SOLUTIONS OF AXIALLY-LOADED BEAMS WITH LINEARLY ELASTIC IMPACT

Huang Zhibin^{1,2} Luo Qizhi²

(1. Faculty of Construction, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

(2. Department of Civil Engineering and Architecture, Foshan University, Foshan 528000, China)

Abstract The impact of axially-loaded Euler- Bernoulli beam with arbitrary impact position was investigated. The model of the impact system was simplified to a model of discrete concentrated masses linked with elastic elements. Firstly, based on the theory of integral transform, the differential equation of the collision system, the boundary conditions and the continuity conditions were transformed with Laplace transformation. Then, the analytical solution of the stress wave in frequency domain was obtained. The numerical inverse method was demonstrated by using the inversion of Laplace transformation with Crump, and the dynamic response in time domain was obtained. Curves of impact force, bending stress as well as shear varying with time were obtained by applying a numerical example, and this method was verified by comparing its results with those by using the finite element method. Finally, the effects of impact position, axially-load, impact mass, impact velocity and flexibility coefficient on the impact force was studied, and several useful conclusions were obtained.

Key words Euler- Bernoulli beam, impact, axially-loaded, arbitrary impact position, Laplace transformation, Crump method