

外扰力矩作用下附三转子航天器混沌动力学分析*

孔令勇 岳宝增

(北京理工大学理学院力学系,北京 100081)

摘要 研究外部扰动力矩作用下航天器的混沌姿态运动,引入 Deprit 正则变量建立系统的 Hamilton 结构. 应用 Melnikov 方法预测系统产生的稳定流形和不稳定流形的横截相交,得到系统产生混沌姿态运动的条件. 研究表明,随着转子转动惯量的增加,引起系统出现混沌姿态运动的激励频率的范围逐渐减小. 最后,对相空间轨线的数值模拟表明理论分析的可靠性.

关键词 航天器姿态动力学,混沌, Melnikov 方法, Deprit 变量

引言

航天器姿态动力学在航空航天领域具有极其重要地位^[1]. 近年来随着以混沌为主要内容的非线性动力学研究热潮的兴起,航天器姿态运动中的混沌现象引起学者的注意^[2,3]. 由 Holmes 和 Marsden 发展的 Melnikov 理论^[4]已被应用于研究近轴对称刚体、参数激励刚体和椭圆轨道上非自旋航天器的混沌运动. Tong 等^[5]研究了均匀引力场中附单个转子的航天器的混沌运动,并且没有考虑外扰力矩的影响. 本文研究了带有三个自旋转子航天器的非线性姿态运动,并且考虑了外部扰动力矩的影响. 引入 Deprit 正则变量,把用欧拉角描述的航天器姿态运动动力学方程转化为标准的 Hamilton 结构形式. 此形式有利于构造 Melnikov 函数来进行理论分析,找到系统产生混沌运动的条件.

1 Deprit 变量下的航天器姿态运动模型

通常,可根据推广的欧拉动力学方程得到航天器姿态运动方程. 本文航天器模型由主体和三个绕其主轴旋转的转子组成. 转子起能量转换的作用,因此被称作“动量矩转换设备”. 航天器在受外部扰动力矩作用时做旋转运动. 航天器主体的动量矩为 $G = A\omega_x i + B\omega_y j + C\omega_z k$, 转子的动量矩为 $h_x i + h_y j + h_z k$, 其中 i, j, k 分别为沿航天器主轴 x, y, z 的单位矢量; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 分别为航天器角速度 ω 沿 x, y, z 轴的分量; 外部扰动力矩为 T ; A, B, C 为航

天器的主转动惯量,不失一般性,假设 $A \geq B \geq C$, 则系统的动量矩方程为

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x - (B - C)\omega_y\omega_z + \omega_y h_z - \omega_z h_y + \dot{h}_x &= T_x \\ B\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_z\omega_x + \omega_z h_x - \omega_x h_z + \dot{h}_y &= T_y \\ C\dot{\omega}_z - (A - B)\omega_x\omega_y + \omega_x h_y - \omega_y h_x + \dot{h}_z &= T_z \end{aligned} \quad (1)$$

其中角速度 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 可用欧拉角 ψ, θ, φ 表示,即

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (2)$$

根据文献[5,6],正则变量 L, l, G, g, H, h 如图1所示. 其中 $O-xyz$ 为连体坐标系, $O-XYZ$ 为惯性坐标系, G 为系统的总动量矩. 动量矩大小 OG 在 Oz 上的投影为 H , 与其夹角为 I , 在 Ox 上的投影为 L , 与其夹角为 b , OP, OM 夹角为 g , Ox, OP 夹角为 h , Ox, OM 夹角为 l , 根据矢量投影定理和高等动力学的知识,从图1可知角速度 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 可用正则变量表示即

$$\begin{aligned} A\omega_x &= G \sin b \sin l - h_x \\ B\omega_y &= G \sin b \cos l - h_y \\ C\omega_z &= L - h_z \end{aligned} \quad (3)$$

将式(3)对时间 t 求得

$$A\dot{\omega}_x = \dot{G} \sin b \sin l + \dot{b} G \cos b \sin l + \dot{l} G \sin b \cos l$$

2005-07-15 收到第1稿, 2005-10-31 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10272022, 10572022)

$$\begin{aligned} B\dot{\omega}_y &= \dot{G}\sin b\cos l + bG\cos b\cos l - iG\sin b\sin l \\ C\dot{\omega}_z &= \dot{G}\cos b - bG\sin b \end{aligned} \quad (4)$$

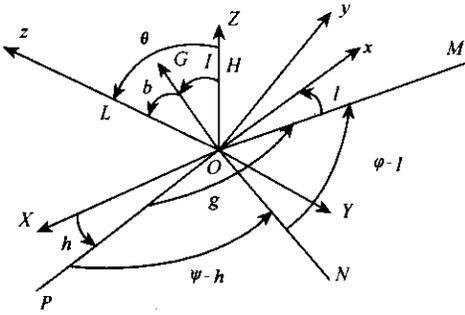


图1 欧拉角与正则变量

Fig. 1 Euler angles and Deprit variables

将式(1)代入(4)整理得

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \frac{\partial H_a}{\partial L} + \frac{T_x\cos l - T_y\sin l}{G\sin b} \\ \dot{L} &= -\frac{\partial H_a}{\partial l} + T_z \\ \dot{G} &= T_z\cos b + (T_x\sin l + T_y\cos l)\sin b \end{aligned} \quad (5)$$

其中(5)式中 H_a 为 Hamilton 函数,可用正则变量表示如下

$$\begin{aligned} H_a &= \frac{1}{2}(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right)(G^2 - L^2) - \left[\left(\frac{h_x\sin l}{A} + \frac{h_y\cos l}{B}\right)\sqrt{(G^2 - L^2)} + \frac{h_z L}{C}\right] + \\ &\quad \frac{1}{2}\frac{L^2}{C} + \frac{1}{2}\left(\frac{h_x^2}{A} + \frac{h_y^2}{B} + \frac{h_z^2}{C}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

Hamilton 函数对正则变量的偏导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_a}{\partial L} &= \frac{-G\cos b\sin^2 l}{A} + \frac{-G\cos b\cos^2 l}{B} + \\ &\quad \frac{G\cos b}{C} + \frac{h_x\cos b\sin l}{A\sin b} + \\ &\quad \frac{h_y\cos b\cos l}{B\sin b} - \frac{h_z}{C} \\ \frac{\partial H_a}{\partial l} &= \frac{G^2\sin^2 b\sin l\cos l}{A} + \frac{-G^2\sin^2 b\sin l\cos l}{B} + \\ &\quad \frac{-h_x G\cos l\sin b}{A} + \frac{h_y G\sin b\sin l}{B} \\ \frac{\partial H_a}{\partial G} &= \frac{G^2\sin^2 l}{A} + \frac{G\cos^2 l}{B} - \frac{h_x\sin l}{A\sin b} - \frac{h_y\cos l}{B\sin b} \end{aligned} \quad (7)$$

为了后面描述的方便,对(5)式简化,令

$$f_L(\bar{l}(t), \bar{L}(t), t) = T_z$$

$$\begin{aligned} f_l(\bar{l}(t), \bar{L}(t), t) &= \frac{T_x\cos l - T_y\sin l}{G\sin b} \\ f_G(\bar{l}(t), \bar{L}(t), t) &= T_z\cos b + (T_x\sin l + T_y\cos l)\sin b \end{aligned} \quad (8)$$

2 Melnikov 函数

当航天器不受外力矩作用且时,根据式(5)系统相平面内存在两个平衡点 $(0, 0)$ 和 $(\pi, 0)$.这两个平衡点为鞍点,由异束轨道连接.当系统受外力矩作用时, Melnikov 函数如下

$$\begin{aligned} M(\bar{l}(t_0)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial H_a}{\partial L}(\bar{l}(t), \bar{L}(t)) f_L(\bar{l}(t), \\ &\quad \bar{L}(t), t + t_0) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial H_a}{\partial l}(\bar{l}(t), \\ &\quad \bar{L}(t)) f_l(\bar{l}(t), \bar{L}(t), t + t_0) dt + \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial H_a}{\partial G}(\bar{l}(t), \bar{L}(t)) f_G(\bar{l}(t), \\ &\quad \bar{L}(t), t + t_0) dt - \frac{\partial H_a}{\partial G}\left(0, \frac{B}{B-C}h_z\right) \times \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_G(\bar{l}(t), \bar{L}(t), t + t_0) dt = \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[M_x(\bar{l}(t), \bar{L}(t), t + t_0) \left(\bar{\omega}_x(t) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(\frac{G_0 - h_y}{B}\right) \frac{A\bar{\omega}_x(t) + h_x}{G_0} \right) \right] dt + \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[M_y(\bar{l}(t), \bar{L}(t), t + t_0) \left(\bar{\omega}_y(t) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(\frac{G_0 - h_y}{B}\right) \frac{A\bar{\omega}_y(t) + h_y}{G_0} \right) \right] dt + \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[M_z(\bar{l}(t), \bar{L}(t), t + t_0) \left(\bar{\omega}_z(t) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(\frac{G_0 - h_y}{B}\right) \frac{A\bar{\omega}_z(t) + h_z}{G_0} \right) \right] dt \end{aligned} \quad (9)$$

其中,沿异束轨道的解 $\{\bar{\omega}_x(t), \bar{\omega}_y(t), \bar{\omega}_z(t)\}^{71}$ 为

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_x(t) &= \frac{A_x \operatorname{sech}(\lambda(t - t_0))}{\tanh^2(\lambda(t - t_0)) + k} \\ \bar{\omega}_y(t) &= \frac{A_y \tanh(\lambda(t - t_0)) \operatorname{sech}(\lambda(t - t_0))}{\tanh^2(\lambda(t - t_0)) + k} \\ \bar{\omega}_z(t) &= \frac{r_1 \tanh^2(\lambda(t - t_0)) + kr_3}{\tanh^2(\lambda(t - t_0)) + k} \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)中相关参数如下

$$a_1 = \frac{C(B - C)}{A(A - B)}, b_1 = \frac{2h_z C}{A(A - B)},$$

$$c_1 = \frac{G_0^2 - 2TB - h_z^2}{A(A-B)} \quad a_2 = \frac{C(A-C)}{B(B-A)}, \quad \left(\frac{\pi}{2} - \theta_b \right) \frac{\alpha \cos(2\theta_b) + \beta \chi \cos^2 \theta_b - \sin^2 \theta_b}{2\lambda(k+1)^2 \cos^3 \theta_b \sin^3 \theta_b} \quad (14)$$

$$b_2 = -\frac{2h_z C}{B(B-A)} \quad c_2 = \frac{G_0^2 - 2TA - h_z^2}{B(B-A)},$$

$$r_{12} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1}}{2a_1} (r_1 > r_2),$$

$$r_{34} = \frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4a_2 c_2}}{2a_1} (r_4 > r_3),$$

$$k = \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_2},$$

$$\lambda = \frac{A-B}{2C} \sqrt{a_1 a_2 (r_3 - r_2) \chi (r_1 - r_2)},$$

$$A_x = k \sqrt{a_1 (r_3 - r_2) \chi (r_3 - r_1)},$$

$$A_y = k \sqrt{a_2 (r_3 - r_2) \chi (r_1 - r_3)}$$

另外,系统的动量椭球和能量椭球^[1]如下

$$\begin{aligned} & (A\bar{\omega}_x(t))^2 + (B\bar{\omega}_y(t))^2 + \\ & (C\bar{\omega}_z(t))^2 = G_0^2 \\ & A(\bar{\omega}_x(t))^2 + B(\bar{\omega}_y(t))^2 + \\ & C(\bar{\omega}_z(t))^2 = 2T \end{aligned} \quad (11)$$

为了实际的需要和后面数值模拟的简便,假设外部扰动力矩如下

$$\begin{aligned} T_x &= \epsilon(-\mu_x \omega_x + d_x \sin(\Omega t)) \\ T_y &= \epsilon(-\mu_y \omega_y + d_y \sin(\Omega t)) \\ T_z &= \epsilon(-\mu_z \omega_z + d_z \sin(\Omega t)) \end{aligned} \quad (12)$$

其中, Ω 为外部激励频率,括号中第一项与阻尼有关,第二项与激励有关。

将式(3)带入式(9),上述 Melnikov 函数转化为

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [-\mu_x \bar{\omega}_x(t) + d_x \sin(\Omega t - \\ & t_0)] \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) A \bar{\omega}_x(t) \lambda dt = \\ & E_1 + E_2 \sin(\Omega t_0) \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha \cosh(2\lambda t) + \beta}{(\sinh^2(\lambda t) + k \cosh^2(\lambda t))^2} dt = \\ & \frac{2\alpha \left(\frac{\pi}{2} - \theta_a \right) \sin(2\theta_a) + (\alpha \cos(2\theta_a) + \beta)}{2\lambda(k+1)^2 \cos^2 \theta_a \sin^2 \theta_a} + \\ & \frac{2\alpha \left(\frac{\pi}{2} - \theta_b \right) \sin(2\theta_b) + (\alpha \cos(2\theta_b) + \beta)}{2\lambda(k+1)^2 \cos^2 \theta_b \sin^2 \theta_b} + \\ & \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \theta_a \right) \alpha \cos(2\theta_a) + \beta \chi \cos^2 \theta_a - \sin^2 \theta_a}{2\lambda(k+1)^2 \cos^3 \theta_a \sin^3 \theta_a} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha' \cosh(\lambda t) \cos(\Omega t)}{\sinh^2(\lambda t) + k \cosh^2(\lambda t)} dt = \\ & \frac{\alpha' \pi}{\lambda(k+1) \chi (1 + \cosh(\pi\Omega/\lambda))} \times \\ & \left[\frac{\cosh((\Omega/\pi) \chi \theta_a)}{\sin \theta_a} + \frac{\cosh((\Omega/\pi) \chi \theta_b)}{\sin \theta_b} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

式(14)和(15)中相关参数如下

$$\alpha = -\frac{1}{2} \mu_x A A_x^2 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$$

$$\beta = -\frac{1}{2} \mu_y A A_y^2 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$$

$$\sinh(i\theta_a) - i\sqrt{k} \cosh(i\theta_a) = 0$$

$$\sinh(i\theta_b) + i\sqrt{k} \cosh(i\theta_b) = 0$$

$$\alpha' = \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \mu_x A A_x$$

根据 Melnikov 函数性质,只要式(13)等于零,

即 $M(t_0) = 0$ 也就是

$$\left| \frac{E_1}{E_2} \right| \leq 1 \quad (16)$$

就表明系统鞍点的稳定与不稳定流形横截相交,可以预测系统出现 Smale 马蹄意义下的混沌现象。

3 数值模拟及分析

根据式(16),下面给出了外部激励频率 Ω 与

$\left| \frac{E_1}{E_2} \right|$ 的关系,即存在混沌运动的激励频率的范围。

系统的具体参数为

$$\begin{aligned} A &= 1.0, B = 0.8, C = 0.4, \mu_x = 0.08, \\ \mu_y &= 0.08, \mu_z = 0, d_x = -100, d_y = -100, \\ d_z &= 0, G_0 = 18, T = 80, \epsilon = 0.05. \end{aligned}$$

图2~图4出示了航天器在外部扰动力矩作用时的分岔曲线。当转子转动惯量为18时,引起系统出现混沌动力学的外部激励频率的最大值为8.5;当转子转动惯量为20时,引起系统出现混沌动力学的外部激励频率的最大值为7.8;当转子转动惯量为22时,引起系统出现混沌动力学的外部激励频率的最大值为6.7。通过上述分析比较分析可以发现随着转子转动惯量的提高,引起系统出现

混沌动力学现象的外部激励范围逐渐减小,系统的稳定性逐渐提高.

长为 0.0001,得到图 5 和图 6 三维相空间图.图 5 展示了系统的周期特性;图 6 展示了系统的混沌特性和随机特性^[8].

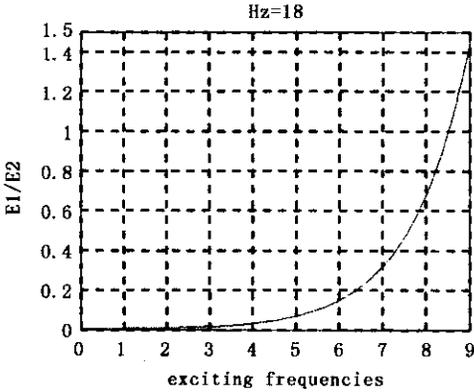


图 2 分岔曲线

Fig.2 Bifurcation curve

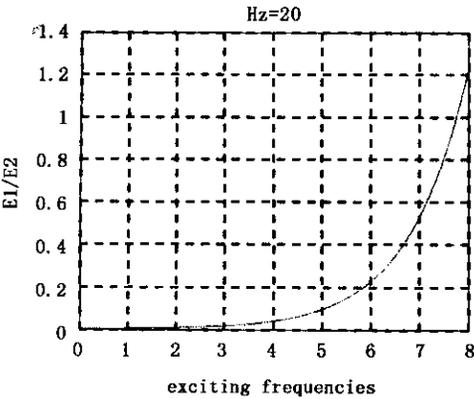


图 3 分岔曲线

Fig.3 Bifurcation curve

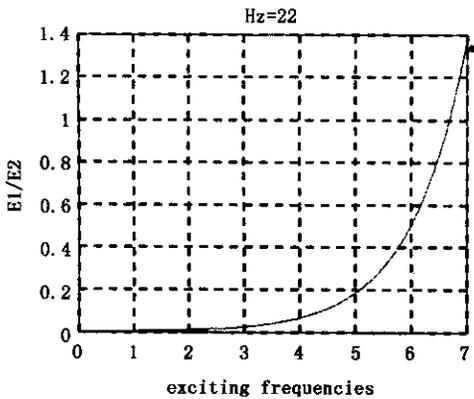


图 4 分岔曲线

Fig.4 Bifurcation curve

为了验证上述分析的可靠性,根据图 3 选择参数进行数值分析.选转子转动惯量为 20,外部激励频率分别为 7.79 和 7.81,应用四阶 Runge-Kutta 法对系统姿态运动方程(1)进行数值模拟,积分步

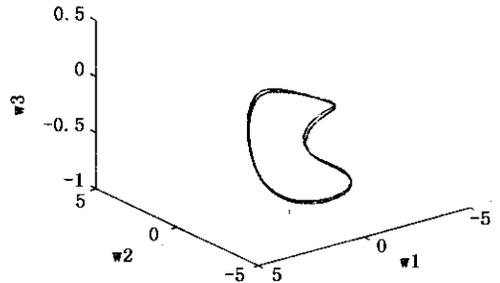


图 5 相空间

Fig.5 Phase space

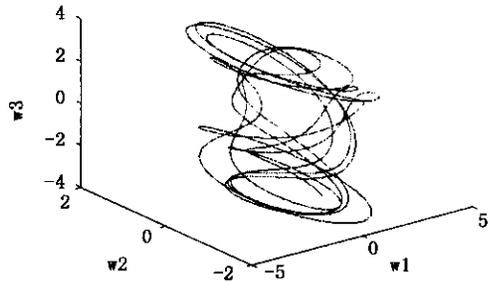


图 6 相空间

Fig.6 Phase space

4 结论

通过应用 Deprit 正则变量,将用欧拉角描述的航天器姿态动力学方程转化为用 Deprit 正则变量描述的航天器姿态动力学方程,此表达方式满足 Hamiltonian 结构形式,解决了欧拉情况下求解 Melnikov 函数难的问题;并通过 Matlab 软件获得理论分析产生混沌运动的条件;另外发现随着转子转动惯量(或转速)的提高,引起系统出现混沌动力学现象的外部激励范围逐渐减小,系统的稳定性逐渐提高.应用四阶 Runge-Kutta 法对姿态运动方程进行数值积分所表现的系统混沌特性与 Melnikov 函数理论分析所表现的系统混沌特性是一致的.航天器在实际姿态运动时应该避开混沌区,这为航天器的设计提供了一定的依据.

参 考 文 献

- 1 刘延柱. 航天器姿态动力学. 北京:国防工业出版社, 1995. Liu Yanzhu. Spacecraft Attitude Dynamics. Beijing:

- National Defence Industry Press ,1995(in Chinese))
- 2 刘延柱 ,彭建华 ,陈立群. 航天器混沌姿态运动研究进展. 自然科学进展 ,1998 ,8(4):385 ~ 390(Liu Yanzhu , Peng Jianhua ,Chen Liqun. Study on chaos attitude motion of spacecraft and its advance. *Advance of Natural Science* , 1998 ,8(4) 385 ~ 390(in Chinese))
 - 3 朱金林 ,岳宝增. 部分充液卫星的非线性稳定性和动力学分析. 动力学与控制学报 ,2004 ,2(3):1 ~ 5(Zhu Jinlin ,Yue Baozeng. Nonlinear stability and dynamics analysis of a satellite with partially filled liquid. *Journal of Dynamics and Control* ,2004 ,2(3):1 ~ 5(in Chinese))
 - 4 Holmes PJ ,Marsden JE. Horseshoe and Arnold diffusion for Hamiltonian system on Lie groups. *Indiana University Mathematics Journal* ,1983 ,32 :273 ~ 309
 - 5 Tong X ,Tabarrok B ,Rimrott FPJ. Chaotic motion of an asymmetric gyrostat in the gravitation field. *International Journal of Non-Linear Mechanics* ,1995 ,30(3):191 ~ 203
 - 6 Deprit A. Free rotation of a rigid body studied in the phase plane. *American Journal of Physics* ,1967 ,35 :424 ~ 428
 - 7 Or AC. Chaotic Motions of a dual-spin body. *Journal of Applied Mechanics* ,1998 ,65 :150 ~ 156
 - 8 刘延柱 ,陈立群. 非线性振动. 北京 :高等教育出版社 , 2001(Liu Yanzhu ,Chen Liqun. Nonlinear Vibration. Beijing :Hige Education Press 2001(in Chinese))

ANALYSIS ON CHAOTIC ATTITUDE DYNAMICS OF SPACECRAFT WITH THREE ROTORS SUBJECTED TO EXTERNAL PERTUBRATION TORQUES*

Kong Lingyong Yue Baozeng

(*Department of Mechanics ,School of Science ,Beijing Institute of Technology ,Beijing 100081 ,China*)

Abstract The chaotic attitude motion of a spacecraft with three rotors subjected to small external perturbation torques was investigated. By using the Deprit 's canonical variables , the Hamilton structure of the system was established. Melnikov 's method was carried out to predict the transversal intersections of the stable and unstable manifolds and to achieve the conditions of the occurring of chaotic motion. The study shows that the range of the excitation frequencies , which excite the occurring of chaotic dynamics , decreases as the momentum moment of the wheels increases. Finally , the numerical simulation of phase space shows the reliability of the theoretical analysis.

Key words Spacecraft attitude dynamics ,Chaos ,Melnikov method ,Deprit variable