

松弛状态圆截面螺旋细杆的弹性波传播*

刘延柱 盛立伟

(上海交通大学工程力学系,上海 200030)

摘要 研究松弛状态下的圆截面弹性螺旋细杆,即带有原始曲率和挠率的非圆截面弹性杆的动力学问题. 基于 Kirchhoff 动力学比拟,建立欧拉角表达的弹性杆动力学方程. 考虑截面的线加速度和角加速度的惯性效应. 在一次近似意义下讨论松弛状态圆截面螺旋杆的静态和动态稳定性. 证明在空间域内保持静态稳定,在波数大于1条件下亦满足时域内的动态稳定性条件. 讨论弯扭变形弹性波在螺旋杆内的传播,导出波速与波数之间的对应关系.

关键词 弹性细杆, Kirchhoff 动力学比拟, 稳定性, 弹性波传播

引言

弹性杆非线性力学的理论基础为1859年 Kirchhoff 的动力学比拟理论^[1,2]. 由于弹性细杆作为 DNA 宏观力学模型研究工作的兴起而重新引起注意^[3]. 在关于弹性杆动力学问题的文献中,无原始曲率的弹性杆为主要研究对象^[4~6]. Bishop 等讨论了带原始扭率弹性杆内弹性波的传播^[7]. 松弛状态下无原始曲率的直杆必需在轴向压力作用下才能维持螺旋线平衡,而自然界中普遍存在的实际螺旋细杆,如卷曲的短纤维、DNA、螺旋杆菌等常处于松弛状态,不能直接引用轴向受压状态螺旋杆的分析结论. 作者在文[8]中仅考虑截面角加速度的惯性效应,基于简化的弹性杆动力学方程分析了松弛状态非圆截面螺旋杆的静态和动态稳定性. 本文以松弛状态的圆截面螺旋杆为对象,建立欧拉角表达的弹性杆动力学方程. 在一次近似意义下讨论松弛状态下圆截面螺旋杆的静态和动态稳定性. 分析表明,松弛螺旋杆在空间域内保持静态稳定,与文献[8]的结论一致. 考虑截面线加速度的惯性效应,在波数大于1条件下亦满足时域内的动态稳定性. 讨论弯扭变形弹性波在螺旋杆内的传播,导出波速与波数之间的对应关系,并考虑截面转动惯性效应的影响.

1 松弛圆截面杆的动力学方程组

设圆截面弹性细杆满足不可伸长、无弯曲剪切

变形、均匀、线弹性、无分布力等条件,在松弛状态下其中心线呈现半径为 R ,倾角为 α 的螺旋线形态. 引入参数 $\theta = \pi/2 - \alpha$, $\omega_0 = \sin\theta_0/R$,杆在松弛状态下具有原始曲率 κ^0 和原始挠率 τ^0 :

$$\kappa^0 = \omega_0 \sin\theta, \tau^0 = \omega_0 \cos\theta_0 \quad (1)$$

以固定点 O 为原点,建立固定参考坐标系 $(O - \xi\eta\zeta)$,平移至杆中心线上任意点 P ,令 $(P - \xi\eta\zeta)$ 绕 ζ 轴转过 ψ 角后的位置为 $(P - x_1y_1z_1)$, $(P - x_1y_1z_1)$ 绕 x_1 轴转过角后的位置为 $(P - x_2y_2z_2)$,绕 z_2 轴转过 φ 角后的位置与截面主轴坐标系 $(P - xyz)$ 重合. z_2 和 z 轴沿杆中心线的切线. ψ, θ, φ 为确定截面姿态的欧拉角. 杆的原始螺旋线状态可用欧拉角表示为 $\theta = \theta_0$, $d\psi/ds = \omega_0$, $\varphi = 0$,在螺旋线状态下 $(P - x_2y_2z_2)$ 坐标系为 Frenet 坐标系. 以端点 P_0 为原点,沿杆中心线建立弧坐标 s 以确定 P 点的位置. 设截面的弯扭度在截面坐标系 $(P - xyz)$ 中的投影为 $\omega_i (i = 1, 2, 3)$,则截面内力的主矩 M 的投影为

$$M_1 = A\omega_1, M_2 = C(\omega_2 - \kappa^0), M_3 = C(\omega_3 - \tau^0) \quad (2)$$

其中 $A = EI_1$, $C = GI_3$ 为杆相对 x, y 轴的抗弯刚度和相对 z 轴的抗扭刚度. E, G 分别为杆的杨氏模量和剪切模量,杆为均匀各向同性时 $G = E/2(1 + \nu)$, ν 为泊松比. I_1, I_3 分别为截面相对 x, y 轴的惯性矩和极惯性矩. 讨论弹性杆的动力学问题时,应将弹性杆视为具有弧坐标 s 和时间 t 双重自变量的离散系统. 对截面微元体列写相对截面中心的动量

矩定理 得到

$$\frac{\bar{\partial} M}{\partial s} + \omega_F \times M - \frac{\bar{\partial}}{\partial t} (J \cdot \Omega) - \Omega_F \times (J \cdot \Omega) + e_3 \times F = 0 \quad (3)$$

其中波浪号表示相对 Frenet 坐标系 ($P-x_2y_2z_2$) 的局部导数, J 为单位长度杆的惯量张量, Ω 为截面的角速度矢量. 对截面微元体列写动量定理, 且对 s 求偏导, 得到

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - \rho S \frac{\partial^2 \nu}{\partial s \partial t} = 0 \quad (4)$$

从运动学关系 $\partial \nu / \partial s = \partial e_3 / \partial t$ 出发, 上式第二项可写作

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial s \partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial e_3}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\Omega_F \times e_3) \quad (5)$$

将式(5)代入式(4), 令求导过程相对 Frenet 坐标系进行, 得到

$$\frac{\bar{\partial}^2 F}{\partial s^2} + \frac{\bar{\partial}^2 \omega_F}{\partial s} \times F + 2\omega_F \times \frac{\bar{\partial} F}{\partial s^2} + \omega_F \times (\omega_F \times F) - \rho S \left[\frac{\bar{\partial}}{\partial t} \Omega_F \times e_3 + \Omega_F \times (\Omega_F \times e_3) \right] = 0 \quad (6)$$

将方程(3)(6)投影到 Frene 坐标系 ($P-x_2y_2z_2$), 矢量 ω , ω_F , Ω , Ω_F 在 ($P-x_2y_2z_2$) 中的投影记作 ω_i , Ω_i , ω_{Fi} , Ω_{Fi} ($i=1, 2, 3$), 导出动力学方程组:

$$A \frac{\partial \omega_1}{\partial s} + C \omega_{F2} (\omega_3 - \tau^0) - A \omega_{F3} (\omega_2 - \kappa^0) - F_2 - J_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} - J_3 \Omega_{F2} \Omega_3 + J_1 \Omega_{F3} \Omega_2 = 0 \quad (7a)$$

$$A \frac{\partial \omega_2}{\partial s} + A \omega_{F3} \omega_1 - C \omega_{F1} (\omega_3 - \tau^0) + F_1 - J_1 \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} - J_1 \Omega_{F3} \Omega_1 + J_3 \Omega_{F1} \Omega_3 = 0 \quad (7b)$$

$$C \frac{\partial \omega_3}{\partial s} - A \kappa^0 \omega_{F1} - J_3 \frac{\partial \Omega_3}{\partial t} = 0 \quad (7c)$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial s^2} + 2(\omega_{F2} \frac{\partial F_3}{\partial s} - \omega_{F3} \frac{\partial F_2}{\partial s}) + ((\frac{\partial \omega_{F2}}{\partial s})^2 + \omega_{F1} \omega_{F3}) F_3 - ((\frac{\partial \omega_{F3}}{\partial s})^2 - \omega_{F1} \omega_{F2}) F_2 - (\omega_{F2}^2 + \omega_{F3}^2) F_1 - \rho S \left(\frac{\partial \Omega_{F2}}{\partial t} + \Omega_{F1} \Omega_{F3} \right) = 0 \quad (7d)$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial s^2} + 2(\omega_{F3} \frac{\partial F_1}{\partial s} - \omega_{F1} \frac{\partial F_3}{\partial s}) + ((\frac{\partial \omega_{F3}}{\partial s})^2 + \omega_{F1} \omega_{F2}) F_1 - ((\frac{\partial \omega_{F1}}{\partial s})^2 - \omega_{F2} \omega_{F3}) F_3 - (\omega_{F3}^2 +$$

$$\omega_{F1}^2) F_2 + \rho S \left(\frac{\partial \Omega_{F1}}{\partial t} - \Omega_{F2} \Omega_{F3} \right) = 0 \quad (7e)$$

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial s^2} + 2(\omega_{F1} \frac{\partial F_2}{\partial s} - \omega_{F2} \frac{\partial F_1}{\partial s}) + ((\frac{\partial \omega_{F1}}{\partial s})^2 + \omega_{F2} \omega_{F3}) F_1 - ((\frac{\partial \omega_{F2}}{\partial s})^2 - \omega_{F1} \omega_{F3}) F_1 - (\omega_{F1}^2 + \omega_{F2}^2) F_3 + \rho S \left(\Omega_{F1}^2 + \Omega_{F2}^2 \right) = 0 \quad (7f)$$

其中 $J_i = \rho I_i$ ($i=1, 3$) 为单位长度杆相对主轴的转动惯量, ρ 为杆的密度. 转动惯量与杆的抗弯和抗扭刚度之间有以下关系:

$$J_1 = \frac{\rho A}{E}, \quad J_3 = \frac{\rho C}{G} = \frac{2\rho(1+\nu)C}{E} \quad (8)$$

方程组(7)中的 ω_i , Ω_i , ω_{Fi} , Ω_{Fi} ($i=1, 2, 3$), 可利用截面姿态的欧拉角 ψ , θ , φ 表示为

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{F1} = \frac{\partial \theta}{\partial s}, & \omega_2 &= \omega_{F2} = \frac{\partial \psi}{\partial s} \sin \theta \\ \omega_3 &= \frac{\partial \psi}{\partial s} \cos \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial s}, & \omega_{F3} &= \frac{\partial \psi}{\partial s} \cos \theta \\ \Omega_1 &= \Omega_{F1} = \frac{\partial \theta}{\partial t}, & \Omega_2 &= \Omega_{F2} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \sin \theta \\ \Omega_3 &= \frac{\partial \psi}{\partial t} \cos \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial t}, & \Omega_{F3} &= \frac{\partial \psi}{\partial t} \cos \theta \end{aligned} \quad (9)$$

2 静态稳定性分析

方程组(7)的以下特解表示松弛的螺旋线状态:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{F1} = 0, & \omega_2 &= \omega_{F2} = \kappa^0, & \omega_3 &= \omega_{F3} = \tau^0 \\ \Omega_i &= \Omega_i = F_i = 0 \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (10)$$

对应于欧拉角的特解:

$$\theta = \theta_0, \quad \psi = \omega_0 s, \quad \varphi = 0, \quad F_i = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (11)$$

弹性杆的静力学方程为动力学方程的特例. 设各变量均为弧坐标 s 的一元函数, $\Omega = 0$ 且, 由于无外力和分布力, 截面内力主矢 F 恒等于零, 方程组(7)的前三个方程转化为封闭的静力学平衡方程组:

$$A \frac{d\omega_1}{ds} + C \omega_{F2} (\omega_3 - \tau^0) - A \omega_{F3} (\omega_2 - \kappa^0) = 0 \quad (12a)$$

$$A \frac{d\omega_2}{ds} + A \omega_{F3} \omega_1 - C \omega_{F1} (\omega_3 - \tau^0) = 0 \quad (12b)$$

$$C \frac{d\omega_3}{ds} - A \kappa^0 \omega_{F1} = 0 \quad (12c)$$

引入无量纲化的弧坐标 \bar{s} 及无量纲扰动量 x_i ($i=1, 2, 3$):

$$\bar{s} = \omega_0 s, \quad x_1 = \theta - \theta_0, \quad x_2 = \psi - \bar{s}, \quad x_3 = \varphi \quad (13)$$

变量 x_i ($i=1, 2, 3$) 均为弧坐标 \bar{s} 的函数. 用撇号表示对 \bar{s} 的导数, 略去扰动量的二次以上微量, 得到

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_{F1} = \omega_0 x_1' \\ \omega_2 &= \omega_{F2} = \omega_0 [\cos\theta_0 x_1' + \sin\theta_0 (1 + x_2')] \\ \omega_3 &= \omega_{F3} + \omega_0 x_3' = \omega_0 [-\sin\theta_0 x_1' + \\ &\quad \cos\theta_0 (1 + x_2') + x_3']\end{aligned}\quad (14)$$

代入方程组(12), 导出螺旋杆平衡状态相对弧坐标的一次近似扰动方程:

$$(1+v)x_1'' - (1+v\cos^2\theta_0)x_1' - v\cos\theta_0\sin\theta_0 x_2' + \sin\theta_0 x_3' = 0 \quad (15a)$$

$$2\cos\theta_0 x_1' + \sin\theta_0 x_2'' = 0 \quad (15b)$$

$$-(2+v)\sin^2\theta_0 x_1' + \cos\theta_0 x_2'' + x_3'' = 0 \quad (15c)$$

其中 v 为无量纲参数:

$$v = \frac{A}{C} - 1 \quad (16)$$

对于均匀各向同性的圆截面杆, V 等于泊松比. 将以下指数形式特解代入扰动方程组(15):

$$x_i(\bar{s}) = x_{i0} \exp(\lambda \bar{s}) \quad (i=1, 2, 3) \quad (17)$$

导出特征方程:

$$(\lambda^2 + 1)\lambda^4 \sin\theta_0 = 0 \quad (18)$$

在 $\theta_0 \neq 0$ 条件下, 特征方程(18)除零根外为纯虚根, 表明松弛状态的螺旋杆在一次近似意义下恒满足 Lyapunov 稳定性条件. 与文献[8]中仅考虑截面角加速度惯性效应的分析结果一致. 令 $\lambda = \pm ik$, k 为受扰挠性线相对无量纲弧坐标的角频率, 对应的波长为 $2\pi/k\omega_0$. 匝数为 N 的螺旋杆长度为 $L = 2\pi N/\omega_0$, 则受扰挠性线的总波数为 kN , 参数 k 为单圈螺旋线内的波数. 从式(18)可推知, 静态受扰挠性线的波数 $k=1$.

3 动态稳定性

讨论弹性杆的动力学问题, 必须将弹性杆视为具有弧坐标 s 和时间 t 双重自变量的离散系统^[6,7]. 定义无量纲化的时间变量 \bar{t} 和参数 ε :

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{C}{\rho S}} \omega_0^2 t, \quad \varepsilon = \frac{I\omega_0^2}{S} \quad (19)$$

其中 I 为截面惯性矩, S 为截面面积. 各扰动量 x_i ($i=1, 2, 3$) 均为弧坐标 \bar{s} 和时间 \bar{t} 的多元函数. 用点号表示对 \bar{t} 的偏导数, 在一次近似范围内, 受扰运动的角速度分量为

$$\Omega_1 = \Omega_{F1} = \sqrt{\frac{C}{\rho S}} \omega_0^2 \dot{x}_1,$$

$$\Omega_2 = \Omega_{F2} = \sqrt{\frac{C}{\rho S}} \omega_0^2 \sin\theta_0 \dot{x}_2,$$

$$\Omega_{F3} = \sqrt{\frac{C}{\rho S}} \omega_0^2 \cos\theta_0 \dot{x}_2, \quad \Omega_3 = \Omega_{F3} + \sqrt{\frac{C}{\rho S}} \omega_0^2 \dot{x}_3 \quad (20)$$

引入扰动量:

$$x_{3+i} = \frac{F_i}{C\omega_0^2} \quad (i=1, 2, \dots) \quad (21)$$

代入动力学方程组(7), 利用式(8)将转动惯量用刚度系数表示, 导出螺旋杆在平衡状态附近的一次近似动态扰动方程:

$$(1+v)x_1'' - \varepsilon \dot{x}_1 - (1+v\cos^2\theta_0)x_1' - v\cos\theta_0\sin\theta_0 x_2' + \sin\theta_0 x_3' - x_5 = 0 \quad (22a)$$

$$(1+v)(2\cos\theta_0 x_1' + \sin\theta_0 x_2'') - \varepsilon \ddot{x}_2 + x_4 = 0 \quad (22b)$$

$$-(2+v)\sin\theta_0 x_1' + \cos\theta_0(x_2'' - 2\varepsilon \ddot{x}_2) + x_3'' - 2\varepsilon \ddot{x}_3 = 0 \quad (22c)$$

$$-\ddot{x}_2 \sin\theta_0 + x_4'' - x_4 - 2x_5' \cos\theta_0 + 2x_6' \sin\theta_0 = 0 \quad (22d)$$

$$\ddot{x}_2 + 2x_4 \cos\theta_0 + x_5'' - x_5 \cos^2\theta_0 + x_6 \cos\theta_0 \sin\theta_0 = 0 \quad (22e)$$

$$-2x_4' \sin\theta_0 + x_5 \cos\theta_0 \sin\theta_0 + x_6'' - x_6 \sin^2\theta_0 = 0 \quad (22f)$$

其中撇号和点号表示对 \bar{s} 和 \bar{t} 的偏导数. 由于 $\omega_0 = \sin\theta_0/R$, 且 $I \sim r^4$, $S \sim r^2$, r 为截面的平均半径, 则参数 $\varepsilon \sim (r/R)^2$. 弹性杆极端细长时 $R \gg r$, ε 为无限小量. 上节已证明松弛状态螺旋杆的静态稳定性, $\lambda = \pm ik$, k 为单圈螺旋线内受扰挠性线的波数. 将以下指数形式特解代入方程组(22)

$$x_i(\bar{s}, \bar{t}) = x_{i0} \exp(ik\bar{s} + w\bar{t}) \quad (i=1, 2, 3) \quad (23)$$

暂不考虑 ε 参数体现的截面转动惯性效应, 令 $\varepsilon = 0$, 导出特征方程:

$$a(k, \theta_0)w^4 + b(k, \theta_0)w^2 + c(k, \theta_0) = 0 \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned}a(k, \theta_0) &= k^2 + \sin^2\theta_0 \\ b(k, \theta_0) &= (1+v)k^2[2k^2(k^2-1) + \\ &\quad (1+11k^2)\cos^2\theta_0] \\ c(k, \theta_0) &= (1+v)^2 k^4 (k^2-1)^3\end{aligned}\quad (25)$$

时间域特征值 w 的纯虚根条件为

$$a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad b^2 - 4ac > 0 \quad (26)$$

可以证明:

$$b(k, \theta_0) > (1 + \nu)k^2(k^2 - 1)(2k^2 + 11\cos^2\theta_0) \quad (27)$$

利用不等式(27)进一步证明:

$$b^2 - 4ac > 4(k^2 - 1)^2[4\sin^2\theta_0 + (8k^2 + 121\cos^2\theta_0)] > 0 \quad (28)$$

若 $k=1$ 则条件(26)全部得到满足. 从而证明 松弛圆截面螺旋杆的波数大于1的受扰挠性线满足时域内的稳定性必要条件.

4 弯扭弹性波

在满足动态稳定性条件下 令 $w = i\mu$ μ 为受扰运动的时域频率. 代入式(24)后导出不同倾角的螺旋杆内弯扭弹性波的传播速 $c_w = \mu/k$ 度随波数 k 之间的对应关系 在图1中给出.

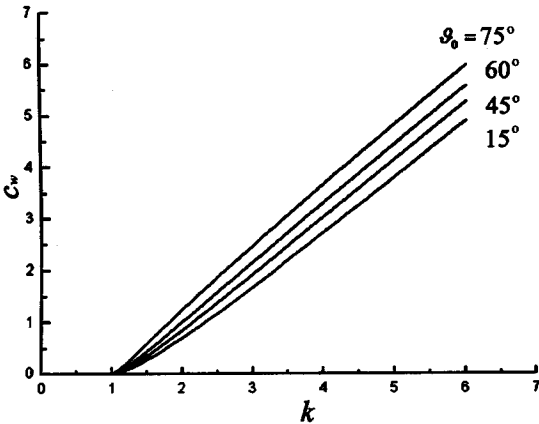


图1 弹性波传播速度 C_w 与波数 k 之间的对应关系

The relationship between propagation speed C_w and wave number k

图1表明,弯扭弹性波在松弛螺旋杆内的传播速度随波数增大,与 Bishop 等计算的带原始扭率直杆情形类似^[7]. 为估计截面转动的惯性效应对弹性波传播速度的影响 将时域频率 μ 展成小参数 ε 的幂级数:

$$\mu = \mu_0 + \varepsilon\mu_1 + \varepsilon^2\mu_2 + L \quad (29)$$

其中 μ_0 为方程(24)解出的零次近似值.

$$\mu_0 = \left\{ \frac{b(k, \theta_0)m\sqrt{b^2(k, \theta_0) - 4a(k, \theta_0)c(k, \theta_0)}}{2a(k, \theta_0)} \right\}^{1/2} \quad (30)$$

考虑式(29)中的一次项,从特征方程(24)导出

$$\mu_1 = -\frac{C_1}{2k^2[b(k, \theta_0) - 2a(k, \theta_0)\mu_0^2]\sin\theta_0} \quad (31)$$

其中

$$C_1 = a_0 + a_1k^2 + a_2k^4 + a_3k^6 + a_4k^8 + a_5k^{10} \quad (32)$$

系数 $a_i (i=0, 1, \dots, 5)$ 定义为

$$\begin{aligned} a_0 &= 2\mu_0^5 \sin^3\theta_0 \\ a_1 &= -\mu_0^3 [2(1+\nu) + 2\sin^2\theta_0 + \sin\theta_0 - 2\mu_0^2] \\ a_2 &= \mu_0 \{ (1+\nu) [1 - 2(1+\nu)\sin\theta_0 - 2\sin^2\theta_0 + 2(2+\nu)\sin^3\theta_0] + [(19+18\nu) \times \sin\theta_0 + 3\sin^2\theta_0 + 2(9+10\nu)\sin^3\theta_0 - 1] \mu_0^2 \} \\ a_3 &= \mu_0 \{ (1+\nu) [(7+6\nu)\sin\theta_0 + 4\sin^2\theta_0 - 4(2+\nu)\sin^3\theta_0] - [1 + (5+4\nu)\sin\theta_0] \mu_0^2 \} \\ a_4 &= -\mu_0(1+\nu) [1 + 2(4+3\nu)\sin\theta_0 + 2\sin^2\theta_0 - 2(2+\nu)\sin^3\theta_0] \\ a_5 &= \mu_0(1+\nu) [1 + (3+2\nu)\sin\theta_0] \end{aligned} \quad (33)$$

以 $\theta_0 = 45^\circ$ 情形为例 ε 对弹性波传播速度 c_w 的影响如图2所示.

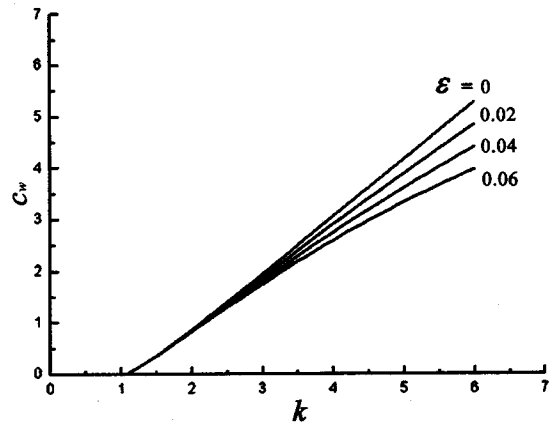


图2 参数 ε 对弹性波传播速度的影响

The influence of parameter ε on elastic wave propagation

图2表明,弹性波的波数较小时,其传播速度受截面转动惯性效应的影响并不显著.影响仅发生于波数较大情形.

5 结论

应用欧拉角表达的弹性杆动力学方程,分析了松弛状态圆截面螺旋杆的稳定性和弹性波的传播.在一次近似意义下证明松弛的螺旋线平衡状态恒满足静态稳定性条件,在波数大于1条件下亦满足时域内的动态稳定性.讨论了弯扭变形弹性波在螺旋杆内的传播,导出波速与波数之间的对应关系,并考虑了截面转动惯性效应的影响.

参 考 文 献

- 1 Love A E H. A treatise on mathematical theory of elasticity. 4 - th ed. New York :Dover ,1927
- 2 刘延柱. 弹性细杆的非线性力学. 北京 :清华大学出版社/Springer ,2006 (Liu Yanzhu. Nonlinear mechanics of thin elastic rod. Beijing :Tsing Hua University Press/Springer ,2006 (in Chinese))
- 3 Klapper I. Biological applications of the dynamics of twisted elastic rods. *J. Of Computational Physics* ,1996 ,125 (2) :325 ~ 337
- 4 Goriely A , Shipman P. Dynamics of helical strips. *Physical Review E* ,2000 ,61(4) :4508 ~ 4517.
- 5 刘延柱, 薛纭. 弹性细杆螺旋线平衡的动态稳定性. 力学季刊 2005 ,26(1) :1 ~ 7(Liu Yanzhu , Xue Yun. Dynamical stability of helical equilibrium of thin elastic rod. *Chinese Quarterly of Mechanics* ,2005 ,26(1) :1 ~ 7 (in Chinese))
- 6 刘延柱. 黏性介质中圆截面弹性细杆的平面振动. 物理学报 2005 ,54(11) :4989 ~ 4993(Liu Yanzhu. Planar vibration of a thin elastic rod with circular cross section in viscous medium. *Chinese Physics* ,2005 ,54(11) :4989 ~ 4993(in Chinese))
- 7 Bishop T C , Corez R , Zhmudsky O O. Investigation of bend and shear waves in a geometrically exact elastic rod model. *J. of Computational Physics* ,2004 ,193 :642 ~ 665
- 8 刘延柱. 松弛状态非圆截面弹性螺旋细杆的稳定性. 动力学与控制学报 2005 ,3(4) :12 ~ 16(Liu Yanzhu. Stability of a thin elastic rod with noncircular cross section in relaxed state. *J. of Dynamics and Control* ,2005 ,3(4) :12 ~ 16 (in Chinese))

ELASTIC WAVE PROPAGATION OF A THIN HELICAL ROD WITH CIRCULAR CROSS SECTION IN RELAXED STATE *

Liu Yanzhu Sheng Liwei

(Department of Engineering Mechanics , Shanghai Jiao Tong University , Shanghai 200030 , China)

Abstract The dynamics of a thin elastic helical rod with circular cross section in relaxed state , i. e. , the dynamics of a rod with intrinsic curvature and twisting , was discussed. Based on the Kirchhoff's kinetic analogy , the dynamical equations of the elastic rod were expressed by the Euler's angles. The inertial effects of the linear and angular accelerations of the cross section were considered. The stability in spatial and time domain of a helical rod with circular cross section in relaxed state was discussed in the sense of first approximation. We proved that the stability conditions were satisfied in the spatial domain , and in the time domain when the wave number was larger than 1. The propagation of the elastic wave of bending/twisting deformation was discussed , and the relationship between the propagation speed and the wave number was obtained.

Key words thin elastic rod , Kirchhoff's kinetic analogy , stability , propagation of elastic wave