

参数不确定 Liu 混沌系统的自适应同步*

单 梁 李 军 王 执 铨

(南京理工大学自动化学院,南京 210094)

摘要 在研究单变量驱动同步的基础上,应用自适应控制理论,研究了当系统存在一个或多个不确定参数时,Liu混沌系统的同步问题.通过Lyapunov函数,推导了不同参数未知情况下误差系统渐进稳定的充分条件.仿真结果证明了自适应控制律能够快速辨识系统参数,并实现两个Liu混沌系统的状态同步.

关键词 Liu混沌系统,同步控制,自适应同步

引言

混沌是非线性动力学系统所特有的一种运动形式,它广泛地存在于自然界的各个领域.自从Lorenz混沌吸引子被发现后,掀起了一股揭示混沌现象、研究混沌理论的热潮.1999年陈关荣发现了Chen混沌系统^[1-2],2002年吕金虎和陈教授合作,先后发现了Lü混沌系统和统一混沌系统^[3].2004年刘崇新等^[5]发现了新的Liu混沌系统.Liu系统是一个三维连续混沌系统,属于广义Lorenz系统^[4].文献^[6,7]已经利用反馈控制方法实现了Liu系统的同步控制.

混沌同步是混沌研究领域中的一个重要方向.1990年驱动-响应同步成功实现混沌同步后,反馈控制法^[6,7]、耦合控制法^[8]也逐渐被用于同步混沌系统.近年来,基于状态观测器^[9]的混沌同步法、广义同步法^[10]、基于神经网络的同步法^[11]、基于T-S模糊模型的同步法^[12]等都广泛应用在各种混沌系统的同步控制中.以上各种方法大多以参数和结构确定的混沌系统作为研究对象设计同步方法;当系统中某些参数未知时,混沌系统的敏感性将造成系统状态极大的差异,反馈控制法、耦合控制法等往往会同步失败.由于自适应控制具有修正自身特性以适用对象和扰动等变化的特点,被应用于参数未知的混沌同步控制中.文献^[13-16]利用自适应方法研究了Henon系统、Chua系统、Rossler系统和Chen系统的同步控制.目前对于三维系统的

研究主要只考虑系统线性项参数未知的情况.

本文深入分析研究了Liu混沌系统的结构特点,首先提出了Liu混沌系统的单变量驱动同步法.单变量驱动法构造的响应系统结构简单,易于实现,同步速度较快.接着考虑Liu系统中某些参数特别是非线性项参数未知情况下的自适应同步问题.通过误差系统的Lyapunov函数的严格推导,得到同步的充分条件,并设计出参数辨识和系统同步的自适应控制律.仿真实验取得了令人满意的结果,从而证实了自适应同步方法的有效性与可行性.

1 Liu混沌系统的单变量驱动-响应同步

Liu混沌系统是一个三维连续自治系统^[5],其数学模型为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = bx_1 - kz_1 \\ \dot{z}_1 = -cz_1 + hx_1^2 \end{cases} \quad (1)$$

式中 a, b, c, h, k 为系统参数.当 $a=10, b=40, c=2.5, k=1, h=4$ 时系统(1)处于混沌状态,此时具有三个不稳定的平衡点: $S_0(0, 0, 0), S_1(5, 5, 40)$ 和 $S_2(-5, -5, 40)$ 系统的Lyapunov指数为 $(1.64328, 0, -14.142)$.

驱动-响应同步方法是最早提出的混沌同步方法,它是其他所有同步方法的基础,最早由Pecora和Carroll提出,也叫做PC同步法.其基本思想是用一个混沌系统的输出作为信号去驱动另一个

混沌系统来实现这两个混沌系统的同步. 用其中一个混沌系统去驱动另一个混沌系统的含义是指两个系统是单向耦合的. 第一个系统决定第二个系统的行为, 而第二个系统的行为却不受第一个系统的影响.

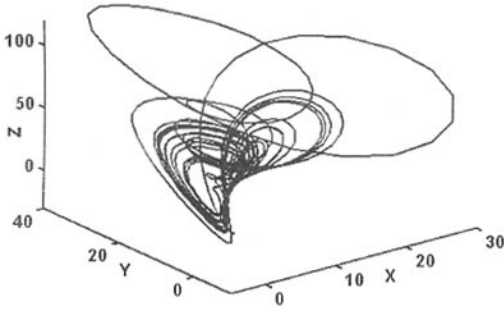


图 1 Liu 混沌系统的吸引子

Fig. 1 The attractor of Liu chaotic system

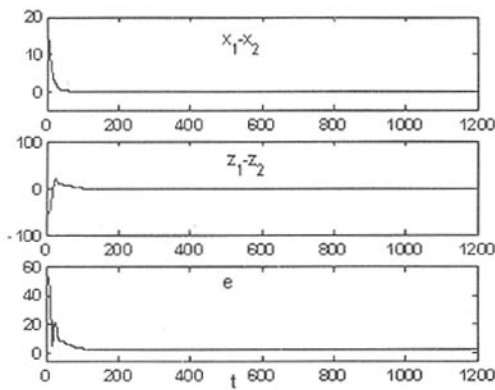


图 2 单变量驱动同步误差曲线图

Fig. 2 Synchronization error plot of single-variable drive

针对系统(1)考虑使用单变量驱动方法, 选取 y_1 作为驱动信号, 构造相应的响应系统为:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_1 - x_2) \\ \dot{z}_2 = -cz_2 + hx_2^2 \end{cases} \quad (2)$$

设 $e_1 = x_2 - x_1$, $e_3 = z_2 - z_1$ 于是得到误差系统为:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -ae_1 \\ \dot{e}_3 = -ce_3 + hx_2^2 - hx_1^2 = -ce_3 + h(x_1 + x_2)e_1 \end{cases} \quad (3)$$

令 $V = (Me_1^2 + e_3^2)/2$, 其中 M 取大于 0 的某一正数, 则 $V \geq 0$. 由误差系统(3)得:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= Me_1\dot{e}_1 + e_3\dot{e}_3 = -aMe_1^2 - ce_3^2 + h(x_1 + x_2)e_1e_3 = \\ &= -\left[\frac{h(x_1 + x_2)}{2}e_1 - e_3\right]^2 - [Ma - \\ &= \left(\frac{h(x_1 + x_2)}{2}\right)^2 e_1^2 - (c-1)e_3^2 \end{aligned}$$

由于混沌系统是有界的, 所以当 $a = 10$ 时总存在一个 $M > 0$ 使 $Ma - (\frac{h(x_1 + x_2)}{2})^2 > 0$. 因此, 当 $a = 10$, $c = 2.5$ 时, $\dot{V} \leq 0$, 误差系统全局渐近稳定, 系统(1)和(2)实现同步. 仿真实验也验证了使用单变量 y_1 驱动响应系统, 完全可以实现快速同步. 图 1 为 Liu 混沌系统的状态图. 用系统(1)中变量 y_1 驱动系统(2)得到的误差曲线如图 2.

2 Liu 混沌系统的自适应同步

2.1 线性参数未知的自适应同步

考虑系统(1)中参数未知, 参数已知. 驱动系统为系统(1)相应的响应系统结构为:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_2 - x_2) + u_1 \\ \dot{y}_2 = b x_2 - kx_2 z_2 + u_2 \\ \dot{z}_2 = -c z_2 + hx_2^2 + u_3 \end{cases} \quad (4)$$

式中 a, b, c 是未知的系统参数, μ_1, μ_2, μ_3 是自适应反馈控制器, 具体结构为:

$$u_1 = m_1(x_1 - x_2), \mu_2 = m_2(y_1 - y_2), \mu_3 = m_3(z_1 - z_2)$$

令 $e_1 = x_2 - x_1$, $e_2 = y_2 - y_1$, $e_3 = z_2 - z_1$, $e_a = a - a$, $e_b = b - b$, $e_c = c - c$ 误差系统如下:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = a(y_2 - x_2) + m_1(x_1 - x_2) - a(y_1 - x_1) = -(m_1 + a)e_1 + ae_2 + (y_2 - x_2)e_a \\ \dot{e}_2 = \dot{y}_2 - \dot{y}_1 = b x_2 - kx_2 z_2 + m_2(y_1 - y_2) - b x_1 + kx_1 z_1 = (b - kz_2)e_1 - m_2 e_2 - kx_1 e_3 + x_2 e_b \\ \dot{e}_3 = \dot{z}_2 - \dot{z}_1 = -c z_2 - hx_2^2 + m_3(z_1 - z_2) + cz_1 - hx_1^2 = h(x_1 + x_2)e_1 - (c + m_3)e_3 - z_2 e_c \end{cases} \quad (5)$$

令 Lyapunov 函数为 $V = (e_1^2 + \gamma e_2^2 + e_3^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2)/2$ ($\gamma > 0$), 设计自适应控制律为 $\dot{e} = (x_2 - y_2)e_1$, $\dot{e} = -\gamma x_2 e_2$, $\dot{e} = z_2 e_3$, 于是得到:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1[-(m_1 + a)e_1 + ae_2 + (y_2 - x_2)e_a] + \\ &= \gamma e_2[(b - kz_2)e_1 - m_2 e_2 - kx_1 e_3 + x_2 e_b] + \\ &= e_3[h(x_1 + x_2)e_1 - (c + m_3)e_3 - z_2 e_c] + \\ &= e_a[(x_2 - y_2)e_1] - \gamma e_b x_2 e_2 + e_c z_2 e_3 = -(m_1 + a)e_1^2 + (a + \gamma b - \gamma k z_2)e_1 e_2 - \gamma m_2 e_2^2 - \gamma k x_1 e_2 e_3 + h(x_1 + x_2)e_1 e_3 - (c + m_3)e_3^2 \leq -(m_1 + a)e_1^2 + (a + \gamma b + \gamma k B_z)|e_1||e_2| - \gamma m_2 e_2^2 + \gamma B_x |e_2||e_3| + 2h B_x |e_1||e_3| - (c + m_3)e_3^2 = -e^T P e \end{aligned}$$

式中：

$$P = \begin{pmatrix} m_1 + a & -(a + \gamma b + \gamma k B_z)/2 & -h B_x \\ -(a + \gamma b + \gamma k B_z)/2 & \gamma m_2 & -k \gamma B_x/2 \\ -h B_x & -k \gamma B_x/2 & c + m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 + a & \Omega_{12} & -h B_x \\ \Omega_{12} & \gamma m_2 & \Omega_{23} \\ -h B_x & \Omega_{23} & c + m_3 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{12} = -(a + \gamma b + \gamma k B_z)/2, \Omega_{23} = -k \gamma B_x/2$$

要使 $P > 0$ 必须满足以下条件：

$$m_1 + a > 0 \tag{6}$$

$$(m_1 + a)\gamma m_2 - \Omega_{12}^2 > 0 \tag{7}$$

$$(m_1 + a)\gamma m_2(c + m_3) - 2h B_x \Omega_{12} \Omega_{23} - \gamma m_2 \times (h B_x)^2 - (m_1 + a)\Omega_{23}^2 - (c + m_3)\Omega_{12}^2 > 0 \tag{8}$$

当条件(6)-(8)满足时, $P > 0$, 则 $\dot{V} \leq 0$, 误差系统(5)渐进稳定, 系统(1)和(4)实现同步。

2.2 非线性参数未知的自适应同步

Liu 混沌系统中非线性项参数 k, h 的变化将引起系统很大的变化. 以往对于广义 Lorenz 系统的研究很少涉及对非线性项参数的估计和辨识. 考虑系统(1)中参数 a, b, c, k, h 均未知, 驱动系统为系统(1), 相应的响应系统结构为：

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_2 - x_2) + u_1 \\ \dot{y}_2 = b x_2 - k x_2 z_2 + u_2 \\ \dot{z}_1 = -c z_2 + h x_2^2 + u_3 \end{cases} \tag{9}$$

定义 $e_1, e_2, e_3, e_a, e_b, e_c$ 同前, 令 $e_h = \hat{h} - h, e_k = \hat{k} - k$ 得到误差系统如下：

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(y_2 - x_2) + u_1 - a_1(y_1 - x_1) = -ae_1 + ae_2 + (y_2 - x_2)e_a + u_1 \\ \dot{e}_2 = b x_2 - k x_2 z_2 + u_2 - b x_1 + k x_1 z_1 = (b - k z_1)e_1 - k x_2 e_3 + x_2 e_b - x_2 z_2 e_k + u_2 \\ \dot{e}_3 = -c z_2 - h x_2^2 + u_3 + c z_1 - h x_1^2 = h(x_1 + x_2)e_1 - ce_3 - z_2 e_c + x_2^2 e_h + u_3 \end{cases} \tag{10}$$

这里可以利用 2.1 节的方法构造, 但是实际仿真实验发现, 由于需要对三维系统中的五个参数进行辨识, 而且参数的辨识存在相互关联, 因此 3.1 节方法虽然可以实现同步, 但是辨识结果有时会陷入局部最优解或者辨识速度比较慢, 造成同步结果不理想. 于是重新构造自适应控制器为：

$$\begin{aligned} u_1 &= -m_1 e_1 - a e_2, \\ u_2 &= -(b - k z_1)e_1 - m_2 e_2 + k x_2 e_3, \end{aligned}$$

$$u_3 = -h(x_1 + x_2)e_1 - m_3 e_3 \tag{11}$$

式中 $\gamma > 0, m_i > 0 (i = 1, 2, 3)$. 系统参数的适应律为：

$$\begin{aligned} \dot{e}_a &= (x_2 - y_2)e_1, \dot{e}_b = -x_2 e_2, \dot{e}_c = -\gamma z_2 e_3, \dot{e}_h = -\gamma x_2^2 e_3, \dot{e}_k = x_2 z_2 e_2 \end{aligned} \tag{12}$$

定理 在控制律(11)和(12)的条件下, 且 $m_1 > -a, m_2 > 0, m_3 > -c/\gamma$ 时, 误差系统(10)全局渐进稳定, 即驱动系统(1)和响应系统(9)实现同步。

证明 取 Lyapunov 函数为 $V = (e_1^2 + e_2^2 + \gamma e_3^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 + e_h^2 + e_k^2)/2$, 其全导数为：

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1[-ae_1 + ae_2 + (y_2 - x_2)e_a + u_1] + e_2[(b - k z_1)e_1 - k x_2 e_3 + x_2 e_b - x_2 z_2 e_k + u_2] + \gamma e_3[h(x_1 + x_2)e_1 - ce_3 - z_2 e_c + x_2^2 e_h + u_3] + \dot{e}_a e_a + \dot{e}_b e_b + \dot{e}_c e_c + \dot{e}_h e_h + \dot{e}_k e_k = e_1[-ae_1 + ae_2 + (y_2 - x_2)e_a - m_1 e_1 - ae_2] + e_2[(b - k z_1)e_1 - k x_2 e_3 + x_2 e_b - x_2 z_2 e_k - (b - k z_1)e_1 - m_2 e_2 + k x_2 e_3] + \gamma e_3[h(x_1 + x_2)e_1 - ce_3 - z_2 e_c + x_2^2 e_h - h(x_1 + x_2)e_1 - m_3 e_3] + e_a[(x_2 - y_2)e_1] - e_b x_2 e_2 + e_c z_2 e_3 - \gamma e_h x_2^2 e_3 + e_k x_2 z_2 e_2 = -(m_1 + a)e_1^2 - m_2 e_2^2 - (c + \gamma m_3)e_3^2 \end{aligned}$$

当 $m_1 > -a, m_2 > 0, m_3 > -c/\gamma$ 时, $\dot{V} \leq 0$, 误差系统(10)全局渐进稳定, 于是驱动系统(1)和响应系统(9)实现同步。

3 同步仿真实验

3.1 线性参数未知的自适应同步实验

针对驱动系统(1)和响应系统(4)构造的自适应同步方案, 令系统参数标值分别为 $(a, b, c, k, h) = (10, 40, 2.5, 1, 4)$. 取系统状态初值为 $(x_0, y_0, z_0) = (2, 4, 6), (x'_0, y'_0, z'_0) = (10, 20, 30)$, 系统(4)的

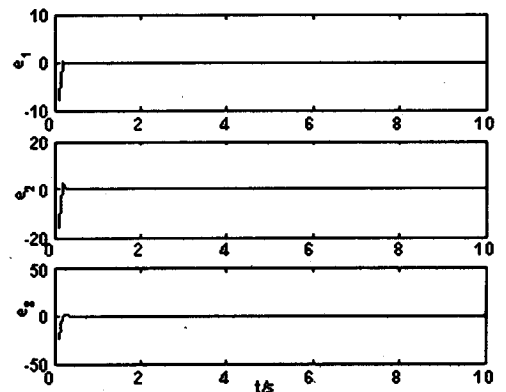


图3 线性参数未知的同步误差曲线图
Fig.3 Error plot with unknown linear parameter

未知参数取初值为 $(a, b, c) = (11, 38, 3)$. 采用步长为 0.1 的四阶龙格-库塔法进行仿真. 根据 Liu 系统处于混沌态时 $|x| < 20, |z| < 50$ 取 $B_x = 20, B_z = 50$; 当 $\gamma = 10, m_1 = 80, m_2 = 65, m_3 = 86$ 时满足条件式 (6)~(8). 图 3 显示在 0.5 秒左右实现两个 Liu 混沌系统的状态同步, 图 4 显示参数 a, b, c 也在 0.5 秒左右自适应辨识到 10, 40, 2.5.

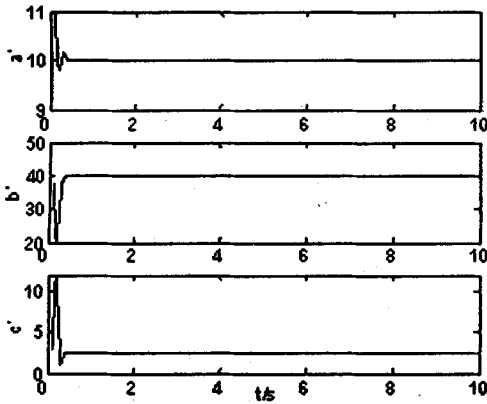


图 4 线性参数未知的参数辨识曲线

Fig. 4 Identification plot with unknown linear parameter

3.2 非线性参数未知的自适应同步实验

考虑系统 (1) 和 (9) 的同步实验, 系统 (9) 中参数 (a, b, c, k, h) 初值设为 $(11, 38, 3, 2, 3)$. 系统状态初值和仿真步长同前. 取 $m_1 = 10, m_2 = 15, m_3 = 10$ 按照 3.2 节的方法进行自适应仿真实验. 实验表明参数 γ 将直接影响参数辨识的速度, 也将影响系统状态同步的速度. 仿真比较说明当 γ 取较小正数 ($= 0.5$) 时参数辨识速度比较快, 五个系统参数均在 8 秒内辨识到标值; 当 γ 较大 ($= 1.5$) 时参数

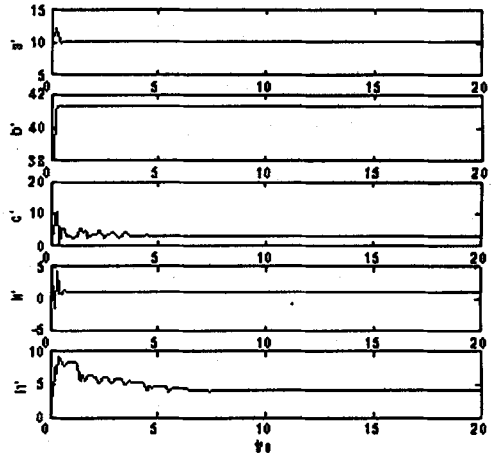


图 6 参数辨识曲线图 ($\gamma = 0.5$)

Fig. 6 The plot of identifying parameters ($\gamma = 0.5$)

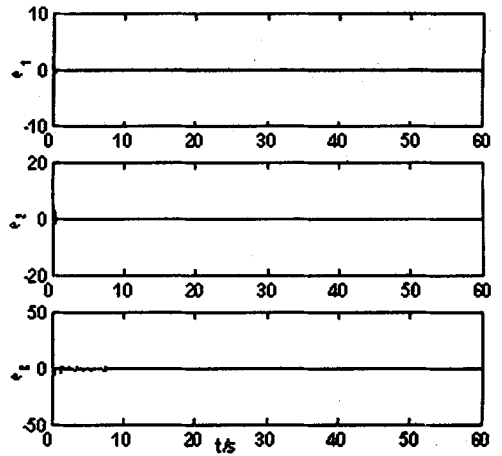


图 7 参数未知的同步误差曲线图 ($\gamma = 1.5$)

Fig. 7 Error plot with unknown parameter ($\gamma = 1.5$)

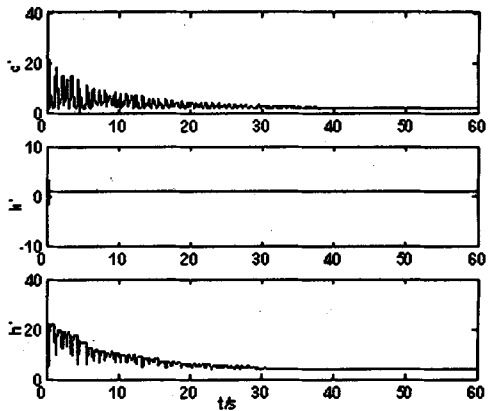


图 8 参数辨识曲线图 ($\gamma = 1.5$)

Fig. 8 The plot of identifying parameters ($\gamma = 1.5$)

辨识总体速度变慢, 主要是参数 c 和 k 辨识速度较慢, 在约 40 秒才辨识到标值, 从而影响系统状态在

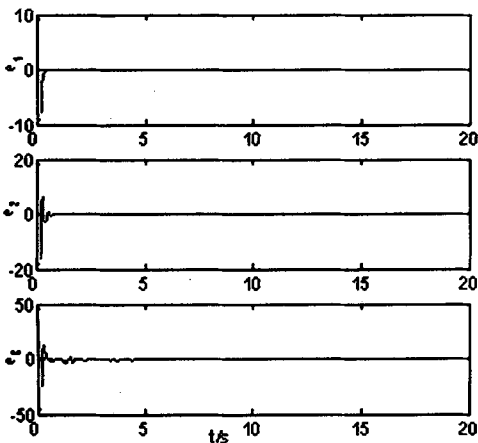


图 5 参数未知的同步误差曲线图 ($\gamma = 0.5$)

Fig. 5 Error plot with unknown parameters ($\gamma = 0.5$)

20 秒后才实现完全同步. 图 5 和图 6 是 $\gamma = 0.5$ 时的系统状态误差图和五个系统参数辨识曲线图, 图 7 和图 8 是 $\gamma = 1.5$ 时的系统状态误差图和参数 c , k , h 的辨识曲线图(由于系统参数 a , b 辨识速度没有明显变化, 图 8 中仅列出参数 c , k , h). 反馈控制量 m_1 , m_2 , m_3 幅值增大将使同步的速率加快, 这与众多同步文献中的结果是相近的, 这里不再赘述.

4 结论

本文利用单变量驱动方法实现系统状态同步, 该方法结构简单, 易于实现. 在此基础上, 研究了含未知参数的两个 Liu 系统的自适应同步问题, 从理论上推导了当系统线性或非线形参数不确定的情况下的同步条件. 理论分析和仿真实验表明, 本文应用于未知线性参数的第一种自适应方法控制器结构简单, 但是反馈控制量要求较严格; 应用于未知非线性参数的第二种自适应方法控制器的结构较复杂, 但是反馈控制量限制较少. 两种方法可以分别适用于不同要求的场合.

文中只是采用仿真实验结果说明了 γ 不同取值在自适应参数辨识中的作用和影响, 还没有能够从理论上清晰的分析出其作用. 自适应同步方法的参数辨识、状态同步速率与控制参量的关系, 还有待深入研究.

参 考 文 献

- Chen G R, Ueta T. Yet another chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 1999, 9: 1465 ~ 1466
- Wang Y W, Guan Z H, Wang H O. Feedback and adaptive control for the synchronization of Chen system via a signal variable. *Physics Letters A*, 2003, 312: 34 ~ 40
- Lu J A, Tao C H. Parameter identification and tracking of a unified system. *Chinese Physical Letters*, 2002, 19(5): 632 ~ 635
- Celikovsky S, Chen G R. On the generalized Lorenz canonical form. *Chaos, Solitons and Fractals* 2005, 26: 1271 ~ 1276
- Liu C X, Liu T, Liu L. A new chaotic attractor. *Chaos, Solitons and Fractals* 2004, 22: 1031 ~ 1038
- 陈志盛, 孙克辉, 张泰山. Liu 混沌系统的非线性反馈同步控制. *物理学报* 2005, 54(6): 2580 ~ 2583(Chen zhishen, Sun kehui, Zhang taishan. Nonlinear feedback synchronization control of Liu chaotic system. *Acta Physica Sinica*, 2005, 54(6): 2580 ~ 2583 (in Chinese))
- 陈保颖. 线性反馈实现 Liu 系统的混沌同步. *动力学与控制学报* 2006, 4: 1 ~ 4(Chen Baoying. Linear feedback control for synchronization of Liu chaotic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(1): 1 ~ 4 (in Chinese))
- Jiang G P, Tang W, Chen G R. A simple global synchronization criterion for coupled chaotic systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, 15: 925 ~ 935
- 李克, 杨绿溪, 柯振亚. 基于非线性观测器的离散驱动混沌同步. *自动化学报* 2001, 27(2): 280 ~ 283(Li ke, Yang Luxi, He zhenya. Sporadic driving chaos synchronization based on nonlinear observer. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(2): 280 ~ 283 (in Chinese))
- Shan L, Li J, Wang Z H. Generalized Synchronization of Unified Chaotic System and the Research of CSK. 8th ICARV, 2004: 1928 ~ 1933
- Ma W, Wang Z O. A new chaotic parameters annealing neural network for solving global optimization problems. *Communication Theory Physics*, 2003, 39(4): 385 ~ 392
- Vastaran N, Vahid J M. Adaptive fuzzy synchronization of discrete - time chaotic systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, 28: 1029 ~ 1036
- Dedieu H, Ogorzalek M J. Identifiability and identification of chaotic systems based on adaptive synchronization. *IEEE Transactions on Circuits & Systems - I*, 1997, 44(10): 948 ~ 964
- Kuang Y L, Peter L, Tung S C. Adaptive synchronization design for chaotic systems via a Scalar during signal. *IEEE Transactions Circuit & Systems - I*, 2002, 49(1): 17 ~ 26
- Li Z, Han C Z. Adaptive synchronization of Rossler and Chen chaotic systems. *Chinese Physics*, 2002, 11(7): 666 ~ 669
- Yang Y, Ma X K, Zhang H. Synchronization and parameter identification of high - dimensional discrete chaotic systems via parametric adaptive control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, 28: 244 ~ 251

ADAPTIVE SYNCHRONIZATION OF LIU CHAOTIC SYSTEM WITH UNCERTAIN PARAMETERS *

Shan Liang Li Jun Wang Zhiqun

(School of Automation , Nanjing University of Science and Technology , Nanjing 210094 , China)

Abstract Based on the synchronization by single – variable drive method , and applying the adaptive control theory , we studied the synchronization of Liu chaotic system in the condition that one or more uncertain parameters existed , and deduced the sufficient conditions of asymptotic stability for error systems with different unknown parameters using Lyapunov function. Simulation results showed that the adaptive controllers can quickly identify system parameters and synchronize two Liu chaotic systems.

Key words Liu chaotic system , synchronization control , adaptive synchronization