第 6 卷第 4 期 2008 年 12 月
1672-6553/2008/06(4)/307-5
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 6 No. 4
Dec. 2008

一个新的复混沌系统的动力学特性及其同步*

朱红兰[1]　张学兵[2]
(1. 淮阴工学院,淮安　223003)(2. 淮安信息职业技术学院,淮安　223003)

摘要　提出了一个新的复数形式的混沌系统,系统的研究了其对称性、耗散性、Lyapnov 指数和吸引子等基本动力学特性,接着根据无源控制原理设计控制器实现了混沌系统的同步,然后基于 Lyapunov 稳定性理论与无源控制原理从理论上证明了方法的有效性,最后又通过 matlab 软件对混沌同步系统进行数值仿真,仿真结果显示两个混沌很快很好地达到了同步,从而进一步验证了该方法的有效性和可行性.

关键词　复数混沌系统,　动力学特性,　同步

引 言

1963 年,lorenz 在一个简单的三维自治系统中首先发现了混沌吸引子,此后人们不断地发现新的混沌系统,混沌系统的动力学特性、控制与同步被广泛的研究. 这些研究往往都是针对实数混沌系统,而复数形式的混沌系统的许多性质还没有被广泛而深入的研究,最近文献[1]研究了提出了陈复数系统与吕复数系统并研究它们之间的同步问题.

由于混沌同步在保密通信、密码学、图像数据加密等方面的广泛应用,人们提出了很多混沌同步的方法,如反馈控制法[2]、耦合控制法[3],基于状态观测器[4]的混沌同步法、基于神经网络的同步法[5]等. 最近,基于无源控制的方法也被用来控制与同步混沌系统[6-7].

本文提出一个新的复数形式的混沌系统,采用自适应的方法讨论了同步问题,基于稳定性理论从理论上证明了方法的有效性,数值仿真的结果进一步验证了理论的正确性.

1　系统描述

最近 Guo 等在研究 LORENZ 系统时,在 LORENZ 系统的第一个状态变量上加上一个非线性项,从而发现一种新的混沌系统[8],形式如下:

$$\begin{cases}\dot{x}=a(y-x)+yz\\ \dot{y}=cx-y-xz\\ \dot{z}=xy-bz\end{cases}\tag{1}$$

其中 $a>0, b>0, c>0$. 该系统与 CHEN 系统,LORENZ 系统和 LU 系统有着不同的结构特点. 当参数 a,b,c 在一定的范围内取值时,系统的最大 Lyapunov 指数大于零,系统处于混沌状态,呈现出不同的混沌吸引子.

本文根据上述系统研究一个新的复数混沌系统,动力学方程如下:

$$\begin{cases}\dot{x}=a(y-x)+yz\\ \dot{y}=cx-y-xz\\ \dot{z}=\frac{1}{2}(\bar{x}y+x\bar{y})-bz\end{cases}\tag{2}$$

其中 $x=u_1+iu_2, y=u_3+iu_4$ 是复变量,$i=\sqrt{-1}$,$z=u_5$,是实变量. 对复数系统的虚实部进行分离,得到混沌系统的实数形式为

$$\begin{cases}\dot{u}_1=a(u_3-u_1)+u_3u_5\\ \dot{u}_2=u_4u_5+a(u_4-u_2)\\ \dot{u}_3=cu_1-u_3-u_1u_5\\ \dot{u}_4=cu_2-u_4-u_2u_5\\ \dot{u}_5=u_1u_3+u_2u_4-bu_5\end{cases}\tag{3}$$

这个系统具有以下的特点:

1)对称性

(i)系统是关于 u_5 轴对称的. 以$(-u_1,-u_2,-u_3,-u_4,u_5)$替换$(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)$代入(2)式,系统没有发生改变,由此可知它是关于 u_5 轴对称的.

(ii)系统关于 u_1,u_3,u_5 轴是对称的. 以$(u_1,-$

2008-05-05 收到第 1 稿,2008-05-24 收到修改稿.
* 淮阴工学院基金(HGQN0725)

$u_2, -u_3, -u_4, u_5$)替换(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)代入(2)式,系统没有发生改变,由此可知它是关于 u_1, u_3, u_5 轴对称的.

(*iii*)系统关于 u_2, u_4, u_5 轴是对称的. 以($-u_1, u_2, -u_3, u_4, u_5$)替换($u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$)代入(2)式,系统没有发生改变,由此可知它是关于 u_2, u_4, u_5 轴对称的.

2)耗散性

$$\Delta V = \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial u_2} + \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial u_3} + \frac{\partial \dot{u}_4}{\partial u_4} + \frac{\partial \dot{u}_5}{\partial u_5} = -2a-b-2,$$

只要 $-2a-b-2<0$ 系统就是耗散的. 它是指数的收敛到一个零测度集:$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = e^{-2a-b-2}$,即 $V(t) = V_0 e^{(-2a-b-2)t}$,其中 V_0 是系统体积的初始值.

3)系统的 Lyapnov 指数

根据 WOLF 法计算当参数 $a=35, b=10, c=25$ 时,选取初始值(1,1,1,1,1),得到系统的 Lyapunov 指数谱如图 1 所示. 可以看出随时间的演化,系统的五个 Lyapunov 指数都趋于一固定常数.

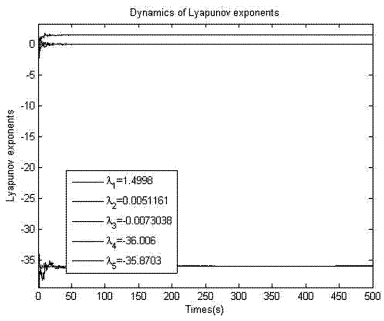

图 1 系统(3)的 Lyapunov 指数谱

Fig. 1 The Lyapunov exponent spectrum of the system(3)

由混沌理论可知,在状态空间混沌吸引子的相邻轨线之间呈现彼此排斥的趋势,并以指数速率相互分离,而 Lyapunov 指数正是定量描述轨线收缩和扩张的量. 计算得这个新系统的五个 Lyapunov 指数分别为 $\lambda_{L1}=1.4998, \lambda_{L2}=0.0051161, \lambda_{L3}=-0.0073038, \lambda_{L4}=-36.006, \lambda_{L5}=-35.8703$. 据此我们可以得到新系统的 Lyapunov 维数为

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^{j}\lambda_{Li}}{\left|\sum_{i=j+1}^{5}\lambda_{Li}\right|} = 2 + \frac{\lambda_{L1}+\lambda_{L2}}{|\lambda_{L3}+\lambda_{L4}+\lambda_{L5}|} = 2 + \frac{1.4998+0.0051161}{-0.0073038-36.006-35.8703} = 2.0209$$

由于系统的最大 Lyapunov 指数大于零,而且系统的 Lyapunov 维数不是整数,由此可以确定系统是混沌的.

4)系统的吸引子

当选择参数 $a=35, b=10, c=25$ 时,系统的混沌吸引子如图 2 所示.

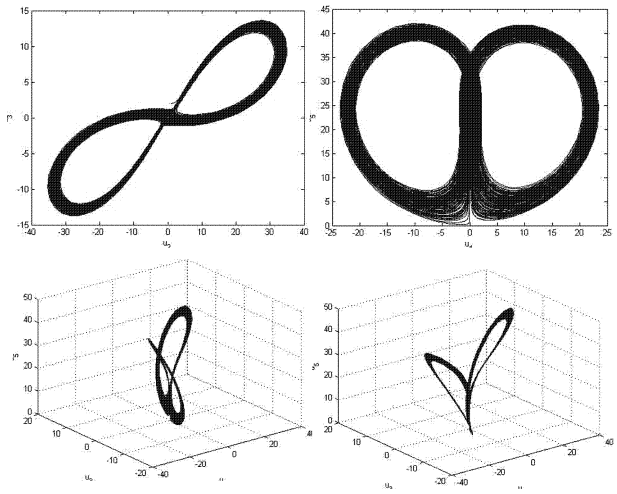

图 2 混沌系统的吸引子

Fig. 2 Chaotic attractor of the system

2 基于无源控制原理的系统的同步

2.1 无源控制原理

考虑以下的非线性控制系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad y = h(x) \tag{4}$$

其中 $x \in R^n, u, y \in R^m, g: R^n \to R^{n\times m}, h: R^n \to {}^m$. 这些函数是局部 Lipschitz 的,且 $f(0)=0, h(0)=0$.

定义 1 (Passivity)设非线性系统(4)的函数,$f(x)$ 和 $g(x)$ 存在,且均为光滑的向量场,$h(x)$ 为光滑映射,则对于任意的 $t \geqslant 0$,如果存在一个实常数 β,满足不等式

$$\int_0^t u^T(\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau \geqslant \beta \tag{5}$$

或者,存在 $\rho>0$ 和实常数 β,使不等式

$$\int_0^t u^T(\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau + \beta \geqslant \int_0^t \rho y^T(\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

成立则系统为无源系统.

或者,如果系统(4)存在连续可微的非负库函数 $V(x): X \to R, V(0)=0$ 或连续正定库函数 $V(x)$ 和 $S(x)$,对于 $\forall x \in X$,有

$$V(x) - V(0) \leqslant \int_0^t y^T(s)u(s)\mathrm{d}s \tag{7}$$

或

$$V(x) - V(0) = \int_0^t y^T(s)u(s)\mathrm{d}s - \int_0^t S(x(s))\mathrm{d}s \tag{8}$$

则系统(4)称为无源的或者称为严格无源的.

引理 1　如果非线性系统(4)为无源系统,其库函数 $V(x)$ 正定,且系统是局部零状态可检测的. 令 φ 为光滑函数,对于任意的非零 y 都存在 $y^T\varphi(y)>0$,则存在控制律 $u(t)=-\varphi(y)$,可以使系统在平衡点 $x=0$ 渐近稳定.

从引理 1 可以看出,如果系统为无源系统,必定存在一个控制器 $u(t)=-\varphi(y)$,使得无源系统在平衡点 $x=0$ 处是 Lyapunov 稳定的. 从这个思路出发,通过构造系统的控制器,使混沌系统由非无源系统等效为无源系统,从而实现系统在平衡点 $x=0$ 处的稳定.

对于系统(4),如果在平衡点 $x=0$ 处有关联度 $[1,\cdots,1]$,且 $L_gh(0)$ 是非奇异的,则系统可以表示为

$$\begin{cases}\dot{z}=f_0(z)+p(z,y)y\\ \dot{y}=b(z,y)+a(z,y)u\end{cases}\tag{9}$$

其中对于所有的 (z,y),$a(z,y)$ 在 $(0,0)$ 附近是非奇异的. 选择合适的控制器 u,系统(4)可以转化为无源系统,且能使系统(4)在平衡点是一致渐近稳定的.

2.2　新混沌系统的同步

现在我们来讨论混沌系统的同步问题. 驱动系统形式如下

$$\begin{cases}\dot{x}_1=a(y_1-x_1)+y_1z_1\\ \dot{y}_1=cx_1-y_1-x_1z_1\\ \dot{z}_1=\dfrac{1}{2}(\bar{x}_1y_1+x_1\bar{y}_1)-bz_1\end{cases}\tag{10}$$

其中 $x_1=u_{11}+iu_{21}$,$y_1=u_{31}+iu_{41}$ 是复变量,$z_1=u_{51}$ 为实变量. 响应系统的形式为

$$\begin{cases}\dot{x}_2=a(y_2-x_2)+y_2z_2+(v_1+iv_2)\\ \dot{y}_2=cx_2-y_2-x_2z_2+(v_3+iv_4)\\ \dot{z}_2=\dfrac{1}{2}(\bar{x}_2y_2+x_2\bar{y}_2)-bz_2+v_5\end{cases}\tag{11}$$

其中 $x_2=u_{12}+iu_{22}$,$y_1=u_{32}+iu_{42}$,$z_2=u_{52}$,v_1+iv_2,v_3+iv_4,v_5 是待设计的控制器,控制驱动系统和响应系统的同步.

为了确定待设计的控制器,定义误差状态变量

$$\begin{cases}e_{u_1}+ie_{u_2}=x_2-x_1=(u_{12}-u_{11})+i(u_{22}-u_{21})\\ e_{u_3}+ie_{u_4}=y_2-y_1=(u_{32}-u_{31})+i(u_{42}-u_{41})\\ e_{u_5}=z_2-z_1=u_{52}-u_{51}\end{cases}\tag{12}$$

系统(11)减去系统(10)可得误差系统为

$$\begin{cases}\dot{e}_{u_1}+i\dot{e}_{u_2}=-ae_{u_1}+(a+u_{51})e_{u_3}+e_{u_3}e_{u_5}+u_{31}e_{u_5}+\\ \quad i(-ae_{u_2}+(a+u_{51})e_{u_4}+e_{u_4}e_{u_5}+u_{41}e_{u_5})+(v_1+iv_2)\\ \dot{e}_{u_3}+i\dot{e}_{u_4}=(c-u_{51})e_{u_1}-e_{u_3}-e_{u_1}e_{u_5}-u_{11}e_{u_5}+i((c-\\ \quad u_{51})e_{u_2}-e_{u_4}-e_{u_2}e_{u_5}-u_{21}e_{u_5})+(v_3+iv_4)\\ \dot{e}_{u_5}=e_{u_1}e_{u_3}+u_{31}e_{u_1}+u_{11}e_{u_3}+e_{u_2}e_{u_4}+\\ \quad u_{21}e_{u_4}+u_{41}e_{u_2}-be_{u_5}+v_5\end{cases}\tag{13}$$

对误差系统进行虚实部分离,误差系统转化为

$$\begin{cases}\dot{e}_{u_1}=-ae_{u_1}+(a+u_{51})e_{u_3}+e_{u_3}e_{u_5}+u_{31}e_{u_5}+v_1\\ \dot{e}_{u_2}=-ae_{u_2}+(a+u_{51})e_{u_4}+e_{u_4}e_{u_5}+u_{41}e_{u_5}+v_2\\ \dot{e}_{u_3}=(c-u_{51})e_{u_1}-e_{u_3}-e_{u_1}e_{u_5}-u_{11}e_{u_5}+v_3\\ \dot{e}_{u_4}=(c-u_{51})e_{u_2}-e_{u_4}-e_{u_2}e_{u_5}-u_{21}e_{u_5}+v_4\\ \dot{e}_{u_5}=e_{u_1}e_{u_3}+u_{31}e_{u_3}+u_{11}e_{u_3}+e_{u_2}e_{u_4}+\\ \quad u_{21}e_{u_4}+u_{41}e_{u_2}-be_{u_5}+v_5\end{cases}\tag{14}$$

选择控制器 $v_1=-(a+u_{51})e_{u_3}$,$v_2=-(a+u_{51})e_{u_4}$,$v_3=-(c-u_{51})e_{u_1}$,$v_4=-(c-u_{51})e_{u_2}$,$v_5=U$,则误差系统(14)可以写为

$$\begin{cases}\dot{e}_{u_1}=-ae_{u_1}+e_{u_3}e_{u_5}+u_{31}e_{u_5}\\ \dot{e}_{u_2}=-ae_{u_2}+e_{u_4}e_{u_5}+u_{41}e_{u_5}\\ \dot{e}_{u_3}=-e_{u_3}-e_{u_1}e_{u_5}-u_{11}e_{u_5}\\ \dot{e}_{u_4}=-e_{u_4}-e_{u_2}e_{u_5}-u_{21}e_{u_5}\\ \dot{e}_{u_5}=e_{u_1}e_{u_3}+u_{31}e_{u_3}+u_{11}e_{u_3}+e_{u_2}e_{u_4}+\\ \quad u_{21}e_{u_4}+u_{41}e_{u_2}-be_{u_5}+U\end{cases}\tag{15}$$

现在要使驱动系统和响应系统能够一致同步,只要设计控制器 U,使得误差系统(15)在零点是一致渐近稳定的. 有如下定理

定理 1　当控制器 $U=-e_{u_1}e_{u_3}-2u_{31}e_{u_1}-e_{u_2}e_{u_4}-2u_{41}e_{u_2}+(b-\alpha)e_{u_5}$ 时,则误差系统(15)是无源系统,在零点是一致渐近稳定的.

证明:令 $Z_1=e_{u_1}$,$Z_2=e_{u_2}$,$Z_3=e_{u_3}$,$Z_4=e_{u_4}$,$Y=e_{u_5}$,则误差系统(15)可写为

$$\begin{cases}\dot{Z}_1=-aZ_1+(a+u_{51})Z_3+Z_3Y+u_{31}Y\\ \dot{Z}_2=-aZ_2+(a+u_{51})Z_4+Z_4Y+u_{41}Y\\ \dot{Z}_3=(c-u_{51})Z_1-Z_3-Z_1Y-u_{11}Y\\ \dot{Z}_4=(c-u_{51})Z_2-Z_4-Z_2Y-u_{21}Y\\ \dot{Z}_5=Z_1Z_3+u_{31}Z_1+u_{11}Z_3-Z_2Z_4+\\ \quad u_{41}Z_2+u_{21}Z_4-bY+U\end{cases}\tag{16}$$

根据无源控制原理有

$$\begin{cases}\dot{z}=f_0(z)+p(z,y)y\\ \dot{y}=b(z,y)+a(z,y)U\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}f_0(z)=[-aZ_1,-aZ_2,-Z_3,-Z_4]^T\\ p(z,y)=[u_{31}+Z_3,u_{41}+Z_4,-Z_1-u_{11},-Z_2-u_{21}]^T\\ b(z,y)=Z_1Z_3+u_{31}Z_1+u_{11}Z_3-Z_2Z_4+\\ \quad u_{41}Z_2+u_{21}Z_4-bY\\ a(z,y)=1\end{cases}\tag{17}$$

选择库函数

$$V(z,y)=W(z)+y^2/2\tag{18}$$

其中 $W(z)=(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)/2$,是一个 Lyapunov 函数,且 $W(0)=0$. 则 $W(z)$ 的全导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(z)=\frac{\partial}{\partial z}W(z)f_0(z)=[Z_1,Z_2,Z_3,Z_4]\times[-aZ_1,-aZ_2,-Z_3,-Z_4]^T=-aZ_1^2-aZ_2^2-Z_3^2-Z_4^2\leq 0\tag{19}$$

因为 Lyapunov 函数 $\dot{W}(z)\leq 0$,所以 $f_0(z)$ 是一致渐近稳定的,则 $L_gh(0)=1\neq 0$ 是非奇异的.

函数 $V(z,y)$ 关于误差系统(15)的全导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(z,y)=\frac{\partial}{\partial z}W(z)\dot{z}+y\dot{y}=\frac{\partial}{\partial z}W(z)f_0(z)+\frac{\partial}{\partial z}W(z)p(z,y)y+(b(z,y)+a(z,y)u)y\tag{20}$$

因为 $\frac{\partial}{\partial z}W(z)f_0(z)\leqslant 0$,所以由(20)式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(z,y)\leqslant\frac{\partial}{\partial z}W(z)p(z,y)y+(b(z,y)+a(z,y)u)y\tag{21}$$

选择控制器

$$U=\beta^{-1}(z,y)\times[-b(z,y)-\frac{\partial}{\partial z}W(z)p(z,y)-\alpha y+\eta]=-Z_1Z_3-2u_{31}Z_1-Z_2Z_4-2u_{41}Z_2+bY=-e_{u_1}e_{u_3}-2u_{31}e_{u_1}-e_{u_2}e_{u_4}-2u_{41}e_{u_2}+(b-\alpha)e_{u_5}\tag{22}$$

其中 α 是一个正的实数,η 是一个外部信号输入. 由此,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(z,y)\leqslant\eta Y-\alpha Y^2\tag{23}$$

令 $\eta=0$,对上式两边同时积分可得

$$V(z,y)-V(z_0,y_0)\leqslant-\int_0^t\alpha Y^2(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{24}$$

令 $\beta=V(z_0,y_0)$,因为 $V(z,y)\geqslant 0$,所以我们有

$$\beta\geqslant\int_0^t\alpha Y^2(\tau)\mathrm{d}\tau+V(z,y)\geqslant\int_0^t\alpha Y^2(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{25}$$

根据最优控制原理,(25)式满足定义 1,所以误差系统(15)在控制器(22)的作用下转变为无源系统,并且在零点是一致渐近稳定的,因此驱动系统(10) 和响应系统(11)实现了同步. 定理得证.

3 数值仿真

本节通过 matlab 软件,采用四阶 Runge-Kutta 算法对同步系统进行仿真,取步长为 0.01,取驱动系统的参数为 $a=35,b=10,c=25$,反馈增益 $\alpha=1$,驱动系统(10)与响应系统(11)的初始值分别取为$(x_1(0),y_1(0),z_1(0))=(1+i,1+i,1+i)$与$(x_2(0),y_2(0),z_2(0))=(1.5+1.5i,1.5+1.5i,1.5+1.5i)$,因此误差系统的初始值为$(e_{u_1}+ie_{u_2},e_{u_3}+ie_{u_4},e_{u_5})=(0.5+0.5i,.5+0.5i,0.5)$. 驱动系统(10)响应系统(11)间的同步的数值仿真如图 3 所示.

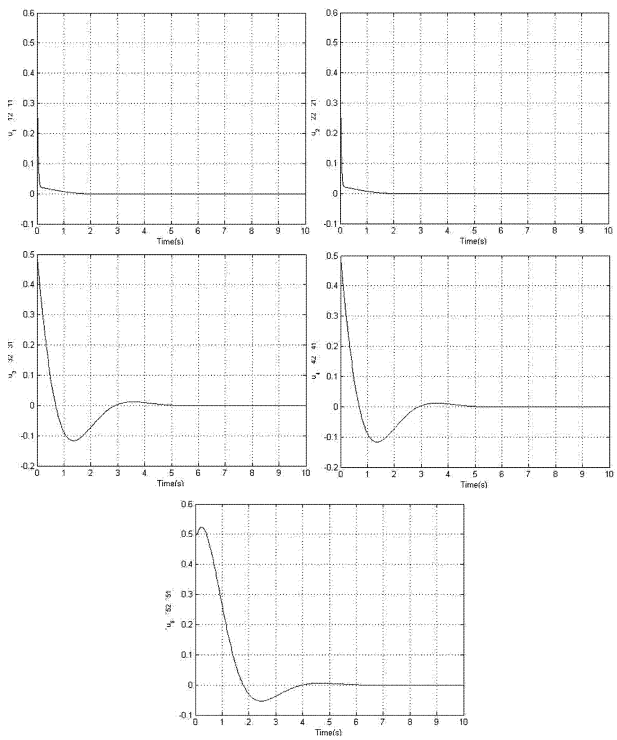

图 3 驱动系统与响应系统的同步误差曲线

Fig. 3 Synchronization error curve drive system and response system

从图 3 可以看出同步误差随时间的变化很快趋于零值. 驱动与响应系统很好的达到了同步.

4 结论

本文提出了一个新的复数形式的混沌系统,分析了其基本性质、Lyapunov 指数和 Lyapunov 维数,理论上的动力学分析和数值仿真都验证了系统的

混沌特性. 接着根据无源控制原理,设计控制器实现了混沌系统的同步. 通过选取适当的参数以及初始值进行仿真,数值仿真结果标明了该方法简单,易于操作,且控制效果良好,收敛的速度快,在实际工程中有广泛的应用价值.

参 考 文 献

1 Gamal M. Mahmoud, Tassos Bountis. Chaos synchronization of two different chaotic complex Chen and Lü systems. *Nonlinear Dynamics*, 2008, 51: 171 ~ 181

2 欧阳克俭,秦金旗,唐驾时. Lorenz 系统的线性反馈控制. 动力学与控制学报, 2006, 3(9): 227 ~ 233 (Ouyang Kejian, Qin Jinqi, Tang Jiashi. Linear state feedback control for lorenz system. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 3(9): 227 ~ 233 (in Chinese))

3 王兴元,古丽孜拉,王明军. 单向耦合混沌同步及其在保密通信中的应用. 动力学与控制学报, 2008, 1(3): 40 ~ 44 (Wang Xingyuan, Gulzila, Wang Mingjun. Chaos synchronization VIA unidirectional coupling and its application to secure communication. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 1(3): 40 ~ 44 (in Chinese))

4 李克,杨绿溪,何振亚. 基于非线性观测器的离散驱动混沌同步. 自动化学报, 2001, 27(2): 280 ~ 283 (Li Ke, Yang Luxi, He Zhenya. Sporadic driving chaos synchronization based on nonlinear observer. *Acta Autom atica Sinica*, 2001, 27(2): 280 ~ 283 (in Chinese))

5 Ma W, Wang Z O. A new chaotic parameters annealing neural network for solving global optimization problems. *Communication in Theoretical Physics*, 2003, 39 (4): 385 ~ 392

6 Wang D W, Luo X S. Passivity – based adaptive control of chaotic oscillations in power system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, 31: 665 ~ 671

7 Cui B T, Hua M G. Observer – based passive control of linear time – delay systems with parametric uncertainty. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, 32: 160 ~ 167

8 Qi G Y, Chen G R. Analysis of a new chaotic system. *Physica A*, 2005, 352: 295 ~ 308

DYNAMICAL ANALYSIS OF A NEW COMPLEX CHAOTIC SYSTEM AND ITS SYNCHRONIZATION *

Zhu Honglan[1]　Zhang Xuebing[2]

(1. *Huaiyin Institute of Technology*, *Huaian*　223003, *China*)

(2. *Huaian college of Information Technology*, *Huaian*　223003, *China*)

Abstract　A new complex chaotic system was presented . Some of its basic dynamical properties, such as symmetry, dissipation, Lypanov exponents and chaotic attractors, were studied. The synchronization was achieved through design controller based on the passive control. The validity of this synchronous method was theoretically proved by Lyapunov method and the passive control theoty. Finally, a simulation was conducted with Matlab to prove the synchronization of the complex chaotic system. Simulation results show that the synchronization can be achieved quickly and well.

Key words　complex chaotic system,　dynamical properties,　synchronization

Received 5 May 2008, revised 24 May 2008.

* The project supported by Huaiyin Institute of Technology (HGQN0725)