第 4 卷第 4 期
2006 年 12 月
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 4 No. 4
Dec. 2006

Burgers 方程的精确解*

杨先林

(湖南大学力学与航空航天学院,长沙 410082)(湖南广播电视大学,长沙 410004)

摘要 引入一个变换,将二阶非线性偏微分方程—Burgers 方程降阶为一阶的非线性方程,再直接求解该方程,得出了 Burgers 方程精确解的新形式,并与已有结果完全吻合. 这种方法也适合于求解其他非线性偏微分方程.

关键词 非线性偏微分方程,Burgers 方程,精确解

引 言

孤立子、浑沌、分形等非线性现象普遍存在于自然科学和社会科学中,描述它们的数学模型一般是非线性方程(包括非线性常微分方程、非线性偏微分方程、非线性差分方程和函数方程),由于非线性方程无统一的求解方法,于是寻找非线性方程的精确解成为广大自然科学、工程技术和社会科学工作者研究非线性问题的一个重要课题. 近年来,出现了许多求解非线性方程精确解的新方法,如齐次平衡法[1-5]、sine - cosine 方法[6]、Jacobi 椭圆函数展开法[7-10]、双曲函数展开法[11-14]、非线性变换法[15]和试探函数法[16-19]等. 这些方法可以求出非线性方程的周期解或冲击波解或孤立波解. 但它们只能具体应用于某个或某类非线性方程的求解,因此有必要继续完善和寻找非线性方程的求解方法.

作为一种有益的探索和尝试,文献[18]采用试探函数的方法研究了如下一类非线性偏微分方程的解析解.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+\nu\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+\Lambda=0 \tag{1}$$

在文献[19]中基于"能否不用引入试探函数(因为试探函数的选取具有很大的灵活性,需要较多的经验)而是直接求解呢?"的考虑,引入一个变换将 Burgers 方程转化为二阶非线性常微分方程,从而求解. 此方法遗憾之处正如文献[19]本身所提到的推导过程的自恰性,以及转化后的非线性方程没有降阶,求解困难,由此制约了它的推广. 为此,本文通过引入一个新的变换来求解 Burgers 方程的精确解. 并希望借此得出求解一类非线性方程精确解的方法.

1 Burgers 方程的精确解

Burgers 方程是非线性的耗散(热传导、扩散和黏性)方程,属二阶非线性偏微分方程,其一般形式为:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\quad(\alpha>0) \tag{2}$$

其中 $\alpha>0$ 为耗散系数. 为求解方程(2)的精确解,引入变换

$$u=u(\xi),\quad \xi=\xi(x,t) \tag{3}$$

这里 $\xi=\xi(x,t)$ 是试探函数. 考虑到 Burgers 方程为波动方程,其解含有相位因子$(kx-\omega t)$,选择该试探函数为:

$$\xi=e^{(kx-\omega t)} \tag{4}$$

其中 k 和 ω 分别表示波数和圆频率.

由(3)、(4)式可以求得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\omega\xi\frac{du}{d\xi} \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=k\xi\frac{du}{d\xi} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=k^2\xi\frac{du}{d\xi}+k^2\xi^2\frac{d^2u}{d\xi^2} \tag{7}$$

将(5)—(7)式代入(2)式,整理得

$$-\omega\frac{du}{d\xi}+ku\frac{du}{d\xi}-\alpha k^2\frac{d}{d\xi}(\xi\frac{du}{d\xi})=0 \tag{8}$$

2006-04-23 收到第 1 稿.
*国家自然科学基金资助项目(10472029)

上式两边对 ξ 积分一次得

$$-\omega u+\frac{1}{2}ku^2-\alpha k^2\xi\frac{du}{d\xi}=A \tag{9}$$

其中 A 是积分常数. 为简化且不失一般性，可取 $A=0$. 上式就是经典的一阶非线性方程—Bernoulli 方程[20]. 这样方程(2)就从二阶的非线性偏微分方程转化为一阶的变系数非线性方程.

作变换

$$z=\frac{1}{u}, \tag{10}$$

则方程(9)化为

$$\frac{dz}{d\xi}-\frac{\omega}{\alpha k^2\xi}z+\frac{1}{2\alpha k\xi}=0 \tag{11}$$

这是关于 $z(\xi)$ 的一阶线性方程，其解为

$$z=C\xi^{\frac{\omega}{\alpha k^2}}+\frac{k}{2\omega} \tag{12}$$

其中 C 是积分常数. 代入(10)式求得方程(2)的精确解为

$$u=\frac{2\omega/ke^{-\frac{\omega}{\alpha k^2}(kx-\omega t)}}{C_1+e^{-\frac{\omega}{\alpha k^2}(kx-\omega t)}} \tag{13}$$

上式就是 Burgers 方程(2)的一般形式的行波解. 式中 $C_1=\dfrac{2C\omega}{k}$ 为任意常数.

利用 $\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}=\dfrac{1}{2}(1+\tanh x)$ 和 $\dfrac{e^{2x}}{-1+e^{2x}}=\dfrac{1}{2}(1+\coth x)$，分别取 $C_1=1$ 和 $C_1=-1$ 得出

$$u=\frac{\omega}{k}\left[1+\tanh\frac{-\omega}{2\alpha k^2}(kx-\omega t)\right] \tag{14}$$

$$u=\frac{\omega}{k}\left[1+\coth\frac{-\omega}{2\alpha k^2}(kx-\omega t)\right] \tag{15}$$

利用波速 $c=\dfrac{\omega}{k}$，(14)、(15)式可分别写为：

$$u=c\left[1+\tanh\frac{-c}{2\alpha}(x-ct)\right] \tag{16}$$

$$u=c\left[1+\coth\frac{-c}{2\alpha}(x-ct)\right] \tag{17}$$

(16)式为 Burgers 方程(2)的扭状孤波解. (17)式为 Burgers 方程(2)的奇异行波解. 利用等式 $\tanh x=\dfrac{\sinh 2x}{\cosh 2x+1}$，(16)式可写为：

$$u=c\left[1+\frac{\sinh\frac{-c}{\alpha}(x-ct)}{\cosh\frac{-c}{\alpha}(x-ct)+1}\right] \tag{18}$$

利用等式 $\coth x=\dfrac{\sinh 2x}{\cosh 2x-1}$，(17)式可写为：

$$u=c\left[1+\frac{\sinh\frac{-c}{\alpha}(x-ct)}{\cosh\frac{-c}{\alpha}(x-ct)-1}\right] \tag{19}$$

设

$$\alpha=i\alpha' \tag{20}$$

这里 i 是虚数单位，α' 是一常数. 利用等式 $\sinh(ix)=i\sin x$，$\cosh(ix)=\cos x$. (18)式可写为

$$u=c\left[1+\frac{\sinh\frac{c}{\alpha'}(x-ct)}{\cosh\frac{c}{\alpha'}(x-ct)+1}i\right] \tag{21}$$

(19)式可写为

$$u=c\left[1+\frac{\sinh\frac{c}{\alpha'}(x-ct)}{\cosh\frac{c}{\alpha'}(x-ct)-1}i\right] \tag{22}$$

这是 Burgers 方程复数形式的三角函数解，是 Burgers 方程的解的新形式.

显然，利用文献[18]的关系式 $\omega=-\alpha k^2$，由(14)、(15)式可得到

$$u=-\alpha k\left[1+\tanh\frac{1}{2}(kx-\omega t)\right] \tag{23}$$

$$u=-\alpha k\left[1+\coth\frac{1}{2}(kx-\omega t)\right] \tag{24}$$

此结果与文献[19]的结果完全相同. 可见本文采用的方法是可行的.

2　结论

本文引入的变换(3)、(4)类似于行波解[20]，但不同于行波解，对 Burgers 方程用行波变换，再积分一次得出的方程不是方程(9). 虽然利用 tanh 函数展开法或试探函数法或其它方法也能得出方程的精确解(13). 但本文的方法无需引入试探函数，在此变换下把二阶的非线性偏微分方程转化为一阶的非线性方程. 从而直接求得方程的解析解. 而且利用双曲函数与三角函数的关系得到了 Burgers 方程复数形式的三角函数解. 据我们所知，此解在别的文献中没有找到. 可以预见，这种方法可以推广用于求解方程(1)这样一类非线性偏微分方程的精确解析解，如 KDV 方程、KDV - Burgers 方程等. 但需对转化后的降阶的非线性方程再作变换才

能求解. 这需视具体的方程[21-23]来选择变换. 所有这些仍然值得我们作进一步的研究.

参 考 文 献

1 Wang M L. Solitary Wave Solutions for variant Boussinesq equations. *Phys. Lett. A*, 1995, 199 :169 ~ 172

2 Wang M L, Zhou Y B and Li Z B. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics. *Phys. Lett. A*, 1996, 216 :67 ~ 75

3 Yang L, Zhu Z and Wang Y. Exact solutions of nonlinear equations. *Phys. Lett. A*, 1999, 260 :55 ~ 59

4 范恩贵, 张鸿庆. 非线性孤子方程的齐次平衡法. 物理学, 1998, 47 :353 ~ 362 (Fan E G and Zhang H Q. The homogeneous balance method for solving nonlinear soliton equations. *Acta Phys. Sin.*, 1998, 47 :353 ~ 362 (in Chinese)

5 范恩贵. 齐次平衡法、Weiss – Tabor – Carnevale 法及 Clarkson – Kruskal 约化法之间的联系. 物理学报, 2000, 49 :1409 ~ 1412 (Fan E G. Connections among homogeneous balance method, Weiss – Tabor – Carnevale method and Clarkson – Kruskal method. *Acta Phys. Sin.*, 2000, 49 :1409 ~ 1412 (in Chinese))

6 Yan C. A simple transformation for nonlinear waves. *Phys. Lett. A*, 1996, 224 :77 ~ 84

7 刘式适, 付遵涛, 刘式达, 赵强. Jacobi 椭圆函数展开法及其在求解非线性波动方程中的应用. 物理学报, 2001, 50 :2068 ~ 2073 (Liu S K, Fu Z T, Liu S D and Zhao Q. Expansion method about the Jacobi elliptic function and its applications to nonlinear wave equations. *Acta Phys. Sin.*, 2001, 50 :2068 ~ 2073 (in Chinese))

8 刘式适, 付遵涛, 刘式达, 赵强. 变系数非线性方程的 Jacobi 椭圆函数展开解. 物理学报, 2002, 51 :1923 ~ 1926 (Liu S K, Fu Z T, Liu S D and Zhao Q. Jacobi elliptic function expansion solution to the variable coefficient nonlinear equations. *Acta Phys. Sin.*, 2002, 51 :1923 ~ 1926 (in Chinese))

9 Fu Z T et al. Solutions to generalized mKdV equation. *Commun. Theor. Phys.*, 2003, 40 :641 ~ 644

10 付遵涛, 刘式适, 刘式. 非线性波方程求解的新方法. 物理学报, 2004, 53 :343 ~ 348 (Fu Z T, Liu S K and Liu S D. A new method to construct solutions to nonlinear wave equations. *Acta Phys. Sin.*, 2004, 53 :343 ~ 348 (in Chinese))

11 Parkes E J and Duffy B R. Travelling solitary wave solutions to a compound KdV – Burgers equation. *Phys. Lett. A*, 1997, 229 :217 ~ 220

12 Fan E G. Extended tanh – function method and its applications to nonlinear equations. *Phys. Lett. A*, 2000, 277 : 212 ~ 218

13 Yang L, Liu J and Yang K. Exact solutions of nonlinear PDE, nonlinear transformations and reduction of nonlinear PDE to a quadrature. *Phys. Lett. A*, 2001, 278 :267 ~ 270

14 张桂戌等. 非线性波方程的精确孤立波解. 中国科学, 2000, 30 :1103 ~ 1108 (Zhang G X et al. Exact solitary wave solutions for nonlinear wave equations. *Science in China* (series A), 2000, 30 :1103 ~ 1108 (in Chinese))

15 Kudryashov NA Exact solutions of the generalized Kuramoto – Sivashinsky equation. *Phys. Lett. A*, 1990, 147 :287 ~ 292

16 Otwinowski M, Paul R, L aidlaw W G. Exact travelling wave solutions of a class of nonlinear diffusion equations by reduction to a quadrature. *Phys. Lett. A*, 1988, 128 :483 ~ 489

17 刘式适等. 求某些非线性偏微分方程特解的一个简洁方法. 应用数学和力学, 2001, 22 (3) :281 ~ 286 (Liu S K, et al. A simple fast method in finding particular solutions of some nonlinear PDE. *Appl. Math. Mech.*, 2001, 22 (3) :281 ~ 286 (in Chinese))

18 谢元喜, 唐驾时. 求一类非线性偏微分方程解析解的一种简洁方法. 物理学报, 2004, 53 (9) :2828 ~ 2830 (Xie Y X and Tang J S. A simple fast method in finding the analytical solutions to a class of nonlinear partial differential equations. *Acta Phys. Sin.*, 2004, 53 (9) :2828 ~ 2830 (in Chinese))

19 谢元喜, 唐驾时. 对"求一类非线性偏微分方程解析解的一种简洁方法"一文的一点注记. 物理学报, 2005, 54 (3) :1036 ~ 1038 (Xie Y X and Tang J S. A note on paper "A simple fast method in finding the analytical solutions to a class of nonlinear partial differential equations". *Acta Phys. Sin.*, 2005, 54 (3) :1036 ~ 1038 (in Chinese))

20 刘式适, 刘式达. 物理学中的非线性方程. 北京 :北京大学出版社, 2000 :23 ~ 25, 167 ~ 170 (Liu S K and Liu S D. Nonlinear Equations in Physics. Beijing :Peking University Press, 2000 :23 ~ 25, 167 ~ 170 (in Chinese))

21 谢元喜, 唐驾时. 求一类非线性偏微分方程精确解的简化试探函数法. 动力学与控制学报, 2005, 3 (1) : 15 ~ 18 (Xie Yuanxi, Tang Jiashi. A simplified trial function method for seeking the exact solutions to a class of non-

linear PDEs. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(1):15~18 (in Chinese))

22 胡彦梅,陈建忠,封建湖. 一种基于 WENO 重构的半离散中心迎风格式. 动力学与控制学报,2005,3(2):54~59(Hu Yanmei, Chen Jianzhong , Feng Jianhu. A semi-discrete central-upwind scheme based on WENO reconstruction. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(2):54~59 (in Chinese))

23 李雪臣,申建伟. 一类非线性波方程尖波解及其动力学性质的分析. 动力学与控制学报,2006,4(1):22~26(Li Xuechen, Shen Jianwei. Cusp wave solutions and dynamical behaviors in a class of nonlinear equation. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(1):22~26 (in Chinese))

EXACT SOLUTIONS OF BURGERS EQUATION*

Yang Xianlin

(*College of Mechanics and Aerospace*, *Hunan University*, *Changsha* 410082, *China*)

(*Hunan Radio and Television University*, *Changsha* 410004, *China*)

Abstract By introducing a new transformation, a nonlinear second-order partial differential equation—Burgers equation can be converted to a nonlinear first-order equation, which can be solved directly. Furthermore, the new exact analytical solutions of the Burgers equation can be derived, and the results obtained are in good agreement with those given in other papers. This method can also be used to solve other nonlinear partial differential equations.

Key words nonlinear partial differential equations, Burgers equation, exact solution

Received 23 April 2006.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10472029).