

基于改进 Trefftz 解析法的封闭空腔噪声有源控制*

范成高 陈南 张肃

(东南大学机械工程学院, 南京 210096)

摘要 研究因结构激励导致的不规则形状的车厢封闭空腔声场. 利用改进 Trefftz 方法, 对复杂形状的车厢空腔进行声学系统简化波函数建模. 结合声固耦合关系, 利用加权残数法处理边界条件, 得出该声压稳态响应的波函数级数展开式, 并给出了中低频噪声场的分析预测解. 结合有源声控制理论, 建立了复杂封闭腔体局部区域有源消声模型, 并利用 Matlab 工具进行了数值仿真分析. 仿真结果表明降噪效果良好, 也证明了此方法的可行性.

关键词 Trefftz 封闭空间, 主动控制, 声固耦合

引言

对较复杂形状的封闭空腔内噪声的控制, 如汽车车厢内的中低频噪声控制, 由于其具有很大的实用价值, 一直受到众多研究者的关注. 有源控制方法的有效实施极大的有赖于对声固耦合作用的深入分析. 目前, 解决声固耦合的方法不外乎数值解和分析解^[1-4]. 数值解主要有有限元法、边界元法、声弹性法等. 这些基于单元离散的数值解的主要优点是可以适用于各种空间形状, 但很难作为一个表达清晰的数学模型来应用. 分析解的主要优势恰恰相反, 其表达精炼, 模型参数意义明确, 能够作为明确的数学模型在目前很方便使用的各类优化算法中应用, 来达到声场评价和噪声控制的目标. 但由于数学方法的困难, 以往只能对一些规则的形状和边界条件求得形式完美的分析解. 因此, 针对于那些比较复杂几何形状的封闭空腔, 寻求其空间声场精确的分析解, 长期是众多声学研究者的追求, 也具有相当的难度.

能求取复杂几何形状的封闭空腔声场的分析解近期也有所发展, 如覆盖域法^[5], 它的参数意义比较的明确, 对于复杂腔的通用性比较好, 但我们通过实践发现, 该法计算收敛性速度比较慢.

本文以屈列夫斯(Trefftz)法^[6]为基础, 发展改进方法, 对复杂形状的车厢空腔进行声学系统简化建模, 利用波函数叠加解进行场变量的插值表达,

结合声固耦合关系, 利用加权残数法处理边界条件, 导出了稳态声压波函数表达的插值系数矢量应满足的线性代数方程, 解方程获得插值系数矢量, 以获得空腔内声场的波函数分析解. 并结合有源控制^[7], 建立了复杂封闭腔体局部区域有源消声模型, 进行了仿真分析, 降噪效果良好.

1 系统建模

设一具有弹性板的封闭空间如图1, 板A为矩形弹性板且四边固支, 其余面为刚性面. 令腔体表面积为 $\Omega = \Omega_0 + \Omega_s$, Ω_0 表示刚性壁表面, Ω_s 表示弹性壁表面. 其中弹性板A上作用一个集中力F, 位置在S, 板A在力F的作用下振动成为辐射声源, 而声辐射和封闭空间内各边界导致的反射混响组成封闭空间内声场. 系统的运动涉及到板A的振动和空腔中声压的波动, 以及它们之间的相互作用.

考虑简谐激励情况, 声压分布 $P(r)$ 应满足 Helmholtz 方程(1)及封闭空间边界条件(2):

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{j}{p_0 \omega} \frac{\partial p(r_0)}{\partial n} = 0 & (r_0 \in \Omega_0) \\ \frac{j}{p_0 \omega} \frac{\partial p(r_s)}{\partial n} = j\omega u(r_s) & (r_s \in \Omega_s) \end{cases} \quad (2)$$

式中, ∇^2 为拉普拉斯算子; $k = \omega/c_0$, ω 为激振频率, c_0 、 p_0 分别表示声媒介处于平衡时的声速和密度.

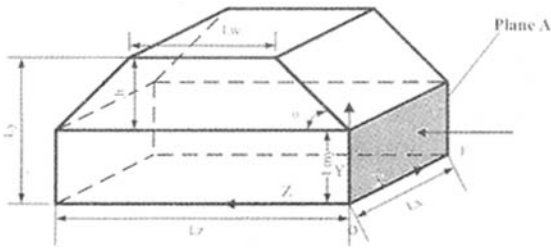


图 1 车室空腔声学系统几何模型

Fig. 1 A 3D car-like cavity

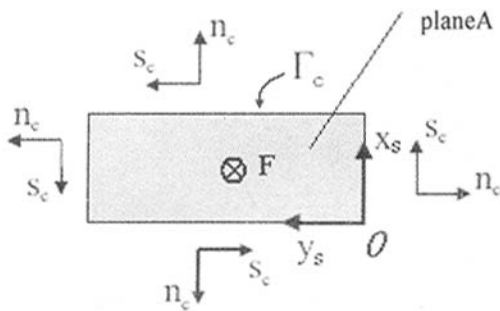


图 2 弹性板边界的切向和法向

Fig. 2 Normal and tangential direction at the plate edges

作为封闭空腔边界的弹性板(图 2),板上 (x_f, y_f) 处作用有集中力 F , 则结构位移 w 应满足 Kirchhoff 板振动方程(3)及板边界条件(4):

$$\nabla^4 u(x_s, y_s) - k_b^4 u(x_s, y_s) = \frac{F\delta(r_f) + P(x_s, y_s, \rho)}{D} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u(r_c) = 0 \\ \frac{\partial u(r_c)}{\partial n_c} = 0 \end{cases} \quad r_c \in \Gamma_c \quad (4)$$

其中 ∇^4 为重调和算子 $k_b^4 = \rho_s h \omega^2 / D$, ρ_s 为钢板密度 h 为钢板厚度 $D = Eh^3(1 + \eta) / 12(1 - \nu^2)$ 为板的抗弯刚度 E 为弹性模量 ν 为泊松比 η 为结构损失系数 Γ_c 为弹性板边界, 设为固支。

2 改进 Trefftz 方法

考虑声固耦合效应的 Trefftz 方法是假设腔体稳态声压和结构位移都由波函数和插值系数矢量组成的级数表达, 各波函数分别满足控制微分方程(1)、(3), 并不满足边界条件(2)、(4), 由此利用边界条件形成误差函数, 定义误差函数在边界区域内的加权积分正交条件, 建立插值系数方程并求解, 进而可确定腔内声压的稳态值。

2.1 声压表达式

先不考虑式(2)的边界条件, 用最小长方体去覆盖不规则的腔体(如图 3), 利用长方体的规则波函数可以得出不规则腔体的声压近似解 P^* 。

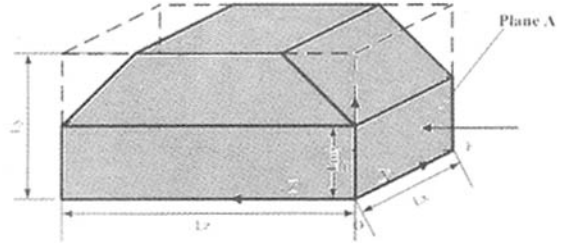


图 3 最小覆盖长方体

Fig. 3 the smallest bounding box enclosing the cavity

$$p(x, y, z) \approx P^*(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x, y, z) p_i = \Phi P \quad (5)$$

这里 Φ_i 是最小覆盖长方体的声波函数, 它们都满足控制方程(1), 而 $\Phi = \{\Phi_1 \dots \Phi_n\}$, $P = \{P_1 \dots P_n\}^T$ 是级数表达要求的待定系数矢量, 因此 P^* 满足控制方程(1), 可证明以下形式的 Φ_i 满足要求:

$$\Phi_i(x, y, z) = e^{-j(k_{xi}x + k_{yi}y + k_{zi}z)} \quad (6)$$

其中, $k_{xi}^2 + k_{yi}^2 + k_{zi}^2 = k^2$ 。

2.2 结构位移表达式

不考虑边界条件(4), 则板 A 的结构位移表达式可表示为:

$$u(x_s, y_s) \approx w^*(x_s, y_s) = \sum_{i=1}^m \psi_i(x_s, y_s) w_i +$$

$$\sum_{i=1}^n w_i^p(x_s, y_s) p_i + w_f^f(x_s, y_s) = \psi w + w_p^p p + w_f^f \quad (7)$$

其中 $(x_s, y_s) \in \Omega_s$, $\psi = \{\psi_1 \dots \psi_m\}$, 各 ψ_i 为弹性板 A 的结构波函数 $w = \{w_1 \dots w_m\}^T$ 为板响应位移级数表达的待定系数矢量 $w_p^p = \{w_1^p \dots w_n^p\}$, 各 w_i^p 为方程(3)在板面均布压力下的响应特解, w_f^f 为受集中载荷响应特解, 由此所得 w^* 满足结构控制方程式(3), 有:

$$\psi(x_s, y_s) = e^{-j(k_{xi}x_s + k_{yi}y_s)} \quad (8)$$

$$w_i^p(x_s, y_s) = \frac{\Phi_i(x_s, y_s, \rho)}{D [k_{xi}^4 + 2k_{xi}^2 k_{yi}^2 + k_{yi}^4 - k_b^4]} \quad (9)$$

$$w_f^f(x_s, y_s) = \frac{-jF}{8k_b^2 D} [H_0^{(2)}(k_b r_{sf}) - H_0^{(2)}(-jk_b r_{sf})] \quad (10)$$

其中 $r_{sf} = [(x_s - x_f)^2 + (y_s - y_f)^2]^{1/2}$; $H_0^{(2)}(r) =$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{-j(\pi/2 - \pi/4)} \quad \text{式中}$$

$$k_{xi}^2 + k_{yi}^2 = k_b^2.$$

2.3 声固耦合建模

现在 $P^*(x, y, z)$ 与准确值边界条件存在的误差为

$$\begin{cases} R_0(r_0) = \frac{j}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p^*(r_0)}{\partial n} - 0 & (r_0 \in \Omega_0) \\ R_s(r_s) = \frac{j}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p^*(r_s)}{\partial n} - j\omega w^*(r_s) & (r_s \in \Omega_s) \end{cases} \quad (11)$$

选用权系数为 \hat{P} , 设余量的加权正交积分为:

$$\int_{\Omega_0} \hat{P}(r) R_0(r) d\Omega + \int_{\Omega_s} \hat{P}(r_s) R_s(r_s) d\Omega = 0 \quad (12)$$

一般可选 $\hat{P} = P^*$. 将(6)、(7)和(11)代入(12)以使得积分残差最小的方法得到如下关于待定系数的代数方程:

$$\begin{bmatrix} A_{nn} + C_{nn} & C_{nm} \\ C_{mn} & A_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_n \\ f_m \end{Bmatrix} \quad (13)$$

式中矩阵 A_{nn} 、 C_{nn} 以及 C_{nm} 分别为:

$$A_{nn} = \frac{j}{\rho_0 \omega} \int_{\Omega} \Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\Omega \quad (14)$$

$$C_{nm} = -j\omega \int_{\Omega_s} \Phi^T \psi d\Omega \quad (15)$$

$$C_{mn} = -j\omega \int_{\Omega_s} \Phi^T w_s^p d\Omega \quad (16)$$

$$f_n = \int_{\Omega_s} \Phi^T w_F^p d\Omega \quad (17)$$

w^* 在边界条件上存在的误差为:

$$\begin{cases} R_\omega(r_c) = w^*(r_c) - 0 \\ R_\theta(r_c) = \frac{\partial w^*(r_c)}{\partial n} - 0 \end{cases} \quad (18)$$

选用权系数为 \hat{w} , 定义余量的加权正交积分为:

$$\int_{\Gamma_c} (L_Q(\hat{w})R_\omega + L_m(\hat{w})R_\theta) d\Gamma = 0 \quad (19)$$

其中 $L_m = -D \left(\frac{\partial^2}{\partial n_c^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial s_c^2} \right)$, $L_Q = -D \frac{\partial}{\partial n_c} \left(\frac{\partial^2}{\partial n_c^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial s_c^2} \right)$, 可选 $\hat{w} = \sum_{i=1}^m \psi_i(x_s, y_s) w_i = \psi W$. 将(7)和(18)代入到方程(19)中去, 同样利用积分残差最小准则可以得到:

$$\begin{bmatrix} C_{mn} & A_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_m \end{Bmatrix} \quad (20)$$

式中矩阵 A_{mm} 、 C_{mn} 以及 f_m 分别为:

$$A_{mm} = \int_{\Gamma_s} (L_Q(\psi^T)\psi + L_m(\psi^T)L_\theta(\psi)) d\Gamma \quad (21)$$

$$C_{mn} = \int_{\Gamma_s} (L_Q(\psi^T)w_s^p + L_m(\psi^T)L_\theta(w_s^p)) d\Gamma \quad (22)$$

$$f_m = - \int_{\Gamma_c} (L_Q(\psi^T)w_F^f + L_m(\psi^T)L_\theta(w_F^f)) d\Gamma \quad (23)$$

其中 $L_\theta = \frac{\partial}{\partial n_c}$.

合并(13)和(20)的方程组, 得包括声固耦合效应的待定系数的求解方程:

$$\begin{bmatrix} A_{nn} + C_{nn} & C_{nm} \\ C_{mn} & A_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_n \\ f_m \end{Bmatrix} \quad (24)$$

解(24)求得待定系数矢量 P 和 W , 得到级数表达的封闭腔体的声压分布分析解.

2.4 数值计算和实验结果及分析

建立图1所示的仿真模型, 其几何形状类似于轿车驾驶室. 取板 $L_x = 1.2\text{m}$, $L_y = 1.21\text{m}$, $L_z = 2.1\text{m}$, $L_w = 1.2\text{m}$, $h = 0.6\text{m}$, $\alpha = 45^\circ$. 刚性壁材料为密度板,

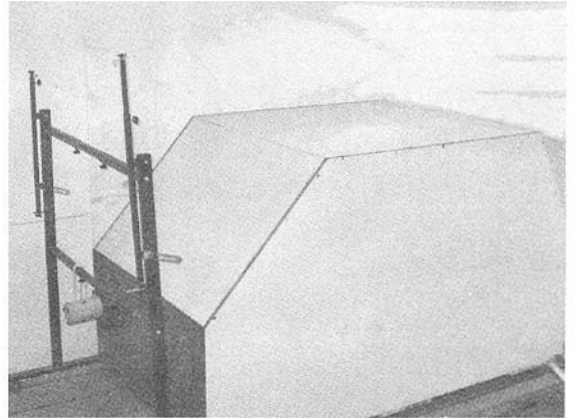


图4 声压预测实验结构图

Fig. 4 Experiment structure for sound prediction

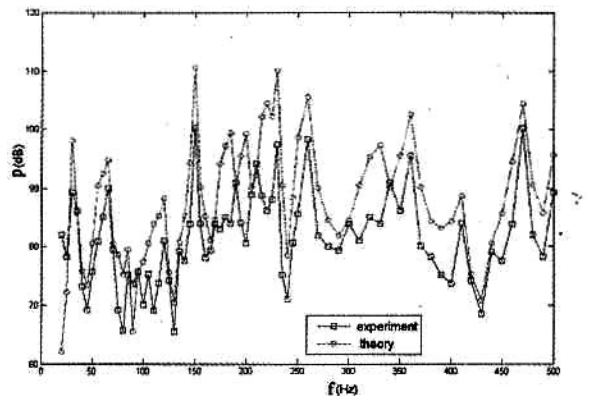


图5 声压和频率的关系

Fig. 5 The relationship between sound and frequency

厚度 18mm 弹性板为钢板, 厚度 0.8mm, 空气密度 1.29kg/m^3 , 声速 340m/s . 激励力为 $F = 1\text{N}$, 坐标为 $(0.6 \ 0.3)$. 测量点的位置为 $(0.6 \ 0.3 \ 0.4)$. 应用本文提出的方法计算了腔体在单点激励 $(20 \sim 500\text{Hz})$ 下的车室腔内的内部声场, 并对理论计算进行了实验验证.

计算时取 $n = 30 \ m = 12$. 在测量点的位置的计算结果见图 5.

实验时, 将传声器固定在可调高度的三角架上, 传声器的导线通过密度板的一个小孔引出来, 然后将小孔用木胶密封好. 用激振器施加 1N 的力. 试验台架如图 4 所示.

测量与计算的结果进行了比较. 由图 5 可见, 测量结构和理论计算结果大体吻合.

3 基于解析法的有源控制模型

有源控制的目标函数可以有多种, 当我们考虑封闭空间声场时, 声势能 E_p 更适合用来衡量全局声压的量. 考虑到三维封闭空间低频噪声的有源控制. 当声场处于稳定状态时, 如果忽略直达声, 则声场中任一观察点 r 处的声压可以用无限多个声模态叠加表示, 略去简谐时间因子 $e^{-j\omega t}$, 根据式 (5) 有:

$$p(r) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(r) p_i = \Phi P \quad (25)$$

本文在封闭空间声场中取声势能最小化作为目标控制函数, 然而, 布置传感器仅仅能获得传感器位置处的声压情况, 并不能反映整个声场的实际情况, 仅最小化离散探测点处的声场并不能保证整个腔体内全局声场的衰减会有最好结果. 要获得更多的声场信息, 需要布置更多的传感器, 这就需要更多的通道来处理数据, 在实际中是不可行的. 对于一个给定的声源排列获得最大程度的全局声场衰减水平是可能的, 但必须在根据一些全局误差标准来重新表示该问题. 由于声势能中仅包含声场声压, 在实际中易于测量, 因此我们一般选取总的时间平均声势能为目标控制函数, 即:

$$J_p = E_p = \frac{1}{4\rho_0 c_0^2} \int_v |p(r, \omega)|^2 dr \quad (26)$$

利用模态函数矢量的正交性, 即

$$\frac{1}{V} \int_v \Phi^T(r) \Phi(r) dV = 1 \quad (27)$$

式中 V 为封闭空间体积. 则式 (26) 有:

$$J_p = \frac{V}{4\rho_0 c_0} \sum_{n=1}^N |p_n(\omega)|^2 \quad (28)$$

设引入 M 个次级声源, 它们的强度分别为 q_{sm} ($m = 1 \ 2 \ \dots \ M$). 当初、次级声源共同作用时, 模态函数是相同的, 均为 Φ_i , 模态幅度分别为 P_{pn} 和 P_{sn} ($n = 1 \ 2 \ \dots \ N$). 叠加后的声场其模态幅度与次级声源强度的关系是:

$$p_n = p_{pn} + p_{sn} = p_{pn} + \sum_{m=1}^M B_{nm} q_{sm} \quad (29)$$

其中 B_{nm} 是第 m 个次级声源至观察点的 n 阶声传输阻抗. 上式用矢量形式可表示为

$$p = p_p + Bq_s \quad (30)$$

式中 B 为 $N * M$ 阶声传输阻抗矩阵. 将上式代入式 (25) 得到初、次级声场叠加后的声压, 有

$$p(r) = \Phi p = \Phi(p_p + Bq_s) \quad (31)$$

将式 (31) 代入到式 (28) 中并整理, 有

$$J_p = \frac{V}{4\rho_0 c_0} (q_s^H B^H B q_s + q_s^H B^H P_p + P_p^H B q_s + P_p^H P_p) \quad (32)$$

可以看出, 封闭空间中总的时间平均声势能是次级声源强度 q_s 的二次函数. 由于 $B^H B$ 为对称正定矩阵, 我们可以找到唯一的一组次级声源复强度矢量 q_{s0} , 使得 J_p 最小.

4 仿真计算及其结果分析

同样取 $L_x = 1.2\text{m} \ L_y = 1.21\text{m} \ L_z = 2.1\text{m} \ L_w = 1.2\text{m} \ h = 0.6\text{m} \ \alpha = 45^\circ$. 刚性壁材料为密度板, 厚度 18mm, 弹性板为钢板, 厚度 0.8mm, 空气密度 1.29kg/m^3 , 声速 340m/s . 激励力为 $F = 1\text{N}$, 坐标为

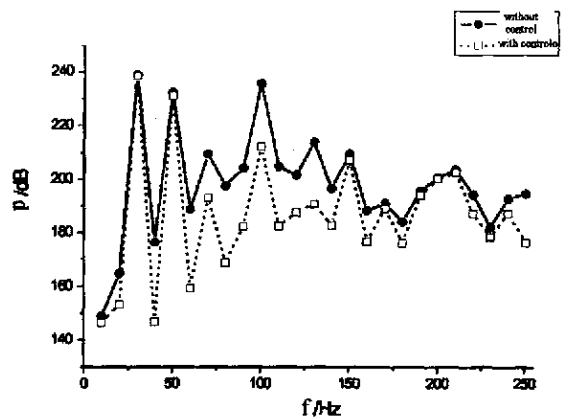


图 6 局部控制比较

Fig. 6 Partial control result

(0.6 0.3), 引入2个次级声源 $S_1(0.2 \ 0.3 \ 0.4)$, $S_2(0.6 \ 0.3 \ 0.4)$. 局部控制区域大概在车内乘员头部区域. 取八个轮廓点作为采样点, 按上述模型, 在10Hz~250Hz频率范围内, 每隔10Hz计算得到控制前和控制后的时空均方声压和频率的关系如图6.

4 结论

利用波动方程、薄板振动方程以及屈列夫斯(Treffitz)法可建立不规则腔体的声固耦合方程, 得到分析解. 利用本文推导的理论公式建立有源控制模型, 计算表明有很好控制效果. 计算速度也比有限元快, 证明了理论的正确性, 这为进一步研究非规则封闭腔体的噪声主动控制问题提供了坚实的基础.

参 考 文 献

- Hagiwara I, Wang D W, Shi Q Z, Rao R S. Reduction of noise inside a cavity by piezoelectric actuators. *J Vibration and Acoustic*, 2003, 125: 13~17
- Evertine Gordon C, Henderson Francis M. Coupled finite element/boundary element approach for fluid-structure interaction. *J. Acoust. Soc. Am*, 1990, 87: 5~12
- Langley RS. Some perspectives on wave-mode duality in SEA. IUTAM Symposium on Statistical Energy Analysis, 1997: 1~12
- 洪嘉振, 尤超蓝. 刚柔耦合系统动力学研究进展. 动力学与控制学报, 2004, 2(1): 3~8 (Hong Jiazhen, You Chaolan. Advance in dynamics of rigid-flexible coupling system. *Journal of Dynamics and Control* 2004, 2(1): 3~8 (in Chinese))
- J H Wu, H L Chen, X L Hu. Method to calculate interior sound field of arbitrary-shaped closed thin shell. *Acta Acustica* 2000, 25: 468~471
- Kita E, Kamiya N. Trefftz method: an overview. *Adv Engng Software*, 1995, 24: 3~12
- 谢建良, 陈南, 钟秉林. 封闭空间中结构声辐射的有源力控制研究. 振动工程学报, 1999, 12(1): 15~20 (Xie Jianliang, Chen Nan, Zhong Binglin. Active structure force control in the enclosed cavity. *Vibration Engineering*, 1999, 12(1): 15~20 (in Chinese))

ENCLOSED CAVITY NOISE ACTIVE CONTROL BY ADVANCED TREFFTZ ANALYTIC METHOD*

Fan Chenggao Chen Nan Zhang Su

(College of Mechanical Engineering, Southeast University, Nanjing, 210096, China)

Abstract Sound field in a car's irregular enclosed cavity under structural excitation was researched by the advanced Trefftz analytic method. Combining with the acoustic structure coupling and using a weighted residual formulation to deal with the boundary condition, the analytical solution expression of the progression expanded wave function was obtained, and the prediction analysis solution at mid-low frequency was given. The active noise control model for the cavity was established. The feasibility of the method was proved by mathematical simulation result using Matlab.

Key words Trefftz, enclosed cavity, active noise control, acoustic structure coupling