

# 一类非自治混沌系统的自适应脉冲同步\*

张丽萍<sup>1,2</sup> 姜海波<sup>2</sup> 毕勤胜<sup>1</sup>

(1. 江苏大学理学院, 镇江 212013) (2. 盐城师范学院数学科学学院, 盐城 224051)

**摘要** 研究了一类具有未知 Lipschitz 常数的非自治混沌系统的自适应脉冲同步问题. 首先基于 Lyapunov 稳定性理论、自适应控制理论及脉冲控制理论设计了自适应控制器、脉冲控制器及参数自适应律, 然后利用推广的 Barbalat 引理, 理论证明响应系统与驱动系统全局渐近同步, 并给出了相应的充分条件. 两个数值仿真例子表明本方法的有效性.

**关键词** 混沌系统, 脉冲同步, 自适应同步

## 引言

由于混沌系统对初始条件的极端敏感性, 混沌在相当长的一段时间内被认为是既不可预测也无法控制. 20 世纪 90 年代以来, 人们在混沌的控制与同步等领域内的大量研究结果表明, 混沌不仅是可预测的, 也是可控制的, 而且在保密通信、图像处理等许多领域得到了很好的应用.

同步是一类非常基本的非线性现象. 自从 Pecora 和 Carroll 提出驱动-响应同步方法<sup>[1]</sup>, 各种不同的方法被应用到混沌系统的同步中, 如线性或非线性状态反馈控制<sup>[2]</sup>、自适应控制<sup>[3-6]</sup>等. 文献[5]研究了一类具有未知方向和相互耦合的非自治混沌系统的自适应同步问题.

由于在生物、经济、机械等众多领域中普遍存在脉冲与瞬动现象, 因此最近不确定脉冲动态系统的研究是当前的研究热点之一<sup>[7]</sup>. 根据脉冲时刻受时间或状态影响, 脉冲系统可分为依赖于时间脉冲系统和依赖于状态脉冲系统. 由于脉冲控制只需要很小的控制量就可以控制整个系统, 因而基于脉冲控制的混沌同步也越来越受到关注<sup>[8-10]</sup>. 文献[10]利用不变性原理给出了混沌系统的自适应脉冲同步方案. 文献[11]通过推广不变性原理, 给出了依赖于状态的非线性脉冲系统的自适应脉冲控制器的设计方案, 然而该结果不能运用到依赖于时间的非线性脉冲系统的自适应控制问题中.

在研究非线性系统的自适应控制问题中, Bar-

balat 引理是一个有效的工具. 然而它要求函数在  $[0, +\infty)$  上一致连续或在  $[0, +\infty)$  有界且其导数也有界, 所以它不能解决非线性脉冲系统的自适应控制问题. 本文把经典 Barbalat 引理推广到函数在某些离散点仅要求右连续的情形.

本文主要研究了一类具有未知 Lipschitz 常数的非自治混沌系统的自适应脉冲同步问题. 首先设计了自适应控制器、脉冲控制器及参数自适应律, 然后利用推广的 Barbalat 引理, 理论证明响应系统与驱动系统全局渐近同步. 最后通过两个仿真实例验证本方法的有效性.

## 1 问题描述

考虑如下非自治混沌系统

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1)$$

其中  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$  是系统状态向量,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T \in R^n$  是系统非线性向量函数. 我们称系统(1)为驱动系统.

**假设 1** 对于任意的  $x, y \in \Omega \subseteq R^n$ , 存在  $L > 0$ , 使得  $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$ .

**注 1** 假设 1 指函数满足一致 Lipschitz 条件, 大多数常见的混沌系统, 如 Lorenz 系统, Chen 系统等都满足这个条件. 尽管混沌系统是有界的, 但往往 Lipschitz 常数难以确定, 本文考虑  $L$  未知的情形.

我们构造如下响应系统

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t, y) + u(t, x, y), \quad t \neq t_k, \\ \Delta y &= U_k(t, x, y), \quad t = t_k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in R^n$  是响应系统状态向量,  $u(t, x, y) \in R^n$  是待设计的自适应控制器,  $U_k(t, x, y) \in R^n$  是待设计的脉冲控制器,  $\Delta y(t_k) = y(t_k^+) - y(t_k^-)$ ,  $y(t^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} y(t+h)$ ,  $y(t^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} y(t+h)$ , 脉冲时间序列  $\{t_k\}$  满足  $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$ , 并假设  $y(t_k^+) = y(t_k)$ , 即系统的解  $y(t)$  在  $t_k$  时刻右连续.

下面的问题是如何设计自适应控制器、脉冲控制器及参数自适应律使得响应系统(2)与驱动系统(1)全局渐近同步, 即  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e = \lim_{t \rightarrow +\infty} (y-x) = 0$ .

由(1)(2)得

$$\begin{aligned} \dot{e} &= f(t, y) - f(t, x) + u(t, x, y), t \neq t_k, \\ \Delta e &= U_k(t, x, y), t = t_k, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

设计如下自适应控制器

$$u(t, x, y) = -(\alpha + \hat{L})e \quad (4)$$

其中  $\alpha$  为大于零的常数. 参数  $\hat{L}$  用于逼近未知参数  $L$ , 它的自适应律为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{L}} &= \eta \|e\|^2, t \neq t_k \\ \Delta \hat{L} &= 0, t = t_k, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\eta > 0$  为自适应率.

设计如下脉冲控制器

$$U_k(t, x, y) = B_k e, k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

其中  $B_k \in R^{n \times n}$  为待设计的常量矩阵.

为了得到我们的主要结论, 下面给出如下定义和引理.

**定义 1**<sup>[7]</sup> 设  $V: R_+ \times R^n \rightarrow R_+$ , 称  $V$  是属于类  $\nu_0$ , 如果

(1)  $V$  在区间  $[t_{k-1}, t_k) \times R^n$  上都连续, 并对  $x \in R^n, k = 1, 2, \dots$ ,

$$\lim_{(t,y) \rightarrow (t_k^+, x)} V(t, y) = V(t_k^+, x)$$

存在;

(2)  $V$  在  $x \in R^n$  上符合局部 Lipschitz 条件.

令  $\dot{x} = f(t, x)$ , 我们定义 Lyapunov 函数的 Dini 导数.

**定义 2**<sup>[7]</sup> 对  $(t, x) \in [t_{k-1}, t_k) \times R^n, V \in \nu_0$ , 定义  $D^+ V(t, x) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [V(t+h, x+h f(t, x)) - V(t, x)]$

**引理 1** (推广的 Barbalat 引理) 设有一个序列  $\{x_k\}$  满足  $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots$  且  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = +\infty, \lambda = \inf_k \{x_k - x_{k-1}\} > 0$ . 设函数  $f(x)$  在

$[x_0, +\infty)$  上有定义且在  $[x_{k-1}, x_k)$  内可导. 若函数  $f(x)$  及  $\dot{f}(x)$  在  $[x_{k-1}, x_k)$  内对  $k$  一致有界, 即存在  $M_0, M_1, \forall x \in [x_{k-1}, x_k), k \in N$ , 均有  $|f(x)| \leq M_0, |\dot{f}(x)| \leq M_1$ , 且广义积分  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**证明**

因  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 令  $\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{M_1}, \frac{\lambda}{2} \right\}$ , 则  $\exists M = x_k > a, \bar{k} \in N$ , 使得当  $x'' > x' > M$  时, 有  $|\int_{x'}^{x''} f(t) dt| < \delta \varepsilon$ .

当  $x > M$  时, 不妨假设  $x \in [x_{k'-1}, x_{k'})$ ,  $k' \in N$ .

若  $x + \delta \leq x_{k'}$ , 则

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \frac{1}{\delta} \left| \int_x^{x+\delta} f(x) dt \right| \leq \frac{1}{\delta} ( \left| \int_x^{x+\delta} f(x) dt - \int_x^{x+\delta} f(t) dt \right| + \left| \int_x^{x+\delta} f(t) dt \right| ) \leq \\ &\frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} |f(x) - f(t)| dt + \varepsilon \end{aligned}$$

由于函数  $f(x)$  在闭区间  $[x, x + \delta]$  上连续, 在开区间  $(x, x + \delta)$  内可微, 则由 Lagrange 中值定理知, 至少存在一点  $\xi \in (x, x + \delta)$  使得  $f(x) - f(t) = f'(\xi)(x - t)$ , 其中  $t \in [x, x + \delta]$ . 所以

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\delta} \left| \int_x^{x+\delta} f'(\xi)(x - t) dt \right| + \varepsilon \leq$$

$$M_1 \delta + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

若  $x + \delta > x_{k'}$ , 则同理得

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \frac{1}{\delta} \left| \int_{x-\delta}^x f(x) dt \right| \leq \frac{1}{\delta} ( \left| \int_{x-\delta}^x f(x) dt - \int_{x-\delta}^x f(t) dt \right| + \left| \int_{x-\delta}^x f(t) dt \right| ) \leq \frac{1}{\delta} \int_{x-\delta}^x |f(x) - f(t)| dt + \varepsilon \leq M_1 \delta + \varepsilon \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

所以当  $x > M$  时,  $|f(x)| \leq 2\varepsilon$ . 从而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

## 2 主要结果

**定理 1** 考虑驱动系统(1), 响应系统(2), 若采用自适应控制器(4), 脉冲控制器(6), 参数的自适应律(5), 且满足如下条件

$$(a) \lambda = \inf_k \{t_k - t_{k-1}\} > 0,$$

$$(b) \lambda_{\max}((I + B_k)^T(I + B_k)) \leq 1, k = 1, 2, \dots,$$

则驱动系统(1)和响应系统(2)全局渐近同步, 即  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e = \lim_{t \rightarrow +\infty} (y - x) = 0$ .

证明 考虑如下 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2\eta}(\hat{L} - L)^2$$

当  $t \in [t_{k-1}, t_k]$  时, 对  $V$  求 Dini 导数, 并结合 (3) - (6) 式得

$$D^+ V = e^T \dot{e} + \frac{1}{\eta}(\hat{L} - L)\dot{\hat{L}} = e^T(f(t, y) - f(t, x)) - (\alpha + \hat{L})\|e\|^2 + (\hat{L} - L)\|e\|^2 \leq L\|e\|^2 - (\alpha + \hat{L})\|e\|^2 + (\hat{L} - L)\|e\|^2 = -\alpha e^T e \leq 0$$

当  $t = t_k$  时, 由条件(b)知

$$\Delta V = V(t_k) - V(t_k^-) = e^T[(I + B_k)^T(I + B_k) - I]e \leq 0$$

所以  $V$  在  $[0, +\infty)$  上单调减少, 又  $V \geq 0$ , 故  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t)$  存在. 根据 Cauchy 准则,  $\forall \varepsilon > 0, \exists M > a$ , 使得, 当  $t' > t'' > M$  时,  $V(t') - V(t'') < \varepsilon$ . 则

$$\alpha \int_{t'}^{t''} e^T e dt = \alpha \left( \int_{t'}^{t_{k_1}} e^T e dt + \int_{t_{k_1}}^{t_{k_2}} e^T e dt + \dots + \int_{t_{k_s}}^{t''} e^T e dt \right) \leq - \left( \int_{t'}^{t_{k_1}} D^+ V dt + \int_{t_{k_1}}^{t_{k_2}} D^+ V dt + \dots + \int_{t_{k_s}}^{t''} D^+ V dt \right) = V(t') - V(t_{k_1}) + V(t_{k_1}) - V(t_{k_2}) + \dots + V(t_{k_s}) - V(t'') = V(t') - V(t'') + V(t_{k_1}) - V(t_{k_1}) + \dots + V(t_{k_s}) - V(t_{k_s}) \leq V(t') - V(t'') < \varepsilon$$

由 Cauchy 准则知  $\alpha \int_0^{+\infty} e^T e dt$  收敛, 即  $\int_0^{+\infty} e^T e dt$  收敛. 由混沌系统的有界性易知  $e$  及  $\dot{e}$  在  $[t_{k-1}, t_k]$  上对  $k$  一致有界, 所以  $e^T e$  及  $e^T \dot{e}$  在  $[t_{k-1}, t_k]$  上对  $k$  一致有界, 又  $\int_0^{+\infty} e^T e dt$  收敛, 根据引理 1 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^T e = 0$ , 即  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e = 0$ .

### 3 数值仿真

#### 3.1 Lorenz 混沌系统的自适应脉冲同步

设驱动系统为 Lorenz 混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sigma(x_1 - x_2), \\ \dot{x}_2 = \gamma x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - b x_3 \end{cases}$$

其中  $\sigma = 10, \gamma = 28, b = \frac{8}{3}, x = (x_1, x_2, x_3)^T$ .

响应系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\sigma(y_1 - y_2) - (\hat{L} + \alpha)(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_2 = \gamma y_1 - y_2 - y_1 y_3 - (\hat{L} + \alpha)(y_2 - x_2), \\ \dot{y}_3 = y_1 y_2 - b y_3 - (\hat{L} + \alpha)(y_3 - x_3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} t \neq t_k, \Delta y = B_k e, t = t_k, \dot{\hat{L}} &= \eta \|e\|^2, \\ t \neq t_k, \Delta \hat{L} &= 0, t = t_k \end{aligned} \tag{7}$$

其中  $\alpha = 0.01, \eta = 1, y = (y_1, y_2, y_3)^T, e = y - x, B_k = -\text{diag}(0.1, 0.1, 0.1), \lambda = t_k - t_{k-1} = 0.05, k = 1, 2, \dots$ .

取  $x(0) = (10, 10, 10)^T, y(0) = (0, 0, 0)^T, \hat{L}(0) = 0$ , 步长为 0.025, 仿真结果如图 1-2 所示.

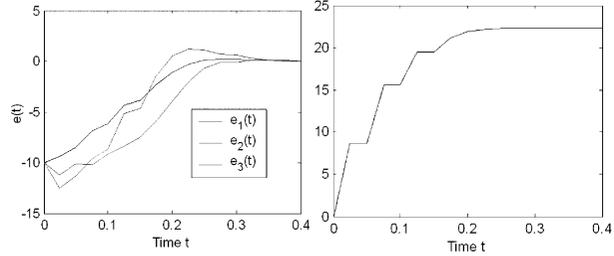


图 1 同步误差

图 2 参数时间序列图

Fig. 1 The synchronization error Fig. 2 The time histories of parameter

#### 3.2 Duffing 混沌系统的自适应脉冲同步

设驱动系统为 Duffing 混沌系统<sup>[5]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - (x_1)^3 - \delta x_2 + \gamma \cos \omega t \end{cases}$$

其中  $\delta = 0.25, \gamma = 0.4, \omega = 1, x = (x_1, x_2)^T$ .

响应系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 - (\hat{L} + \alpha)(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_2 = y_1 - (y_1)^3 - \delta y_2 + \gamma \cos \omega t - (\hat{L} + \alpha)(y_2 - x_2) \end{cases}$$
$$\begin{aligned} t \neq t_k, \Delta y = B_k e, t = t_k, \dot{\hat{L}} &= \eta \|e\|^2, \\ t \neq t_k, \Delta \hat{L} &= 0, t = t_k \end{aligned} \tag{8}$$

其中  $\alpha = 0.01, \eta = 1, y = (y_1, y_2, y_3)^T, e = y - x, B_k = -\text{diag}(0.1, 0.1, 0.1), \lambda = t_k - t_{k-1} = 0.05, k = 1, 2, \dots$ .

取  $x(0) = (1, 1)^T, y(0) = (0, 0)^T, \hat{L}(0) = 0$ , 步长为 0.25, 仿真结果如图 3-4 所示.

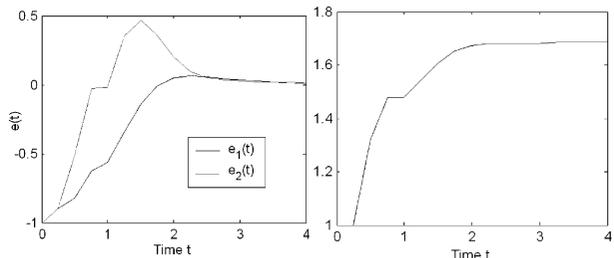


图 3 同步误差

图 4 参数时间序列图

Fig. 3 The synchronization error Fig. 4 The time histories of parameter

### 4 结论

本文研究了一类非自治混沌系统的自适应脉

冲同步问题. 利用推广的 Barbalat 引理, 理论证明响应系统与驱动系统全局渐近同步. Lorenz 和 Duffing 混沌系统的数值仿真说明所提出的自适应脉冲控制策略的有效性. 该混沌系统的未知非线性函数的 Lipschitz 常数无需已知且控制器的结构简单, 便于工程实现.

## 参 考 文 献

- 1 Pecoral L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems. *Physics Review Letters*, 1990, 64(8): 821 ~ 825
- 2 Chen G R, Yu X H. On time - delay feedback control of chaotic systems. *IEEE Transaction on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications*, 1999, 46(6): 767 ~ 772
- 3 刘福才, 宋佳秋. 一类参数不确定混沌系统的广义同步. *动力学与控制学报*, 2008, 6(2): 130 ~ 133 (Liu Fucui, Song Juaqiu. Generalized synchronization for a class of chaotic systems with unknown parameters. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(2): 130 ~ 133 (in Chinese))
- 4 单梁, 李军, 王执铨. 参数不确定 Liu 混沌系统的自适应同步. *动力学与控制学报*, 2006, 4(4): 338 ~ 343 (Shan Liang, Li Jun, Wang Zhiquan. Adaptive synchronization of Liu chaotic system with uncertain parameters. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(4): 338 ~ 343 (in Chinese))
- 5 Ge Z M, Chen Y S. Adaptive synchronization of unidirectional and mutual coupled chaotic systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 26(3): 881 ~ 888
- 6 Lei Y M, Xu W, Shen J W. Robust synchronization of chaotic non - autonomous systems using adaptive - feedback control. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, 31(2): 371 ~ 379
- 7 Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of impulsive differential equations. Singapore: World Scientific, 1989
- 8 Yang T, Yang L B, Yang C M. Impulsive synchronization of Lorenz systems. *Physics Letters A*, 1997, 226(6): 349 ~ 354
- 9 Sun J T, Zhang Y P, Wu Q D. Impulsive control for the stabilization and synchronization of Lorenz systems. *Physics Letters A*, 2002, 298(2 - 3): 153 ~ 160
- 10 Ren J S, Zhao J Y. Impulsive synchronization of coupled chaotic systems via adaptive - feedback approach. *Physics Letters A*, 2006, 355(4 - 5): 342 ~ 347
- 11 Haddad W M, Hayakawa T, Nersesov S G, Chellaboina V. Hybrid adaptive control for nonlinear uncertain impulsive dynamical systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Process*, 2005, 19(6): 445 ~ 469

# ADAPTIVE IMPULSIVE SYNCHRONIZATION FOR A CLASS OF NON-AUTONOMOUS CHAOTIC SYSTEMS\*

Zhang Liping<sup>1,2</sup> Jiang Haibo<sup>2</sup> Bi Qinsheng<sup>1</sup>

(1. Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

(2. School of Mathematics, Yancheng Teachers University, Yancheng 224051, China)

**Abstract** This paper investigated the adaptive impulsive synchronization for a class of non - autonomous chaotic systems with unknown Lipschitz constant. Firstly, based on the Lyapunov stability theory, adaptive control theory and impulsive control theory, the adaptive controller, the impulsive controller and the parametric update law were designed respectively. Then, by the generalized Barbalat's lemma, the global asymptotic synchronization between the drive system and the response system was proved, and some corresponding sufficient conditions were also obtained. Two numerical examples were given to show the effectiveness of the proposed method.

**Key words** chaotic systems, impulsive synchronization, adaptive synchronization

Received 18 June 2008, revised 14 July 2008.

\* The project supported by the Natural Science Foundation of China (20476041)