第 6 卷第 4 期 2008 年 12 月
1672-6553/2008/06(4)/322-5
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 6 No. 4
Dec. 2008

求解弱非比例阻尼系统实模态解的阻尼矩阵摄动法*

周君求　彭跃社
(邵阳学院电气工程系,邵阳　422000)

摘要　提出了一种求解弱非比例阻尼振动系统实模态解的摄动方法和将非比拟阻尼矩阵分解为比例阻尼矩阵和余项阻尼矩阵的方法. 对于弱非比例阻尼振动系统,通过同时对阻尼矩阵和响应矢量进行小参数摄动,将原非比例阻尼系统分解为一系列的比例阻尼振动系统,在此基础上用正则模态变换将各阶比例阻尼的摄动方程解耦,从而求得原非比例阻尼振动系统的近似解析解. 计算实例表明,此方法的结果与数值计算结果十分吻合.

关键词　非比例阻尼,　阻尼矩阵摄动法,　实模态理论,　解耦

引言

非比例阻尼广泛存在于机械、电气设备与建筑结构振动中. 与比例阻尼体系不同的是,非比例阻尼系统的阻尼矩阵不满足对于体系无阻尼实模态的正交性,因而对一般非比例阻尼系统而言,实模态理论不再适用,而要用复模态理论进行求解[1,2]. 目前已建立了多种求解非比例阻尼系统的复模态解的方法,如复模态的实模态摄动法、实振型分解法和复模态矩阵摄动法等[1,3,4,5]. 但是,由于复模态分析方法涉及到复数运算尤其是复特征值求解,相对实模态理论来说比较复杂,因而在工程实际中应用不很普遍.

对于非比例阻尼系统来说,虽然传统的实模态方法已不适用,但它所具有的优点和复模态理论的不足又促使研究者们去寻找新的方法来替代复模态方法. 在工程实践中,最先建立的一种处理非比例阻尼系统的近似方法是用一个等效的对角阻尼矩阵来替代非比例阻尼矩阵,将原非比例阻尼系统转化为比例阻尼系统,从而可以用实模态理论进行求解. 这种方法的缺点是误差较大[6,7]. 此后,人们又建立了处理非比例阻尼系统的近似解耦法、拟力实模态叠加法、Ritz 向量法和高精度直接积分法及多尺度法等方法[8]. 本文首先建立了一种将非比例阻尼矩阵分解为比例阻尼矩阵和余项阻尼矩阵的方法,接着通过对弱非比例阻尼振动系统的阻尼矩阵和响应矢量的小参数摄动将原非比例阻尼系统转化为一个比例阻尼系统在初始条件下的自由振动和一系列的激励作用下的强迫振动问题,并对系统进行实模态变换解耦,从而求出系统的各阶解析摄动解. 本方法具有计算简便和精度较高的优点.

1　弱非比例阻尼系统的小参数摄动及解耦

1.1　阻尼矩阵的处理

设具有非比例阻尼振动系统的运动微分方程为

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\} \tag{1}$$

设初始条件为

$$\{x(0)\}=\{x_0\},\{\dot{x}(0)\}=\{\dot{x}_0\}=\{v_0\} \tag{2}$$

其中,$[M]$,$[K]$分别是系统的 $n\times n$ 阶质量和刚度矩阵,一般是正定的,而$[C]$是系统的非比例阻尼矩阵. 非比例阻尼的重要特征是引起主振型的耦合. 从物理上讲,非比例阻尼可看成有具有耗散能量的比例阻尼部分和在各自由度之间转换能量的非比例阻尼部分组成[8],即非比例阻尼矩阵可以表示成

$$[C]=[C_0]+[C_r] \tag{3}$$

其中

$$[C_0]=\alpha[M]+\beta[K],[C_r]=[C]-[C_0] \tag{4}$$

$[C_0]$代表非比例阻尼中起能量耗散作用的比例阻尼部分,是非比例阻尼矩阵的比例阻尼矩阵,而$[C_r]$是非比例阻尼中起能量转换作用的非比例阻尼部分,是非比例阻尼矩阵的余项阻尼矩阵. 已有

2008-05-08 收到第 1 稿,2008-07-28 收到修改稿.
* 国家自然科学基金(10672053)和湖南省自然科学基金(05JJ30003)资助项目

的将非比例阻尼矩阵分解为比例阻尼矩阵$[C_0]$和余项阻尼矩阵$[C_r]$的最经典的方法是分区瑞雷阻尼模型[9]. 本文中我们将利用实模态变换来分解非比例阻尼矩阵. 为此对方程(1)及其初始条件(2)作正则实模态变换

$$\{x\}=[A]\{x_N\} \tag{5}$$

得到

$$[I]\{\ddot{x}_N\}+[C_N]\{\dot{x}_N\}+[K_N]\{x_N\}=0 \tag{6}$$

$$\{x_N\}=[A]^{-1}\{x_0\},\{\dot{x}_N(0)\}=[A]^{-1}\{\dot{x}_0\} \tag{7}$$

其中,$[A]$是系统(1)无阻尼正则实模态矩阵,$\{x_N\}$是实模态向量,$[I]=[A]^T[M][A]$是单位矩阵,$[K_N]=[A]^T[K][A]$是模态刚度矩阵,为对角矩阵,$[C_N]=[A]^T[C][A]$为非比例阻尼的模态阻尼矩阵,一般是非对角矩阵. 由于比例阻尼的实模态矩阵是对角矩阵,因此将矩阵$[C_N]$分解为$[C_N]=[C_D]+[C_R]$,其中$[C_D]$是$[C_N]$的对角矩阵,是非比例阻尼中的比例阻尼部分的模态矩阵,$[C_R]$是$[C_N]$的非对角部分矩阵,是非比例阻尼中的非比例阻尼部分的模态矩阵,他们的计算式如下

$$[C_D]=\mathrm{diag}[C_N]=\mathrm{diag}[[A]^T[C][A]],$$
$$[C_R]=[C_N]-[C_D] \tag{8}$$

另一方面,将式(3)两边左乘$[A]^T$右乘$[A]$得到:$[C_N]=[C_{0D}]+[C_{rR}]$,其中,

$$[C_{0D}]=[A]^T[C_0][A],[C_{rR}]=[A]^T[C_r][A] \tag{9}$$

由于$[C_0]$包含了非比例阻尼$[C]$的全部比例阻尼部分,因而它必定是对角矩阵且$[C_{0D}]=\mathrm{diag}[C_N]=[C_D]$,再利用式(8)和(9),得到

$$[C_0]=[A]^{-T}[C_{0D}][A]^{-1}=[A]^{-T}[C_D][A]^{-1}=$$
$$[A]^{-T}(\mathrm{diag}[C_N])[A]^{-1} \tag{10}$$

由此确定了非比例阻尼系统(1)的比例阻尼矩阵,再由式(3)可求得余项阻尼矩阵$[C_r]$.

对于$[C_r]$的各元素c_{rij}远小于$[C_0]$的各元素c_{0ij},即模态阻尼矩阵$[C_N]$对角占优的情况,我们称为弱非比例阻尼,本文研究的就是这一情况. 对于弱非比例阻尼系统,比例阻尼的模态矩阵$[C_D]$是$[C_N]$的主部,而$[C_R]$是一小的摄动. 引入小参数ε($\ll 1$),将系统(1)的模态阻尼矩阵$[C_N]$展开成

$$[C_N]=[C_D]+\varepsilon[C_R] \tag{11}$$

1.2　非比例阻尼系统(1)的摄动解耦

将非比例阻尼模态矩阵的展开式(11)代入模态方程(6)得到

$$[I]\{\ddot{x}_N\}+[C_D]\{\dot{x}_N\}+[K_N]\{x_N\}=$$
$$-\varepsilon[C_R]\{\dot{x}_N\} \tag{12}$$

方程的左边代表一个比例阻尼系统,右边是微扰项. 方程(12)表明,通过对弱非比例阻尼系统的阻尼矩阵进行小参数摄动,可以将原非比例阻尼系统转换为一个受到非比例阻尼小扰动的比例阻尼系统.

根据小参数摄动法,设方程(6)的模态坐标的摄动解为

$$\{x_N\}=\{x_N^{(1)}\}+\varepsilon\{x_N^{(2)}\}+\varepsilon^2\{x_N^{(3)}\}+\cdots \tag{13}$$

将式(13)代入方程(6)和初始条件(7),并令方程两边ε的同次幂项的系数相等,我们得到

$$\begin{cases}[I]\{\ddot{x}_N^{(1)}\}+[C_D]\{\dot{x}_N^{(1)}\}+[K_N]\{x_N^{(1)}\}=0\\ \{x_N^{(1)}(0)\}=[A]^{-1}\{x_0\},\{\dot{x}_N^{(1)}(0)\}=[A]^{-1}\{\dot{x}_0\}\end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases}[I]\{\ddot{x}_N^{(2)}\}+[C_D]\{\dot{x}_N^{(2)}\}+[K_N]\{x_N^{(2)}\}=-[C_R]\{\dot{x}_N^{(1)}\}\\ \{x_N^{(2)}(0)\}=0,\{\dot{x}_N^{(2)}(0)\}=0\end{cases}$$
$$\cdots\cdots \tag{15}$$

$$\begin{cases}[I]\{\ddot{x}_N^{(n)}\}+[C_D]\{\dot{x}_N^{(n)}\}+[K_N]\{x_N^{(n)}\}=-[C_R]\{\dot{x}_N^{(n-1)}\}\\ \{x_N^{(n)}(0)\}=0,\{\dot{x}_N^{(n)}(0)\}=0\end{cases}$$
$$\cdots\cdots \tag{16}$$

上述各微分方程组的左边具有相同的形式. 方程(14)表示一个比例阻尼系统的在初值下的自由振动,摄动方程(15)和(16)各自描述比例阻尼系统的强迫振动. 至此,通过对系统(1)的阻尼矩阵$[C]$和响应矢量$\{x\}$进行小参数摄动,我们已将非比例阻尼系统在初值下的自由运动问题转化为一个比例阻尼系统在初值下的自由振动和一系列强迫振动的叠加问题,这正是我们所需要的结果.

由于上述微分方程左侧的系数矩阵都是对角矩阵,右侧的$\{x_N^{(1)}\},\{x_N^{(2)}\},\cdots\{x_N^{n}\},\cdots$均可由前一组方程求得,因而已完全解耦,将他们改写方程组的形式

$$\begin{cases}\ddot{x}_{Ni}^{(1)}+C_{Dii}\dot{x}_{Ni}^{(1)}+\omega_i^2x_{Ni}^{(1)}=0\\ x_{Ni}^{(1)}(0)=\sum_j A_{ij}^{-1}x_{0j},\dot{x}_{Ni}^{(1)}(0)=\sum_j A_{ij}^{-1}\dot{x}_{0j}\end{cases}$$
$$(i=1,2,\cdots) \tag{17}$$

$$\begin{cases}\ddot{x}_{Ni}^{(2)}+C_{Dii}\dot{x}_{Ni}^{(2)}+\omega_i^2x_{Ni}^{(2)}=-\sum_j C_{Rij}\dot{x}_{Nj}^{(1)}\\ x_{Ni}^{(2)}(0)=0,\dot{x}_{Ni}^{(2)}(0)=0\end{cases}$$
$$(i=1,2,\cdots) \tag{18}$$

$$\begin{cases}\ddot{x}_{Ni}^{(n)}+C_{Dii}\dot{x}_{Ni}^{(n)}+\omega_i^2x_{Ni}^{(n)}=-\sum_j C_{Rij}\dot{x}_{Nj}^{(n-1)}\\ x_{Ni}^{(n)}(0)=0,\dot{x}_{Ni}^{(n)}(0)=0\end{cases}$$
$$(i=1,2,\cdots) \tag{19}$$

其中，C_{Dii}，C_{Dij}，A_{ij}^{-1}分别是矩阵$[C_D]$，$[C_R]$，$[A]^{-1}$的元素. 方程组(17)是原非比例阻尼系统中具有比例阻尼子系统的各自由度无耦合的自由运动微分方程. 而方程组(18)和(19)则表示该子系统无耦合的强迫激励运动微分方程.

2 非比例阻尼系统的进似解析解

方程组(17)的解是

$$x_{Ni}^{(1)}=e^{-n_it}(F_{1i}^{(1)}\cos p_it+F_{2i}^{(1)}\sin p_it)\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{20}$$

其中

$$n_i=\frac{1}{2}C_{Dii},p_i=\sqrt{\omega_i^2-n_i^2}(i=1,2,\cdots,n)\tag{21}$$

$$F_{1i}^{(1)}=x_{Ni}^{(1)}(0),F_{2i}^{(1)}=\frac{\dot{x}_{Ni}^{(1)}(0)+n_ix_{Ni}^{(1)}(0)}{p_i}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{22}$$

将$\{x_N^{(1)}\}$的解(20)代入方程(18)得到

$$\ddot{x}_{Ni}^{(1)}+2n_i\dot{x}_{Ni}^{(2)}+\omega_i^2x_{Ni}^{(2)}=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}e^{-n_jt}(E_{1ij}\cos p_jt+E_{2ij}\sin p_jt)\ (i=1,2,\cdots,n)\tag{23}$$

式中

$$E_{1ij}=C_{Rij}F_{1j}^{(1)},E_{2ij}=C_{Rij}F_{2j}^{(1)}\tag{24}$$

这是一阻尼振子的强迫运动方程，初值为零，其解为

$$x_{Ni}^{(2)}=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}e^{-n_jt}(F_{1ij}^{(2)}\cos p_jt+F_{2ij}^{(2)}F_{2ij}\sin p_jt)\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{25}$$

式中

$$\begin{cases}F_{1ij}^{(2)}=\dfrac{(n_j^2-2n_in_j-p_j^2+\omega_i^2)E_{1ij}-2(n_i-n_j)p_jE_{2ij}}{(n_j^2-2n_in_j-p_j^2+\omega_i^2)^2+4(n_i-n_j)^2p_j^2}\\ F_{2ij}^{(2)}=\dfrac{(n_j^2-2n_in_j-p_j^2+\omega_i^2)E_{2ij}-2(n_i-n_j)p_jE_{1ij}}{(n_j^2-2n_in_j-p_j^2+\omega_i^2)^2+4(n_i-n_j)^2p_j^2}\end{cases}\quad\begin{pmatrix}i=1,2,\cdots,n\\ j=1,2,\cdots,n\\ i\neq j\end{pmatrix}\tag{26}$$

依此类推，不难求得其他各阶摄动解，第 n 阶摄动解如下

$$x_{Ni}^{(n)}=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}e^{-n_jt}(F_{1ij}^{(n)}\cos p_jt+F_{1ij}^{(n)}\sin p_jt)\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{27}$$

式中

$$\begin{cases}F_{1ij}^{(n)}=\dfrac{(n_j^2-2n_in_j-p_j^2+\omega_i^2)G_{1ij}-2(n_i-n_j)p_jG_{2ij}}{(n_j^2-2n_in_j-p_j^2+\omega_i^2)^2+4(n_i-n_j)^2p_j^2}\\ F_{2ij}^{(n)}=\dfrac{(n_j^2-2n_in_j-p_j^2+\omega_i^2)G_{2ij}-2(n_i-n_j)p_jG_{1ij}}{(n_j^2-2n_in_j-p_j^2+\omega_i^2)^2+4(n_i-n_j)^2p_j^2}\end{cases}\quad\begin{pmatrix}i=1,2,\cdots,n\\ j=1,2,\cdots,n\\ i\neq j\end{pmatrix}\tag{28}$$

其中

$$G_{1ij}=C_{rNij}F_{1j}^{(n-1)},G_{2ij}=C_{rNij}F_{2j}^{(n-1)}\tag{29}$$

至此，我们已求出所有摄动方程的解，将摄动方程的解(26)，(24)和(20)代入展开式(13)得到模态坐标 x_{Ni}的解为

$$x_{Nk}=\sum_l x_{Nk}^{(l)}=\sum_l\sum_{j=1,j\neq i}^{n}e^{-n_jt}(F_{1ij}^{(l)}\cos p_jt+F_{2ij}^{(l)}\sin p_jt)\tag{30}$$

略去表示小量的符号 ε，由模态变换方程(5)和展开式(13)我们得到非比例阻尼系统(1)在初始条件(2)下的近似解

$$\{x\}=[A]\{x_N\}=[A]\sum_i\{x_N^{(i)}\}\tag{31}$$

即

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}\sum_l x_{Nk}^{(l)}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}(F_{1k}^{(1)}\cos p_kt+F_{2k}^{(1)}\sin p_kt)+\sum_{l=2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}A_{ik}e^{-n_jt}(F_{1kj}^{(l)}\cos p_jt+F_{2ij}^{(l)}F_{2kj}\sin p_jt)\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{32}$$

当展开式(13)只取前两项，即$\{x_N\}=\{x_N^{(1)}\}+\varepsilon\{x_N^{(2)}\}$时，以上三式变成

$$x_{Ni}=x_{Ni}^{(1)}+x_{Ni}^{(2)}=\sum_{j=1}^{n}e^{-n_jt}(F_{1ij}\cos p_jt+F_{2ij}\sin p_jt)\tag{33}$$

其中，$F_{1ii}=F_{1i}^{(1)}$，$F_{2ii}=F_{2i}^{(1)}$，$F_{1ij}=F_{1ij}^{(2)}$，$F_{2ij}=F_{2ij}^{(2)}$，$(j\neq i)$

$$\{x\}=[A]\{x_N\}=[A]\{x_N^{(1)}+x_N^{(2)}\}\tag{34}$$

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}x_{Nk}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}\sum_{j=1}^{n}e^{-n_jt}(F_{1kj}\cos p_jt+F_{2kj}\sin p_jt)\tag{35}$$

3 误差分析

计算量和计算精度是表征近似方法优劣的重要指标. 我们通过以下的两个算例来分析本文所提出的阻尼矩阵摄动法的精度. 在两个算例中，数值结果是用求解常微分方程的线性多步法求得，而本文所建立的阻尼矩阵摄动法的计算结果是根据近似解表达式(33)求得.

算例 1 考虑一个三自由度非比例阻尼微分动力系统，运动微分方程和初始条件如下

$$\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \ddot{x}_3\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.35&-0.15&0\\-0.15&0.25&-1\\0&-0.1&0.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{Bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}4.5 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=0 \qquad \begin{Bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\\ x_3(0)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}\dot{x}_1(0)\\ \dot{x}_2(0)\\ \dot{x}_3(0)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

表 1　例 1 摄动法和数值方法的结果

Table 1　The results of the perturbation solution and the numerical solution in the example 1

time(s)		0	1	2	3	4	5	6	8	10	12	14	16	18	20
X_1	PS	1.00000	0.39176	-0.43576	-0.41642	-0.01893	0.03532	-0.01482	-0.22425	-0.49050	0.30593	0.14677	-0.06837	-0.06018	0.17609
	NS	1.00000	0.39176	-0.43572	-0.41637	-0.01899	0.03517	-0.01483	-0.22433	-0.49057	0.30589	0.14682	-0.06831	-0.06032	0.17619
X_2	PS	0.00000	0.35648	0.49724	-0.21448	-0.68684	-0.16021	0.42763	-0.39654	-0.11145	0.02323	0.45018	-0.16230	0.09388	-0.02846
	NS	0.00000	0.35648	0.49721	0.21449	-0.68675	-0.16012	0.42752	-0.39631	-0.11139	0.02310	0.45024	-0.16227	0.09386	-0.02852
X_3	PS	0.00000	0.02399	0.21026	0.46760	0.36897	-0.17189	-0.62378	0.02900	0.13397	0.03690	0.06593	0.46987	-0.00781	-0.35893
	NS	0.00000	0.02399	0.21027	0.46762	0.36899	-0.17188	-0.64587	0.02888	0.13395	0.03697	0.06586	0.46987	-0.00770	-0.35894

由近似解(33)所求得的数值结果和用线性多步法的数值方法的计算结果如表 1 所示

算例 2 在上例中,将阻尼增加到临界情况,即

$$C=\begin{bmatrix}3.2 & -1.2 & 0\\ -1.2 & 2.2 & -1.0\\ 0 & -1.0 & 1.0\end{bmatrix}.$$

表 2　例 2 摄动法和数值方法的结果

Table 2　The results of the perturbation solution and the numerical solution in the example 2

time(s)		0	1	2	3	4	5	6	8	10	12	14	16	18	20
X_1	PS	1.00000	0.55726	0.06118	-0.09732	-0.07664	-0.03225	-0.02489	-0.04058	-0.04308	−0.00439	0.02745	0.03150	0.01545	-0.00556
	NS	1.00000	0.55766	0.06297	-0.09609	-0.07782	-0.03555	-0.01820	-0.03937	-0.04292	−0.00499	0.02706	0.03147	0.01571	-0.00516
X_2	PS	0.00000	0.21745	0.26262	0.09305	-0.03380	-0.06638	-0.06945	-0.09543	-0.07630	-0.00283	0.05488	0.06174	0.02887	-0.01295
	NS	0.00000	0.21700	0.26051	0.09094	-0.03405	-0.06538	-0.06802	-0.09364	-0.07534	-0.00351	0.05333	0.06093	0.02911	-0.01192
X_3	PS	0.00000	0.05102	0.20252	0.27283	0.18646	-0.02575	-0.11008	-0.19116	-0.11758	-0.00560	0.08036	0.09765	0.05009	-0.01662
	NS	0.00000	0.05107	0.20263	0.27298	0.18709	-0.03705	-0.10873	-0.19159	-0.11875	-0.00670	0.07987	0.09796	0.05117	-0.01599

而其它参数和初始条件都和例 1 中的一样. 用本文的摄动方法和数值方法计算所得结果如表 2 所示.

从表 1 和表 2 可以看出,本文所提出的阻尼矩阵摄动法的计算结果和数值计算方法所得结果十分吻合,这就表明本文建立的摄动方法对于非比例阻尼系统具有很好的计算精度,即使系统处于临界阻尼状态时其计算结果也十分可靠.

4　结论

4.1 非比例阻尼系统是建筑、桥梁结构、机械、电气设备中常见的一类动力学系统. 本文提出了一种用模态变换法将非比例阻尼矩阵分解为比例阻尼矩阵和余项阻尼矩阵的方法. 当系统为弱非比例阻尼时,其比例阻尼可视为非比例阻尼的主部,而余项阻尼可看着一个小摄动,根据这一思想,可以将原弱非比例阻尼系统转化为一个受到小扰动的比例阻尼系统.

4.2 利用模态变换和对阻尼矩阵与模态坐标的摄动,可以将非比例阻尼振动系统分解为一个解耦的比例阻尼振动系统和一系列的受到强迫激励的解耦摄动比例阻尼系统. 分别求解这些解耦的比例阻尼系统,就可以得到非比例阻尼振动系统的近似解析解.

4.3 对各个算例的计算结果表明,用本文的矩阵摄动方法所求得的解与数值方法的结果非常吻合,本方法的精度相对于工程中常用的近似方法有很大的提高,因而,本方法是解决非比例阻尼工程结构十分有用.

参　考　文　献

1　楼梦麟,范么清. 求解非比例阻尼体系复模态的实模态摄动法. 力学学报,2007,39(1):112 ~ 118(M L Lou and

Y Q Fan. Modal perturbqtion method for obtaining complex modal characteristics of non-proportional damped systems. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechnics*, 2007, 39(1): 112 ~ 118(in Chinese))

2 秦金旗,唐驾时. 非比例结构阻尼系统的振动控制. 湖南大学学报(自然科学版),2007,34(10):49 ~ 52(Qin Jinqi, Tang Jiashi. Vibration control fpr non-proportionalstructure damping systems. *Journal of Hunan University*, 2007, 34(10):49 ~ 52(in Chinese))

3 杜永峰,李慧等. 非比例阻尼隔振结构地震响应的实振型分解法. 工程力学,2003,20(4):24 ~ 32(Du Yongfeng, Li Hui, at el. Real mode superposition methed for analysis of seismic response of non-proportionally damped isolated structure. *Engineering Mechanics*, 2003, 20(4): 24 ~ 32(in Chinese))

4 桂国庆,何玉敖. 非比例阻尼结构复摩态问题求解的矩阵摄动法. 同济大学学报(自然科学版),1996,24(6):613 ~ 618(Gui Guoqing, He Yu-ao. Matrix perturbation method for solving the complex modal problem of non-proportionally damped structures. *Journal of Tongji University*, 1996, 26(6):613 ~ 618(in Chinese))

5 徐伟华,刘济科. 阻尼系统振动分析的复模态矩阵摄动法. 中山大学学报(自然科学报),1998,37(4):50 ~ 54 (Xu Weihua, Liu Jike. Matrix perturbation method of complex modes in vibration analysis of damped system. *Journal of Zhongshan University*, 1998, 37(4): 50 ~ 54(in Chinese))

6 G Q GUI and Y A HE. Error investigation to approximately decoupling analysis of non-proportional damped structure. *Engineering Mechanics*, 1994, 11(4):40 ~ 45

7 J G Parter and R Singh. Quantification of the extent of non-proportional viscous damped in discrete vibration systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1986, 104(1):109 ~ 125

8 桂国庆,何玉敖. 非比例阻尼结构体系的动力分析方法. 同济大学学报,1994,22(4):506 ~ 510(Gui Guoqing, He Yu-ao. Study ondynamic analysis methods for non-proportionally damped structural systems. *Journal of Tongji University*, 1994, 22(4):506 ~ 510(in Chinese))

9 杜永峰,杜小妮,赵国藩. 用拉普拉斯变换方法求解非比例阻尼隔振结构. 兰州大学学报(自然科学版),2000,36(6):40 ~ 45(Du Yongfeng, Du Xiaoni, Zhao Guofan. Calculation of non-proportionally damped isolated structure by using Laplace transform method. *Journal of Lanzhou University (Natural sciences)*, 2000, 36(6):40 ~ 45(in Chinese))

DAMPING MATRIX PERTURBATION METHOD FOR SOLVING THE NON-PROPORTIONALLY DAMPED SYSTEMS *

Zhou Junqiu Peng Yueshe

(*Department of Electrical Engineering*, *Shaoyang University*, *Shaoyang* 422000, *China*)

Abstract A new method for resolving non-proportionally damping matrix into proportional damping matrix and remainder dampng matrix and a new method for solving non-proportionally damped systems were proposed respectively. After introducing the perturbation method in to the non-proportional damping matrix and response vector, the non-proportionally damped system was reduced to a series of proportionally damped systems, which can be decoupled by using modal transformation. Based on this, an approximatelly analytical solution was obtined. The examples show that the solution obtained by this method agrees very well with that by the numerical method.

Key words non-proportional damp, damping matrix perturbation, real modal theory, decouple

Received 8 May 2008, revised 28 July 2008.

* The project supported by the National Natural Science Foundation Of China (10672053) and Natural Science Foundation Of Hunan (Grant No. 05JJ30003)