

广义 Lienard 方程周期振动同步的判据*

马米花 蔡萍 蔡建平

(漳州师范学院数学系,漳州 363000)

摘要 基于线性时变系统的稳定性理论,李雅普诺夫直接法和 Gerschgorin 圆盘定理求得判定广义 Lienard 方程振动系统达到全局同步的几种不同的代数判据. 理论上比较这些不同代数判据表明,根据李雅诺夫直接法得到的代数判据优于根据 Gerschgorin 圆盘定理得到的代数判据,而且通过适当选取李雅普诺夫函数可以得到更优化的代数判据. Rayleigh - Duffing 方程作为数值算例进一步验证了理论结果.

关键词 广义 Lienard 方程,周期振动同步,代数判据,李雅普诺夫稳定性

引言

混沌系统同步控制在工程^[1-2],生物和化学^[3-4]等方面有很重要的应用,自从 Pecora 和 Carroll^[5]关于混沌同步的研究以来,越来越多的研究人员投入到对混沌系统同步的研究^[6-8]. 目前已经有很多控制方法能使混沌系统达到同步,得到很多判定混沌系统同步的判据. 它们表示为线性矩阵不等式(linear matrix inequality)的形式,需要特殊的数值计算方法处理,这给实际应用带来诸多不便. 代数型的解析判据能够反映控制器与被分析的系统参数的关系,可以更方便地应用于同步控制器的设计和分析系统参数. 文[6]根据 Gerschgorin 圆盘定理求得混沌系统同步的代数判据. 文[8]根据线性时变系统的稳定性理论和李雅普诺夫直接法求得判定水平平台系统的混沌同步的代数判据. 混沌同步的控制方法同样适用于周期振动同步的研究. 振动同步在电机设备,水平平台系统,离心式调节器等机电系统有很多应用,一些学者在这方面已开展了很好的理论和应用研究^[9-12].

本文根据线性时变系统的稳定性理论,李雅普诺夫直接法和 Gerschgorin 圆盘定理研究广义 Lienard 方程^[13]的周期振动同步的代数判据,并从理论上比较这些不同代数判据,结果表明根据李雅诺夫直接法得到的代数判据优于根据 Gerschgorin 圆盘定理得到的代数判据,通过适当选取李雅普诺夫函

数可以得到更优化的代数判据. 最后, Rayleigh - Duffing 方程作为数值算例进一步验证了理论结果.

1 广义 Lienard 方程极限环的存在性

考虑广义 Lienard 方程

$$\ddot{z} + f(z, \dot{z})\dot{z} + g(z) = 0 \quad (1)$$

其中“·”是关于 t 求导, $f(z, \dot{z})$ 表示阻尼力, $g(z)$ 表示恢复力. 令 $x_1 = z, x_2 = \dot{z}$, 可以把方程(1)写成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g(x_1) - f(x_1, x_2)x_2 \end{cases} \quad (2)$$

引理 1^[13]在广义 Lienard 方程(1)或(2)中,如果 $f(z, \dot{z})$ 和 $g(z)$ 都是连续可微函数,且

- (i) 存在一个数 $a > 0$, 当 $(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} > a$ 时, $f(x_1, x_2) > 0$;
- (ii) $f(0, 0) < 0$, 从而原点 $(0, 0)$ 的邻域也有 $f(x_1, x_2) < 0$;
- (iii) 对所有 $z > 0, g(z)$ 是奇函数, 而且 $g(z) > 0$;

(iv) 当 $z \rightarrow \infty$ 时, $U(z) = \int_0^z g(u) du \rightarrow \infty$

则方程存在极限环解.

本文假设方程(1)中 $f(z, \dot{z})$ 和 $g(z)$ 满足引理 1 的条件. 因此广义 Lienard 方程(1)存在极限环.

2 周期振动同步的代数判据

从广义 Lienard 方程(2)中分离出线性和非线

性部分 并令 $x = (x_1, x_2)^T \in R^2$ 得到方程(2)的向量形式

$$\dot{x} = Ax + F(x) \tag{3}$$

其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 是线性部分常系数矩阵, $F(x)$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ M(x) \end{pmatrix}$ 是非线性部分 并且称(3)为驱动系统.

用线性误差反馈控制法构造驱动系统(3)的响应系统

$$\dot{y} = Ay + F(y) + K(x - y) \tag{4}$$

其中 $K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \in R^{2 \times 2}$ 是控制矩阵, $y = (y_1, y_2)^T \in R^2$.

定义误差 $e = x - y$, 并假设存在有界矩阵 $Q(t)$ 使得 $F(x) - F(y) = Q(t)e$, 其中 $Q(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_3(t) & q_4(t) \end{pmatrix}$ 那么可以得到误差系统

$$\dot{e} = (A - K)e + F(x) - F(y) = (A - k + Q(t))e \tag{5}$$

如果驱动—响应系统的轨线 $x(t)$ 和 $y(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - y(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ (6) 其中 $\|\cdot\|$ 表示欧氏里得向量范数 那么误差系统(5)在原点全局渐近稳定, 就称驱动系统(3)和响应系统(4)达到全局同步.

根据线性时变系统的稳定性理论 如果控制矩阵 K 使

$$(A - K + Q) + (A - K + Q)^T = \begin{pmatrix} -2k_{11} & 1 + a_{21} + q_3 - k_{12} - k_{21} \\ 1 + a_{21} + q_3 - k_{12} - k_{21} & 2(a_{22} + q_4 - k_{22}) \end{pmatrix} \tag{7}$$

负定 那么误差系统(5)在原点全局渐近稳定, 即系统(3)与系统(4)达到全局同步.

根据霍维茨法则 矩阵(7)负定的充要条件是 $k_{11} > 0$ (8)

$$-4k_{11}(a_{22} + q_4 - k_{22}) - (1 + a_{21} + q_3 - k_{12} - k_{21})^2 > 0 \tag{9}$$

所以 如果 K 满足不等式(8)和(9) 那么系统(3)和(4)达到全局同步.

取 $K = \text{diag}\{k_1, k_2\}$ 由不等式(8)和(9)得 $k_1 > 0$ (10)

$$k_2 > a_{22} + q_4 + \frac{(1 + a_{21} + q_3)^2}{4k_1} \tag{11}$$

于是 如果 $K = \text{diag}\{k_1, k_2\}$ 满足不等式(10)和(11) 那么系统(3)和(4)达到全局同步.

取 $K = kI_2$ 由不等式(8)和(9)得

$$k > \frac{1}{2} [a_{22} + q_4 + \sqrt{(a_{22} + q_4)^2 + (1 + a_{21} + q_3)^2}] \tag{12}$$

于是 如果 $K = kI_2$ 满足不等式(12) 那么系统(3)和(4)达到全局同步.

根据李雅普诺夫直接法 引进一个正定对称矩阵 $P = \text{diag}\{p, lp\}$ ($p > 0, l > 0$) 选择李雅普诺夫函数 $V = e^T P e$ 则

$$\dot{V} = e^T [(A - K + Q)P + P(A - K + Q)^T] e \tag{13}$$

如果控制矩阵 K 使 $(A - K + Q)P + P(A - K + Q)^T$ 负定 那么显然 $\dot{V} < 0$. 于是由李雅普诺夫稳定性理论知误差系统(5)在原点全局渐近稳定, 也就是系统(3)和系统(4)达到全局同步.

$$(A - K + Q)P + P(A - K + Q)^T = \begin{pmatrix} -2pk_{11} & lp(1 - k_{12}) + p(a_{21} + q_3 - k_{21}) \\ lp(1 - k_{12}) + p(a_{21} + q_3 - k_{21}) & 2lp(a_{22} + q_4 - k_{22}) \end{pmatrix} \tag{14}$$

根据霍维茨法则 矩阵(14)负定的充要条件是

$$k_{11} > 0 \tag{15}$$

$$-4lk_{11}(a_{22} + q_4 - k_{22}) - (l + q_3 + a_{21} - lk_{12} - k_{21})^2 > 0 \tag{16}$$

$$\text{取 } K = \text{diag}\{k_1, k_2\} \text{ 由不等式(15)和(16)得 } k_1 > 0 \tag{17}$$

$$k_2 > a_{22} + q_4 + \frac{(l + a_{21} + q_3)^2}{4lk_1} \tag{18}$$

于是 如果 $K = \text{diag}\{k_1, k_2\}$ 满足不等式(17)和(18) 那么系统(3)和(4)达到全局同步.

取 $K = kI_2$ 由不等式(15)和(16)得

$$k > \frac{1}{2} [a_{22} + q_4 + \sqrt{(a_{22} + q_4)^2 + \frac{1}{l}(l + a_{21} + q_3)^2}] \tag{19}$$

于是 若 $K = kI_2$ 满足不等式(19) 那么系统(3)和(4)达到全局同步.

引理 2 (Gersgorin 圆盘定理^[14]) 设 n 阶方阵

$$A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$$

则的每个特征值至少位于一个以主对角线上元素为中心且半径为

$$r_l(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

的圆盘上。

根据 Gersgorin 圆盘定理, 矩阵(14)的特征值都是负数的充要条件是

$$2pk_{11} > |lp(1 - k_{12}) + p(a_{21} + q_3 - k_{21})| \quad (20)$$

$$2lp(k_{22} - a_{22} - q_4) > |lp(1 - k_{12}) + p(a_{21} + q_3 - k_{21})| \quad (21)$$

所以, 如果 K 满足不等式(20)和(21), 那么系统(3)和(4)达到全局同步。

取 $K = \text{diag}\{k_1, k_2\}$, 由不等式(20)和(21)得

$$k_1 > \frac{1}{2}|l + a_{21} + q_3| \quad (22)$$

$$k_2 > a_{22} + q_4 + \frac{1}{2l}|l + a_{21} + q_3| \quad (23)$$

所以, 如果 K 满足不等式(22)和(23), 那么系统(3)和(4)达到全局同步。

取 $K = kI_2$, 由不等式(22)和(23)得

$$k > \max\left\{\frac{1}{2}|l + a_{21} + q_3|, a_{22} + q_4 + \frac{1}{2l}|l + a_{21} + q_3|\right\} \quad (24)$$

于是, 若 $K = kI_2$ 满足不等式(24), 那么系统(3)和(4)达到全局同步。

3 代数判据的比较

为了方便, 以下对 $K = \text{diag}\{k_1, k_2\}$ 的情形进行比较。首先, 对根据线性时变系统的稳定性理论得到的判据(10)(11)和根据李雅普诺夫直接法得到的判据(17)(18)进行比较。显然判据(10)和判据(17)相同, 但如果取 l 使其满足

$$\frac{(l + a_{21} + q_3)^2}{4l} < \frac{(1 + a_{21} + q_3)^2}{4} \quad (25)$$

那么有不等式(11)满足不等式(18), 所以判据(17)和(18)优于判据(10)和(11)。可见, 适当选择矩阵 P 构造李雅普诺夫函数可以得到更优化的代数判据。

其次, 对根据李雅普诺夫直接法得到的判据(17)(18)和根据 Gerschgorin 圆盘定理得到的判据(22)(23)进行比较。把不等式(22)代入不等式(18)解得

$$k_2 > a_{22} + q_4 + \frac{1}{2l}|l + a_{21} + q_3| \quad (26)$$

上式与不等式(23)相同, 但不等式(22)显然满足不等式(17), 所以判据(17)和(18)优于判据(22)和(23)。可见, 根据李雅普诺夫直接法得到的代数判据优于根据 Gerschgorin 圆盘定理得到的代数判据。

4 数值算例

考虑自激振荡电路系统的 Rayleigh - Duffing 方程^[9],

$$\ddot{z} - \mu(1 - \alpha_0 z^2)\dot{z} + z + \alpha z^3 = 0 \quad (27)$$

其中 μ, α_0, α 都是正数。于是

$$f(z, \dot{z}) = \mu(\alpha_0 \dot{z} - 1)g(z) = z + \alpha z^3,$$

$$U(z) = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}\alpha z^4$$

取 $a = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0}} > 0$, 引理 1 中的条件(i)-(iv)都可以满足。于是自激 Rayleigh - Duffing 方程存在极限环。当 $\mu = 0.1, \alpha_0 = 1, \alpha = 0.1$ 时, Rayleigh - Duffing 方程(27)的极限环如图 1。

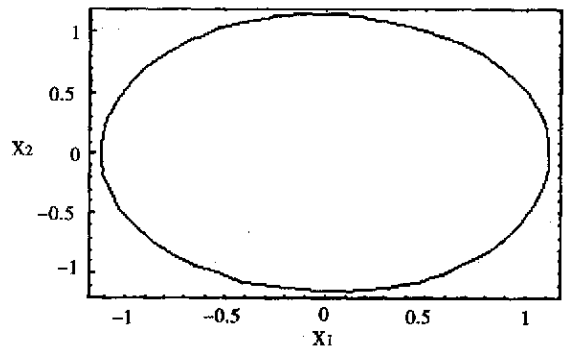


图 1 Rayleigh - Duffing 方程的极限环 ($\mu = 0.1, \alpha_0 = 1, \alpha = 0.1$)

Fig. 1 Limit cycle of Rayleigh - Duffing equation with $\mu = 0.1, \alpha_0 = 1, \alpha = 0.1$

将自激振荡方程(27)写成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \mu x_2 - \mu \alpha_0 x_2^3 - \alpha x_1^3 \end{cases} \quad (28)$$

其中 $x_1 = z, x_2 = \dot{z}$ 。令 $x = (x_1, x_2)^T \in R^2$, 将系统(28)写成矢量的形式

$$\dot{x} = Ax + F(x) \quad (29)$$

$$\text{其中 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}, F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu \alpha_0 x_2^3 - \alpha x_1^3 \end{pmatrix}$$

用线性误差反馈控制法构造驱动系统(29)的响应系统

$$\dot{y} = Ay + F(y) + K(x - y) \quad (30)$$

其中 $K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \in R^{2 \times 2}$ 是控制矩阵, $y = (y_1, y_2)^T \in R^2$.

定义误差 $e = x - y$, 由系统 (29) 与 (30) 得误差方程

$$\dot{e} = (A - K)x + F(x) - F(y) = (A - K + Q(t))e \quad (31)$$

其中

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_3(t) & q_4(t) \end{pmatrix} \quad q_3(t) = -\alpha(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2)$$

$$q_4(t) = -\mu\alpha_0(x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2)$$

取 $K = \text{diag}\{k_1, k_2\}$ 时, 按照上面的方法得到与判据 (10) 和 (11) 相对应的判据

$$k_1 > 0 \quad (32)$$

$$k_2 > \mu + q_4 + \frac{q_3^2}{4k_1} \quad (33)$$

与判据 (17) 和 (18) 相对应的判据是

$$k_1 > 0 \quad (34)$$

$$k_2 > \mu + q_4 + \frac{(l - 1 + q_3)^2}{4k_1} \quad (35)$$

与判据 (22) 和 (23) 相对应的判据是

$$k_1 > \frac{1}{2} |l + q_3 - 1| \quad (36)$$

$$k_2 > \mu + q_4 + \frac{1}{2l} |l + q_3 - 1| \quad (37)$$

取 $K = kI_2$ 时, 与判据 (12) 相对应的判据是

$$k > \frac{1}{2} [\mu + q_4 + \sqrt{(\mu + q_4)^2 + q_3^2}] \quad (38)$$

与判据 (19) 相对应的判据是

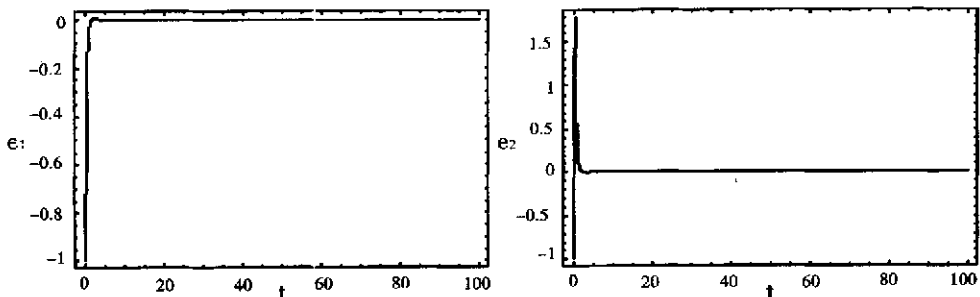
$$k > \frac{1}{2} [\mu + q_4 + \sqrt{(q_4 + \mu)^2 + \frac{1}{l}(1 - 1 + q_3)^2}] \quad (39)$$

与判据 (24) 相对应的判据是

$$k > \max \left\{ \frac{1}{2} |l + q_3 - 1|, \mu + q_4 + \frac{1}{2l} |l + q_3 - 1| \right\} \quad (40)$$

如果 K 满足以上判据, 那么系统 (29) 与 (30) 达到全局同步.

取 $\mu = 0.1, \alpha_0 = 1, \alpha = 0.1$, 从图 1 可以看出极限环的界为 $-1.1 \leq x_1 \leq 1.1, -1.1 \leq x_2 \leq 1.1$. 由 q_3, q_4 的表达式可以计算出 $-0.675 < q_3 < 0, -0.675 < q_4 < 0$. 在判据 (32) 中取 $k_1 > 0.2$, 则由判据 (33) 可解得 $k_2 > 0.67$; 取 $l = 1.2$, 在判据 (34) 中也取 $k_1 > 0.2$, 由判据 (35) 可解得 $k_2 > 0.3$. 可见判据 (34) 与 (35) 优于判据 (32) 与 (33), 这就验证了通过适当选择矩阵 P 构造李雅普诺夫函数可以得到更优化的代数判据. 也取 $l = 1.2$, 由判据 (36) 和 (37) 解得 $k_1 > 0.238, k_2 > 0.298$, 若在判据 (34) 中也取 $k_1 > 0.238$, 则由判据 (35) 也可解得 $k_2 > 0.298$, 而且在判据 (34) 中 k_1 可以取任意小的正数, 可见判据 (34) 与 (35) 优于判据 (36) 与 (37), 这就验证了根据李雅普诺夫直接法得到的代数判据优于根据 Gerschgorin 圆盘定理得到的代数判据. 取 $k_1 = 0.25, k_2 = 0.35$, 画出误差 $e = x - y$ 与时间 t 的关系图, 如图 2. 其中任意取驱动—响应振荡系统的初始条件为 $(x_1(0), x_2(0)) = (-4.0, -4.0), (y_1(0), y_2(0)) = (5.0, 5.0)$.



(a) $e_1 = x_1 - y_1$ 关于时间 t 的误差图

(a) Error $e_1 = x_1 - y_1$ versus time t

(b) $e_2 = x_2 - y_2$ 关于时间 t 的误差图

(b) Error $e_2 = x_2 - y_2$ versus time t

图 2 取 $k_1 = 0.25, k_2 = 0.35$ 驱动—响应 Rayleigh - Duffing 方程 (29) 和 (30) 关于时间 t 的误差图

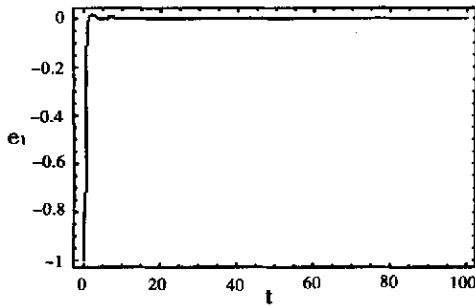
Fig. 2 Error between the master and response Rayleigh - Duffing equations (29) and (30) with $k_1 = 0.25, k_2 = 0.35$

当控制矩阵 $K = kI_2$ 时, 由判据 (38) 解得 $k > 0.391$; 取 $l = 1.2$, 由判据 (39) 解得 $k > 0.272$; 由判

据 (40) 解得 $k > 0.298$. 这也进一步验证了根据李雅普诺夫直接法得到的代数判据优于根据 Ger-

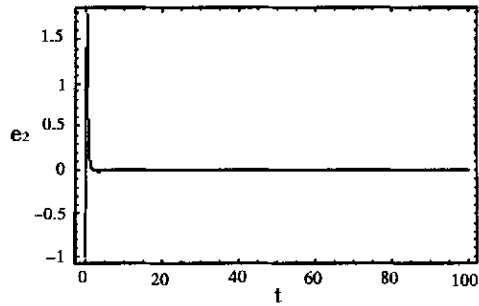
schgorin 圆盘定理得到的代数判据,而且通过适当选择 P 矩阵构造李雅普诺夫函数可以得到更优化

的代数判据. 取 $k=0.3$, 画出误差 $e = x - y$ 与时间 t 的关系图, 如图 3.



(a) $e_1 = x_1 - y_1$ 关于时间的误差图

(a) Error $e_1 = x_1 - y_1$ versus time t



(b) $e_2 = x_2 - y_2$ 关于时间的误差图

(b) Error $e_2 = x_2 - y_2$ versus time t

图 3 取 $k=0.3$ 驱动—响应 Rayleigh - Duffing 方程 (29) 和 (30) 关于时间的误差图

Fig. 3 Error between the master and response Rayleigh - Duffing equations (29) and (30) with $k=0.3$.

5 结论

根据李雅普诺夫直接法得到的判定驱动—响应广义 Lienard 方程振动系统达到全局同步的代数判据优于根据 Gerschgorin 圆盘定理得到的代数判据,而且通过适当选择矩阵构造李雅普诺夫函数可以得到更优化的代数判据. Rayleigh - Duffing 方程作为数值算例进一步验证了理论结果.

参 考 文 献

- 1 Kocarev LJ, et. al. Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 1992, 2: 709 ~ 713.
- 2 Bowong S, Kakmeni FMM, Koina R. A new synchronization principle for a class of Lurè systems with applications in secure communication. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 2004, 14: 2477 ~ 2491.
- 3 Winfree AT. *The Geometry of Biological Time*, New York: Springer, 1980.
- 4 Kuramoto Y. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, Berlin: Springer, 1980.
- 5 Pecora LM, Carroll TL. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.* 1990, 64: 821 ~ 824.
- 6 Jiang GP, Tang WKS, Chen GR. A simple global synchronization criterion for coupled chaotic systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, 15: 925 ~ 935.
- 7 陈保颖, 包芳勋. 连续混沌系统的混沌同步控制. *动力学与控制学报*, 2004, 2(4): 14 ~ 18 (Chen Baoying, Bao

Fangxun. Chaos synchronization control of continuous chaotic systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(4): 14 ~ 18 (in Chinese))

- 8 Wu XF, Cai JP, Wang WH. Master - slave chaos synchronization criteria for the horizontal platform systems via linear state error feedback control. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 295: 378 ~ 387.
- 9 Yamapi R, Wofo P. Dynamics and synchronization of coupled self - sustained electromechanical devices. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 285: 1151 ~ 1170.
- 10 Ge Z M, Yu TC, Chen YS. Chaos synchronization of a horizontal platform system. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 268: 731 ~ 749.
- 11 Ge ZM, Lee CI. Anticontrol and synchronization of chaos for an autonomous rotational machine system with a hexagonal centrifugal governor. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 282: 635 ~ 648.
- 12 郭庆鼎, 唐光谱, 唐元钢, 傅建国. 基于自适应控制的双电动机同步传动控制技术研究. *机械工程学报*. 2002, 38: 79 ~ 82. (Guo Qingding, Tang Guangpu, Tang Yuangang, Fu Jianguo. Study on the synchronized transmission control technique of dual motors based on self - adaptive control. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2002, 38: 79 ~ 82 (in Chinese))
- 13 刘秉正, 彭建华. 非线性动力学. 北京: 高等教育出版社, 2004 (Liu Bingzheng, Pen Jianhua. *Nonlinear dynamics*. Beijing: Higher Education Press, 2004 (in Chinese))
- 14 刘丁酉. 矩阵分析. 武汉: 武汉测绘科技大学出版社, 1998 (Liu Dingyou. *Matrix analysis*. Wuhan: Wuhan Mapping Science and Technology University Press, 1998 (in Chinese))

PERIODIC OSCILLATORY SYNCHRONIZATION CRITERIA FOR GENERALIZED LIENARD EQUATION*

Ma Mihua Cai Ping Cai Jianping

(*Department of Mathematics, Zhangzhou Teachers College, Zhangzhou 363000, China*)

Abstract Algebraic criteria for the periodic oscillatory synchronization of the generalized Lienard systems were derived based respectively on the stability theory of linear time – varied systems, Lyapunov direct method and Gerschgorin disc theorem. It was proven theoretically that the synchronization criteria based on Lyapunov direct method were more flexible than the criteria based on Gerschgorin disc theorem, and the criteria obtained by choosing proper Lyapunov function were more flexible than the criteria based on the stability theory of linear time – varied systems. Rayleigh – Duffing equation as a numerical example verified the theoretical results.

Key words generalized Lienard equation, periodic oscillatory synchronization, algebraic criteria, Lyapunov stability