

多体系统中规则柔性板的离散建模方法研究

王远锋¹ 杨雷² 水小平¹

(1. 北京理工大学力学系, 北京 100081) (2. 中国空间技术研究院, 北京 100086)

摘要 把柔性梁的离散坐标法——有限段法扩展到规则柔性板中,视柔性板为带关节柔性(刚度、阻尼)的多刚体系统,详细阐述了离散坐标法的基本思想、理论依据,采用牛顿-欧拉方法建立了动力学方程。借助通用有限元软件和动力学仿真程序验证了离散坐标法可以解决具有几何非线性变形的规则柔性板构件的多体系统动力学问题。

关键词 离散坐标法 柔性板 多刚体模型 动力学方程

引言

机械系统向轻质、重载、高精度方向发展,使得构件柔性的影响不能被忽略,航天器太阳帆板就是一个典型的柔性多体系统,目前柔性太阳帆板的建模大多采用浮动坐标系的刚体运动和模态柔性相结合的混合坐标法。在太阳阵的研制过程中要做大量的地面展开试验,以便验证太阳阵的释放、展开、锁定等功能和性能,由于太阳阵的柔性,采用这种方法建模时重力补偿和空气阻力等因素又成为一个新的难题。如果采用刚体和柔性关节相结合的离散坐标法对太阳阵进行建模,将更有利于模拟太阳阵的地面展开试验。1981年Huston提出了柔性体动力学的有限段模型^[1],Amirouche等将其进一步发展^[2],刘又午又将其进一步完善^[3],但上述研究者提出的离散坐标法都是针对梁式构件而言的。本文把离散坐标法扩展到规则柔性板中,用多刚体和多点力单元相结合的方法实现对柔性板的计算仿真。

1 离散坐标法的基本思想

离散坐标法的基本思想是将构件离散化为相互连接的刚体,各刚体之间用假想的无质量弹簧和黏性阻尼器等柔性关节连接,用离散的刚体表示柔性体的质量和惯性特性,用刚体间的柔性关节代表柔性体的弹性,建立由刚体间相对(角)速率的动力学方程,柔性体只要划分的刚体足够小就可以比较准确地描述柔性构件的运动。柔性体经离散坐标法

离散后,可视为带有关节柔性(刚度、阻尼)的多刚体系统,关节柔性即为刚体内弹性和结构阻尼特性向刚体间结点的等效移置,而作用于各刚体的主动力和惯性力均向其质心等效移置,刚体间位移表达了柔性体的弹性变形,弹性变形引起的弹性恢复力(矩)则计入对广义主动力的贡献,最终归结为建立柔性体的刚度方程^[4]。

2 离散坐标法的理论依据

离散坐标法的理论依据是通过有限元中的GUYAN静态凝聚技术,从一般有限元模型各结点的自由度中选取一部分作为主自由度,而把其余的结点自由度作为副自由度,并借助静力方程消去。因为在较低的振动频率内,作用在副自由度的惯性力很小,则副自由度上的作用力主要是相邻单元主自由度传递的弹性力,因此,副自由度上的惯性力可以略去,也就是将其质量略去,从而整个结构的总质量也只分布在主自由度上。对于规则柔性板很容易地能选取主自由度,最后柔性板可以用刚体和多点力单元替代主节点的质量和弹性,从而达到用带关节柔性的多刚体来仿真一块柔性板的目的。

2.1 GUYAN静态凝聚过程

模型主自由度的选取原则可以参考文献[5],当主自由度选定后,可以根据结构特点选取合适的子结构进行凝聚。当结构承受大变形且结构可以分割成多块相同的部分时应该选取多个子结构。下面以一个子结构且不含阻尼的有限元动力学模型为

例说明静态凝聚过程^[6],动力学方程为

$$M\ddot{u} + Ku = f \quad (1)$$

根据实际需要,可将有限元模型的结点自由度分为主自由度和副自由度 u_m 、 u_s , u_m 为保留自由度, u_s 则是去掉的自由度. 据此,对有限元模型的自由度重新进行排列,并进行分块处理,得

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_m \\ \ddot{u}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_m \\ f_s \end{Bmatrix} \quad (2)$$

由上式的第二行得

$$M_{sm}\ddot{u}_m + M_{ss}\ddot{u}_s + K_{sm}u_m + K_{ss}u_s = f_s \quad (3)$$

根据静态凝聚的基本思想,认为结构在低频内振动时,其惯性力对副自由度的影响比静力小. 因此,若略去惯性力并考虑为自由振动时,上式变为

$$K_{sm}u_m + K_{ss}u_s = f_s \quad (4)$$

由此可得

$$u_s = K_{ss}^{-1}f_s - K_{ss}^{-1}K_{sm}u_m \quad (5)$$

此式只考虑了主自由度与副自由度之间的弹性联系,而未考虑惯性影响,所以是一种静态约束,这种处理对结构的低频模态影响不大.

引入 $m \times m$ 阶单位矩阵 I ,由上式可得

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -K_{ss}^{-1}K_{sm} \end{bmatrix} u_m = Tu_m \quad (6)$$

式中 T 称为坐标转换矩阵.

凝聚前后系统的动能和势能可分别表示为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \dot{u}^T M \dot{u} = \frac{1}{2} u_m^T T^T M T u_m \\ U &= \frac{1}{2} u^T K u = \frac{1}{2} u_m^T T^T K T u_m \end{aligned} \quad (7)$$

结合式(6)和式(7)可得系统有限元模型凝聚后的质量矩阵和刚度矩阵

$$\begin{aligned} \hat{M} &= T^T M T = T^T \begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} T = \\ &M_{mm} - K_{ms}K_{ss}^{-1}M_{sm} - M_{ms}K_{ss}^{-1}K_{sm} + \\ &K_{ms}K_{ss}^{-1}M_{ss}K_{ss}^{-1}K_{sm} \\ \hat{K} &= T^T K T = T^T \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} T = \\ &K_{mm} - K_{ms}K_{ss}^{-1}K_{sm} \end{aligned} \quad (8)$$

凝聚后的结点载荷向量为

$$\hat{f} = T^T f = f_m - K_{ms}K_{ss}^{-1}f_s \quad (9)$$

如果原始有限元中有阻尼阵 C ,则凝聚后的阻

尼矩阵为

$$\begin{aligned} \hat{C} &= T^T C T = T^T \begin{bmatrix} C_{mm} & C_{ms} \\ C_{sm} & C_{ss} \end{bmatrix} T = \\ &C_{mm} - K_{ms}K_{ss}^{-1}C_{sm} - C_{ms}K_{ss}^{-1}K_{sm} + \\ &K_{ms}K_{ss}^{-1}C_{ss}K_{ss}^{-1}K_{sm} \end{aligned} \quad (10)$$

则式(1)凝聚后的有限元模型方程变为

$$\hat{M}\ddot{u}_m + \hat{C}\dot{u}_m + \hat{K}u_m = \hat{f} \quad (11)$$

于是,将一般模型(1)中的自由度数降低为只有凝聚模型(11)中的主自由度的数目.

2.2 离散后刚体间弹性力(矩)的确定

柔性梁的关节柔性参数可以借助静力方程和弹性理论知识得到,然后用无质量弹簧和阻尼器连接段刚体,但对于柔性板,由于离散后各刚体的关联性,刚体间的弹性和阻尼特性只能通过刚度、阻尼矩阵或刚度矩阵、阻尼比形式的多点力单元来实现. 考虑板的小应变条件,可以把柔性板划分一个或多个子结构,对每个子结构必须选取一块刚体的质心作为浮动参考坐标系,其余 n 块刚体的质心(连体基)以这个参考坐标系为参考基,移去参考基的主自由度所对应的刚度阻尼项就可以得到多点力单元的刚度阻尼矩阵,它们的矩阵大小为 $6n \times 6n$.

作用于各连体基上的弹性力向量为

$$F_l = -K(x - l) - C\dot{x} + f_0 \quad (12)$$

其中: K 为多点力单元的刚度矩阵,大小为 $6n \times 6n$; C 为多点力单元的阻尼矩阵,大小为 $6n \times 6n$; x 为弹性变形后各连体基相对于参考基的平动和转动位移向量,大小为 $6n \times 1$; l 为初始时各连体基相对于参考基的平动和转动位移向量,大小为 $6n \times 1$; \dot{x} 为弹性变形后各连体基相对于参考基的平动和转动速度向量,大小为 $6n \times 1$; f_0 为初始时各连体基相对于参考基所加的预载力向量(一般为 0),大小为 $6n \times 1$.

作用于参考基上的反作用力为

$$\begin{aligned} F_{Jtrans} &= - \sum F_{ltrans} \\ F_{Jrot} &= - \sum (F_{lrot} + x_{Jl} \times F_{ltrans}) \end{aligned} \quad (13)$$

trans 代表平移自由度, rot 代表转动自由度.

3 动力学方程的建立

柔性板经离散后的各刚体是受非约束力单元作用的 6 自由度自由运动刚体,没有内部约束力,故可以通过概念明确的牛顿-欧拉方法建立系统

的动力学方程.

3.1 系统运动学描述

为描述刚体在空间的位置和姿态,建立如图 1 所示的离散模型,令基 e 为惯性基,基点为 O_0 ,基 e^0 为相对惯性基已知的动参考基,基点为 O ,基 e^i 为任一刚体 B_i 的连体基,基点为该刚体的质心 C_i . 如将质心关于惯性基与动参考基的矢径分别为 R_i 和 r_i ,基点 O 关于惯性基的矢径记为 R_0 ,则有如下的矢量式

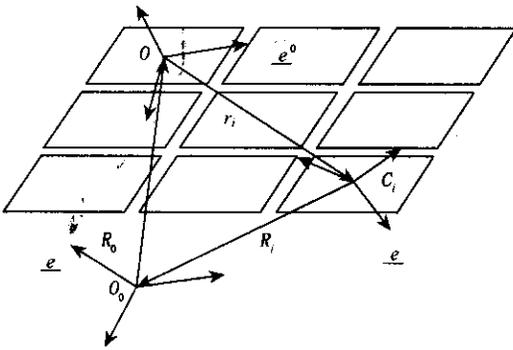


图 1 刚体 B_i 的位置矢量

Fig. 1 Displacement vector of rigid body B_i

$$R_i = R_0 + r_i \quad (14)$$

又令刚体 B_i 与动参考基 e^0 相对惯性基的角速度分别记为 $\hat{\omega}_i$ 和 $\hat{\omega}_0$,刚体 B_i 相对于动参考基的角速度记为 ω_i ,则有如下矢量式

$$\hat{\omega}_i = \hat{\omega}_0 + \omega_i \quad (15)$$

将 (14) 式对时间求一阶与二阶绝对导数,有如下速度和加速度间的关系

$$\begin{aligned} \dot{R}_i &= \dot{R}_0 + \dot{r}_i = \dot{R}_0 + \frac{0d}{dt}r_i + \hat{\omega}_0 \times r_i \\ \ddot{R}_i &= \ddot{R}_0 + \ddot{r}_i = \ddot{R}_0 + \frac{0d^2}{dt^2}r_i + 2\hat{\omega}_0 \times \frac{0d}{dt}r_i + \\ &\quad \hat{\omega}_0 \times r_i + \hat{\omega}_0 \times (\hat{\omega}_0 \times r_i) \end{aligned} \quad (16)$$

式中 $\dot{R} = \frac{d}{dt}R$ 表示在惯性基 e 上矢量 R 对时间求导, $\frac{0d}{dt}$ 表示在动基上对时间求导,故 $\frac{0d}{dt}r_i$ 与 $\frac{0d^2}{dt^2}r_i$ 分别为刚体 B_i 质心相对于动基的速度与加速度.

将 (15) 式对时间求一阶与二阶绝对导数,且考虑到 (15) 式,有如下角加速度间的关系

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\omega}}_i &= \dot{\hat{\omega}}_0 + \dot{\omega}_i = \dot{\hat{\omega}}_0 + \frac{i d}{dt}\omega_i + \hat{\omega}_i \times \omega_i = \\ &\quad \dot{\hat{\omega}}_0 + \frac{i d}{dt}\omega_i + \hat{\omega}_0 \times \omega_i \end{aligned} \quad (17)$$

式中 $\frac{i d}{dt}$ 表示在连体基上对时间求导.

3.2 系统动力学方程

考虑到任一刚体 B_i ,只受重力和刚体间弹性和弹性力矩的作用,根据牛顿-欧拉方法,可以列出单刚体动力学方程

$$m_i \ddot{R}_i = F_i + F_i^n \quad (18)$$

$$\dot{L}_i = M_i^n \quad (19)$$

其中 m_i 为刚体 B_i 的质量, F_i 为刚体的重力, $F_i = (0, 0, m_i g)^T$, F_i^n 和 M_i^n 分别为刚体间作用于 B_i 的弹性和弹性力矩, L_i 为刚体相对于质心的动量矩,令 J_i 为刚体 B_i 关于质心的中心惯量张,它可以表示为

$$L_i = J_i \cdot \hat{\omega}_i \quad (20)$$

把 (16) 式代入 (18) 式,可得刚体质心相对于动基的动力学方程

$$m_i \frac{0d^2}{dt^2}r_i = F_i + F_i^n + F_i^I \quad (21)$$

其中 F_i^I 为惯性力

$$F_i^I = -m_i \cdot [\ddot{R}_0 \times 2\hat{\omega}_0 \times \frac{0d}{dt}r_i + \dot{\hat{\omega}}_0 \times r_i + \hat{\omega}_0 \times (\hat{\omega}_0 \times r_i)] \quad (22)$$

利用矢量求导公式,动量矩定理 (19) 可改写为

$$\frac{i d}{dt}L_i + \hat{\omega}_i \times L_i = M_i^n \quad (23)$$

考虑到惯量张量 J_i 对于连体基为不变张量,且考虑到式 (17),有

$$\begin{aligned} \frac{i d}{dt}L_i &= J_i \cdot \frac{i d}{dt}\hat{\omega}_i = J_i \cdot (\dot{\hat{\omega}}_0 + \hat{\omega}_0 \times \\ &\quad \omega_i) + J_i \cdot \frac{i d}{dt}\omega_i \end{aligned} \quad (24)$$

将其以及式 (20) 与式 (17) 代入式 (23),经整理可得刚体相对于动基的姿态动力学方程

$$\begin{aligned} J_i \cdot \frac{i d}{dt}\omega_i &= -\omega_i \times J_i \cdot \omega_i + M_i^n + \\ &\quad M_i^I = M_i^R + M_i^n + M_i^I \end{aligned} \quad (25)$$

其中 M_i^R 为广义回旋力矩

$$M_i^R = -\omega_i \times J_i \cdot \omega_i \quad (26)$$

M_i^I 为惯性力矩

$$M_i^I = -J_i \cdot (\dot{\hat{\omega}}_0 + \hat{\omega}_0 \times \omega_i) - (\hat{\omega}_0 + \omega_i) \times J_i \cdot \hat{\omega}_0 \times \hat{\omega}_0 \times J_i \cdot \omega_i \quad (27)$$

于是,定义对角阵 $\underline{m}_i = \text{diag}(m_i, m_i, m_i)$,单个刚体 B_i 的动力学方程 (21) 和 (25) 可以合并成统一

形式为

$$\begin{bmatrix} m_i & 0 \\ 0 & J_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r}_i \\ \dot{\omega}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_i^R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i^n \\ M_i^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i^l \\ M_i^l \end{bmatrix} \quad (28)$$

从式(28)中得到除参考基以外的每一块刚体的动力学方程后,就可以把它们组合到一起得到整个带柔性关节多刚体系统的动力学方程。

4 仿真算例

为验证理论模型的可靠性,对柔性的单板为例进行了数值验证。板的尺寸为 $1800 \times 1500 \times 20 \text{ mm}^3$,材料为铝,杨氏模量为 71750 N/mm^2 ,泊松比为 0.33,密度为 $2.74 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ 。

1)借助于通用的有限元软件 ANSYS,采用 6 自由度的 shell63 壳单元,把板划分为 169 个节点、144 个单元的离散模型(如图 2)。然后利用超单元静态凝聚把模型凝聚为 36 个主节点、四个子结构缩减模型(如图 3)。

37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25
38	59	60	81	92	103	114	125	126	147	158	169	24
39	58	61	80	91	102	113	124	135	146	157	168	23
40	57	62	79	90	101	112	123	134	145	156	167	22
41	56	63	78	89	110	111	122	133	144	155	166	21
42	55	64	77	88	99	110	121	132	143	154	165	20
43	54	65	76	87	98	109	120	131	142	153	164	19
44	53	66	75	86	97	108	119	130	141	152	163	18
45	52	67	74	85	96	107	118	129	140	151	162	17
46	51	68	73	84	95	106	117	128	139	150	161	16
47	50	69	72	83	94	105	116	127	138	149	160	15
48	49	70	71	82	93	104	115	126	137	148	159	14
1	3	4	5	6	7	103	9	10	11	12	13	2

图 2 一般模型

Fig. 2 Common model

	59	81	103	125	147	169
	57	79	101	123	145	167
	55	77	99	121	143	165
	53	75	97	119	141	163
	51	73	95	117	139	161
	49	71	93	115	137	159

图 3 缩减模型

Fig. 3 Condensed model

2)因为主自由度的选取直接影响了有限元求解的精度,因此需要对缩减模型的正确性进行校核。把板看成固支——自由模型进行模态分析,取前 5 阶固有频率(如表 1),并将其与一般模型的结果进行比较后,可以看出,主自由度的选取是正确的。

表 1 一般模型和缩减模型固有频率比较

Table 1 Comparison of natural frequency of common model and condensed model

Order number	Common model (Hz)	Condensed model (Hz)	Error(%)
1	0.12351	0.12116	-1.903
2	0.42998	0.42525	-1.100
3	0.87796	0.87614	-0.207
4	1.50880	1.51280	0.265
5	1.65890	1.65880	0.000

3)考虑到柔性规则板的均匀性,柔性板可以离散成 36 块刚体和 4 个多点力单元的多刚体模型。对图 3 中的每个子结构选取适当的浮动参考坐标系,通过 ANSYS 的子结构分析可以得到每个子结构的刚度矩阵,板的阻尼矩阵采用协调阻尼的形式,阻尼系数为 0.02。通过 ANSYS 的静态分析可以得到离散后每块刚体的质量和惯量特性。

4)得到每块刚体的质量、惯量特性和多点力单元的刚度阻尼矩阵后,可以通过动力学仿真程序来验证离散坐标法的可行性,同样取前 5 阶固有频率(如表 2)和第 4 阶、第 6 阶模态振型(如图 4、图 5)并将其与一般模型的结果进行比较,结果说明这种方法对柔性板是行之有效的。

表 2 ANSYS 和离散坐标法固有频率比较

Table 2 Comparison of natural frequency of ANSYS and discrete coordinate method

Order number	ANSYS (Hz)	Discrete coordinate method (Hz)	Error(%)
1	0.12351	0.12395	0.356
2	0.42998	0.41999	-2.232
3	0.87796	0.89048	1.426
4	1.50880	1.54660	2.505
5	1.65890	1.67680	1.079

5 结束语

1)离散坐标方法是基于多刚体动力学理论发展起来的柔性体动力学分析方法,该方法可以较好

地计及刚柔耦合、柔柔耦合及几何非线性的影响,且具有不受小变形限制的的优点,能很好地反映规则柔性板特性,并可以较好地解决数值计算中的病态问题.

2)利用本文建立的规则柔性板的建模方法,在

下一步工作中把太阳阵离散为有限多刚体后可以方便地施加空气阻力,更利于模拟太阳阵的地面展开试验,为太阳阵的设计和研制提供理论分析方法.

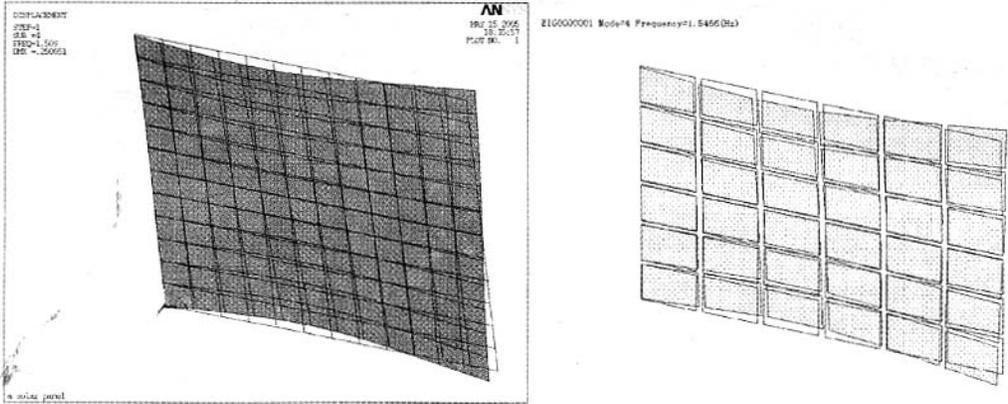


图 4 第 4 阶二阶外弯振型比较

Fig. 4 Comparison of the fourth order and second order external bending modal shape

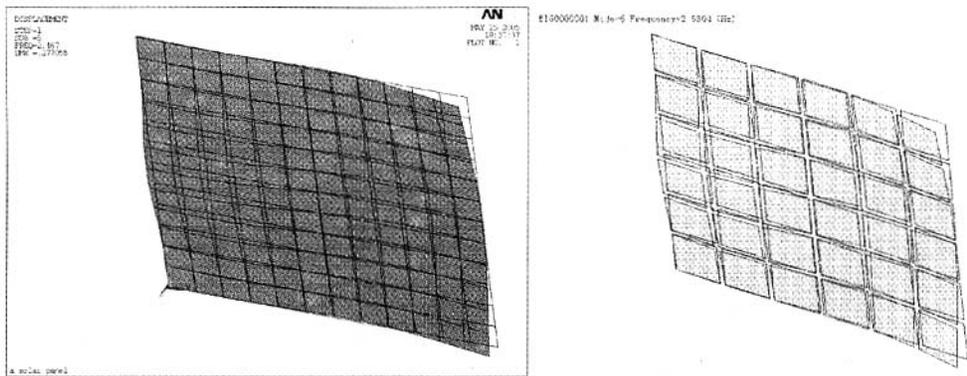


图 5 第 6 阶二阶扭转振型比较

Fig. 5 Comparison of the sixth order and second order torsion modal shape

参 考 文 献

- 1 Huston RL. Multi-body dynamics including the effects of flexibility and compliance. *Computers and Structures*, 1986, 23(6):739~751
- 2 Amirouche FML. Dynamics of large constraint flexible structures. *J. of Dyn. Sys. Mea. and Cont.*, 1988, 110:78~83
- 3 阎绍泽,刘又午,等. 柔性多体系统动力学——有限段方法. *河北工业大学学报*, 1997, 26(3):1~8(Yan Shaoze, LIU Youwu, et al. Dynamics of Flexible Multibody Sys-

- tems —— The Finite Segment Method. *Journal of Hebei University of Technology*, 1997, 26(3):1~8(in Chinese))
- 4 刘又午,阎绍泽,张大均. 计及动力刚化的柔性体动力学. *中国机械工程*, 1997, 8(4):80~84(LIU Youwu, Yan Shaoze, Zhang Dajun. Dynamics of Flexible Bodies Considering the Dynamics Stiffening Terms. *China Mechanical Engineering*, 1997, 8(4):80~84(in Chinese))
- 5 廖伯瑜,周新民,尹志宏. 现代机械动力学及其工程应用. 北京:机械工业出版社, 2004:701(Liao Boyun, Zhou Xinming, Yin Zhihong. Modern Mechanical Dynamics and its application in engineering. Beijing:China Machine

Press 2004 701(in Chinese))

6 Guyan RJ. Reduction of Stiffness and Mass Matrices. *AIAA Journal* 1965 3(2) 56~75

STUDY ON DISCRETE MODELING METHOD OF REGULAR FLEXIBLE PLATE FOR MULTI-BODY SYSTEM*

Wang Yuanfeng¹ Yang Lei² Shui Xiaoping¹

(1. *Department of Mechanics ,Beijing Institute of Technology ,Beijing 100081 ,China*)

(2. *Chinese Academy of Space Technology ,Beijing 100086 ,China*)

Abstract The finite segment method , a discrete coordinate method for a flexible beam , was extended to a regular flexible plate , which is regarded as a multi-rigid bodies system with many compliance (stiffness, damping) joints. The basic idea and theoretical background of the discrete coordinate method were expounded , and the dynamic equation was built by Newton-Euler method. In virtue of finite element software and dynamic simulation program , this paper proved that the discrete coordinate method can be used for dynamic analysis of multi-body systems with regular flexible plate undergoing nonlinear deformations.

Key words discrete coordinate method , flexible plates , multi-body model , dynamic equation