

一类非线性波方程尖波解及其动力学性质的分析*

李雪臣¹ 申建伟^{1,2}

(1. 河南许昌学院数学系, 许昌 461000) (2. 西北工业大学数学系, 西安 710072)

摘要 应用动力系统分岔理论和定性理论研究了一类非线性 Degasperis-Procesi 方程的行波解及其动力学性质, 并结合可积系统的特点, 利用哈密顿系统的能量特征, 通过 Maple 软件绘出其相轨图, 再根据行波与相轨道间的对应关系, 揭示了不同类型的行波解间的转变与参数变化的关系, 并且给出了不同行波间相互转换的参数分岔图, 从根本上解释了 Peakon 产生的原因. 数值模拟验证了该方法的正确性. 最后给出了相应行波解的表达式.

关键词 孤立波, 周期波, 尖波, Degasperis-Procesi 方程, 动力系统分岔理论

引言

本文中, 我们来考虑 Degasperis-Procesi 方程

$$u_t - u_{txx} + 4uu = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx} \quad (1)$$

对于该方程的背景我们可以参考文献后的相关文献. 在以前的文献中都没有完整解释 peakon 产生的原因. 首先令 $u(x, t) = u(x - ct) = u(\xi)$, 其中 c 为波速, 把它代入式(1)中, 可以得到

$$(u - c)u_{\xi\xi} = 2u^2 - cu + g - u^2_{\xi} \quad (2)$$

其中 g 是积分常数. 方程(2)等价于下面的二维系统

$$\frac{du}{d\xi} = y, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{2u^2 - cu + g - y^2}{u - c} \quad (3)$$

假定 $u(\xi) - c = \phi(\xi)$, 式(3)变成

$$\frac{d\phi}{d\xi} = y, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{2\phi^2 + 3c\phi + g + c^2 - y^2}{\phi} \quad (4)$$

式(4)有首次积分

$$H(\phi, y) = \frac{\phi^2}{2}(y^2 - \phi^2 - 2c\phi - g - c^2) = h \quad (5)$$

方程(4)是依赖于参数 (c, g) 的平面动力系统, 由于系统(4)定义的向量场的相轨决定了系统(1)的行波解. 因此我们来研究 (ϕ, y) 平面中随着参数 (c, g) 变动而引起行波解变动的分岔图.

注 (1) 本文仅讨论有界行波.

(2) 相轨和行波之间的对应关系可参考文献 [6].

1 式(4)的相图

本节中我们将考虑(4)的相图. 首先令 $d\xi = \phi d\tau$, 式(4)可化为

$$\frac{d\phi}{d\tau} = y\phi, \quad \frac{dy}{d\tau} = 2\phi^2 + 3c\phi + g + c^2 - 2y^2 \quad (6)$$

除去 $\phi = 0$, 式(6)和式(4)有相同的相轨. 由式(6)知 $\phi = 0$ 是它的不变解. 显然, 当 $\Delta = c^2 - 8g \geq 0$, 在 ϕ 轴上, 式(6)有两个平衡点 $M_{\pm} \left(\frac{-3 \pm \sqrt{\Delta}}{4}, 0 \right)$. 当 $g + c^2 \geq 0$ 时, 在 y 轴上有两个平衡点 $N_{\pm} (0, \pm \sqrt{g + c^2})$. 假定 (ϕ_e, y_e) 是式(6)的平衡点, 它的线性化矩阵为 $J(\phi_e, y_e) = 2y_e^2 - 4\phi_e^2 - 3c\phi_e$. 显然 N_{\pm} 是鞍点. 根据动力系统理论知识, 当 $J < 0$ 时, 平衡点是鞍点; 当 $J > 0$ 时, 平衡点是中心; 当 $J = 0$ 并且庞家莱指标等于 0 时, 平衡点是尖心. 通过上面的分析, 可以得到下面的分岔曲线: $L_1^{\pm} : c = \pm \sqrt{8g} \equiv c_1^{\pm}$; $L_2^{\pm} : g = 0, c > 0$ or $c < 0 \equiv c_2^{\pm}$; $L_3^{\pm} : c = \pm \sqrt{-g} \equiv c_3^{\pm}$. 这样 (c, g) 平面被分为下面的区域: $A : 0 < c < c_1^+$; $B : c > c_1^+$; $C : c > c_3^+$; $D : 0 < c < c_3^+$; $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ 是 A, B, C, D 关于 g 轴的对称区域.

运用平面动力系统理论, 我们可得到平衡点的动力学行为 (见图 1).

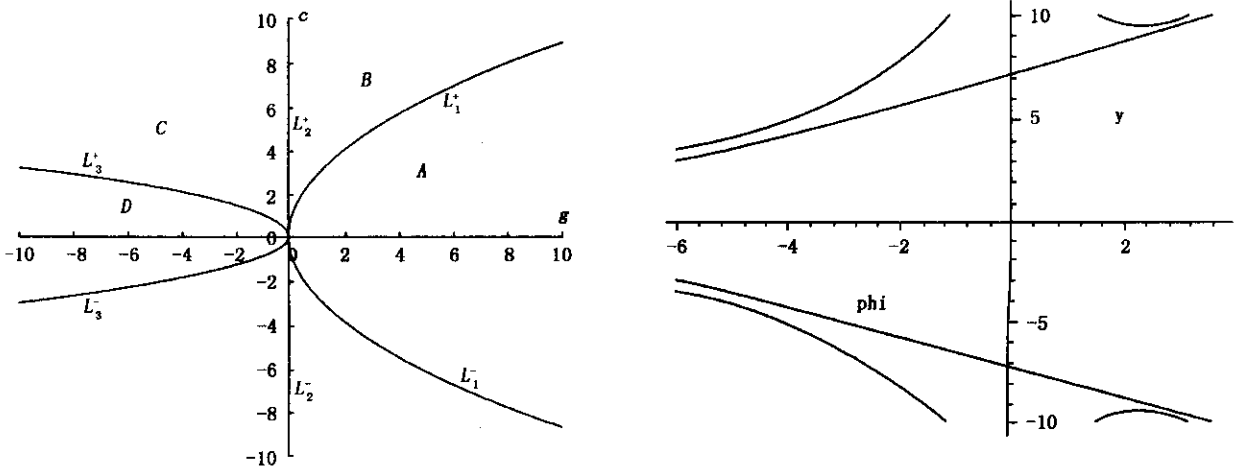
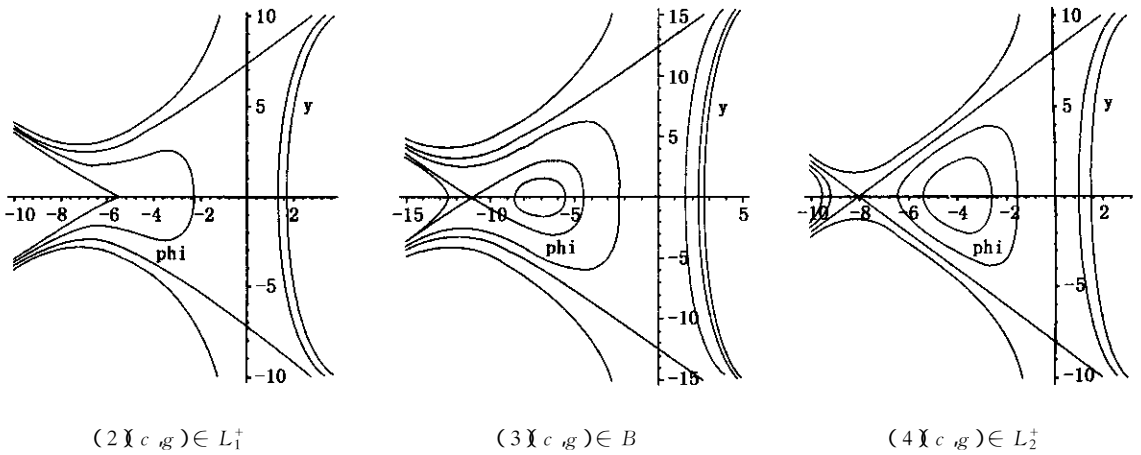


图 1 方程 (6) 的分岔曲线

Fig. 1 The bifurcation curves of Eq.(6)

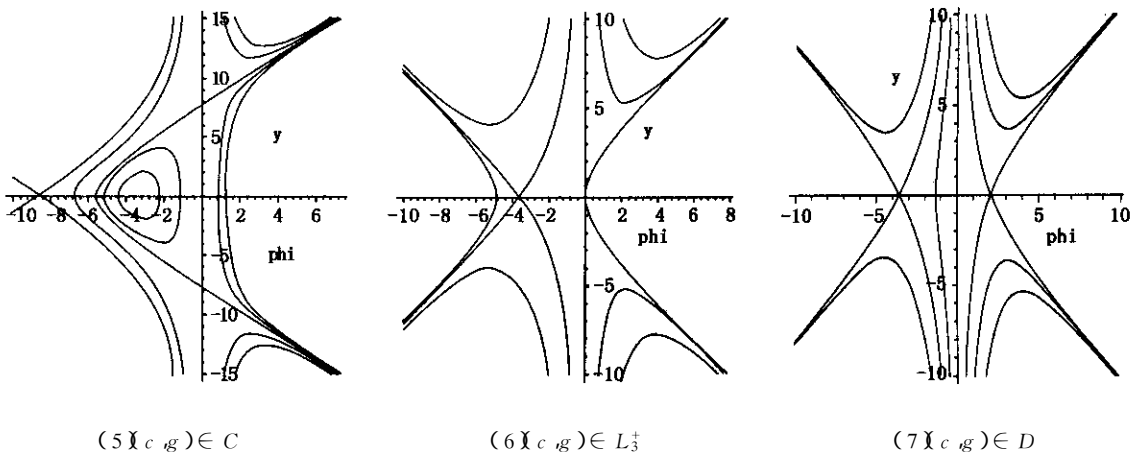
$(1) \forall (c, g) \in A$



$(2) \forall (c, g) \in L_1^+$

$(3) \forall (c, g) \in B$

$(4) \forall (c, g) \in L_2^+$



$(5) \forall (c, g) \in C$

$(6) \forall (c, g) \in L_3^+$

$(7) \forall (c, g) \in D$

图 2 方程 (6) 的相轨图

Fig.2 The phase of Eq.(6)

注 由于分岔曲线关于 g 对称, 因此我们仅给出 $c > 0$ 时的图. 当 $c < 0$ 时, 对应于对称参数空

间中的相图关于 ϕ 轴对称.

2 系统(1)的光滑和非光滑行波解及其相关性质

本节中,我们将考虑式(1)的行波解的动力学性质并指出 $\phi = 0$ 是非光滑行波解存在的原因.为了解释是非光滑行波解存在的原因,我们首先考虑 $(c, g) \in L_2^+$ 的情况.记 $h_1 = h_2 = H(M_{\pm})$.当 $h < h_1 = 0$ 随着 h 增加并接近 0 时,围绕中心 M_+ (或 M_-) 的周期轨将接近 $\phi = 0$.令 $\epsilon = \phi$,其中 $\epsilon \ll 1$.那么在奇线 $\phi = 0$ 的小邻域内,式(4)成

为

$$\frac{d\phi}{d\xi} = y, \epsilon \frac{dy}{d\xi} = y^2 + g + c^2 + O(\epsilon) \quad (7)$$

类似于文献[2]中引理 4.1 的证明,我们有

引理 2.1 当 $h \rightarrow 0$ 围绕 M_+ (M_-) 的周期轨趋于三角形边界.假定 (ϕ, y) 是周期轨上的一点 Γ^h ,当 h 充分接近于 0 时,在 $\phi = 0$ 附近, $y = \phi_{\xi}$ 在非常小的时间间隔内迅速跳跃.

从引理 2.1 知,周期轨 Γ^h 上的点 (ϕ, y) 运动时, $y = \phi_{\xi}$ 快速跳跃(它的符号快速从“+”变到“-”), ϕ 快速改变它的运动方向形成尖波.

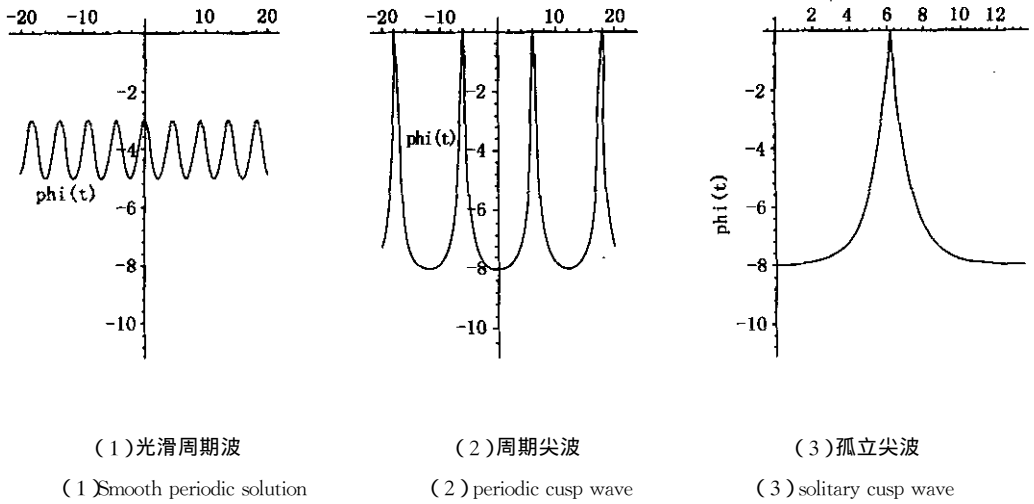


图3 数值模拟行波随参数变化图

Fig. 3 The variation of traveling wave as the parameter

注 本文中 peakon, valleyon 和 cuspon 的定义请参考文献[5].

由此可以得到下面的结论:

(i) 假定 $(c, g) \in B$, 方程(1)有一族光滑的周期波和一个峰状的孤立波.当 $g \rightarrow 0^+$, 光滑的周期波和一个峰状的孤立波将逐渐失去光滑性成为周期尖波和 peakon (即 $(c, g) \in L_2^+$).

(ii) 假定 $(c, g) \in B$, 方程(1)有一族光滑的周期波和一个谷状的孤立波.当 $g \rightarrow 0^+$, 光滑的周期波和一个谷状的孤立波将逐渐失去光滑性成为周期尖波和 valleyon (即 $(c, g) \in L_2^-$).

(iii) 假定 $(c, g) \in C \cup \bar{C}$, 方程(1)有一族光滑的周期波, 它将从光滑的周期波变成周期尖波并最终成为.当 $g \rightarrow 0^+$, cuspon 将分别发展成为 peakon 或 valleyon (即 $(c, g) \in L_2$).

为了理解上述性质,我们给出其具体的解的表

达式:

(1) 当 $(c, g) \in B$, 光滑的周期波有下面的隐式表达式

$$\alpha_1^2 F(\varphi, k_3) + (\alpha^2 - \alpha_1^2) \Pi(\varphi, \alpha^2, k_3) = \frac{\alpha^2}{\phi_4 g_3} (x - ct) \quad (8)$$

其中 $\phi_i, i = 1, \dots, A$ 是 $\phi^4 + 2c\phi^3 + (g + c^2)\phi^2 + 2h = 0$ 的根, $g_3 = \frac{2}{\sqrt{(\phi_4 - \phi_2)(\phi_3 - \phi_1)}}$, $k_3^2 = \frac{(\phi_3 - \phi_2)(\phi_4 - \phi_1)}{(\phi_4 - \phi_2)(\phi_3 - \phi_1)}$, $\alpha^2 = \frac{\phi_4 - \phi_1}{\phi_3 - \phi_1}$, $\alpha_1^2 = \alpha^2 \frac{\phi_3}{\phi_4}$,

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{(\phi_3 - \phi_1)(\phi - \phi_4)}{(\phi_4 - \phi_1)(\phi - \phi_3)}}$$

当 $k \rightarrow 1$, 光滑的周期波趋向于峰状的孤立波

$$\tan \varphi + \sec \varphi = \exp\left(\frac{x - ct}{\phi_4 g_3}\right) \quad (9)$$

(2) 当 $(c, g) \in \bar{B}$, 光滑的周期波有下面的隐

式表达式

$$\alpha_1^2 F(\varphi, k_4) + (\alpha^2 - \alpha_1^2) \text{II}(\varphi, \alpha^2, k_4) = \frac{\alpha^2}{\phi_2 g_4} (x - ct) \tag{10}$$

其中 $\phi_i, i = 1 \dots A$ 是 $\phi^4 + 2c\phi^3 + (g + c^2)\phi^2 +$

$$2h = 0 \text{ 的根, } g_4 = \frac{2}{\sqrt{(\phi_4 - \phi_2)(\phi_3 - \phi_1)}} k_4^2 = \frac{(\phi_3 - \phi_2)(\phi_4 - \phi_1)}{(\phi_4 - \phi_2)(\phi_3 - \phi_1)} \alpha^2 = \frac{\phi_3 - \phi_2}{\phi_3 - \phi_1} \alpha_1^2 = \alpha^2 \frac{\phi_1}{\phi_2},$$

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{(\phi_3 - \phi_1)(\phi - \phi_2)}{(\phi_3 - \phi_2)(\phi - \phi_1)}}$$

当 $k \rightarrow 1$ 光滑的周期波趋向于峰状的孤立波

$$\tan \varphi + \sec \varphi = \exp\left(\frac{x - ct}{\phi_2 g_4}\right) \tag{11}$$

(3) 当 $(c, g) \in L_2$, The peakon and valleyon 分别有下面的表达式

$$\phi(x - ct) = -c + \frac{c}{2} \exp(\pm(x - ct)) \tag{12}$$

这种情况下的周期尖波的表达式分别同式(8)或式(10).

(4) 当 $(c, g) \in C \cup \bar{C}$, 具有弓形轨道 cuspon(见 Fig. 1(5)) 有下面的参数表示

$$\phi(x - ct) = -c + \sqrt{-g} \cosh(x - ct) \tag{13}$$

这种情况下的周期尖波的表达式分别同式(8)或式(10).

注 (1) 该方程的所有行波解都可以根据上述分析利用椭圆函数积分表[3]隐式给出, 并且根据椭圆积分表达式, 我们还可以计算出周期波的周期.

(2) 关于 cuspon, peakon, valleyon 的定义可以参考文献[4].

3 结论

从上面的分析可知道(1)的行波解的全局动力学性质. 这个方法也可运用到其它的非线性波方

程中.

参 考 文 献

- Guckenheimer J, Holmes PJ. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York, 1983
- Li JB, Liu ZR. Smooth and non-smooth travelling waves in a nonlinearly dispersive equation. *Appl. Math. Modelling* 2000, 25: 41~56
- Byrd PF, Friedman MD. Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists, Springer, New York, 1971
- Degasoeris A, Holm DD, Hone ANW. A new integrable equation with peakon solution. *Theor Math Phys*, 2002, 133: 1463~1474
- Rosenau P. On nonanalytic solitary waves formed by a nonlinear dispersion. *Physic. Lett. A*, 1997, 23: 305~318
- Li JB, Shen JW. Travelling solutions in a model of the Helix Polypeptide chains. *Chaos, Solitons and Fractal*, 2004, 20: 827~841
- 孙仲奎, 徐伟, 杨晓丽. 求解强非线性动力系统响应的一种新方法. *动力学与控制学报*, 2005, 2: 29~35 (Sun ZK, Yang XL. A new analytic approximate technique for strongly nonlinear dynamical systems. *Journal of Dynamics and Control* 2005, 2: 29~35 (in chinese))
- 靳艳飞, 徐伟, 等. 色相关的色噪声驱动的双稳杜芬模型的稳态分析. *动力学与控制学报*, 2005, 2: 60~65 (Jin YF, Xu W et al. Steady-State analysis of a bistable duffing model driven by additive and multiplicative colored noises with a colored correlated noise. *Journal of Dynamics and Control* 2005, 2: 60~65 (in chinese))
- 杨晓丽, 徐伟, 孙仲奎. 窄带随机噪声作用下强非线性 Duffing-Rayleigh 振子的相应, 等. *动力学与控制学报*, 2004, 4: 19~23 (Yang XL, Xu W, Sun ZK. Response statistics of strongly non-linear system to random narrow-band excitation. *Journal of Dynamics and Control* 2004, 4: 19~23 (in chinese))

CUSP WAVE SOLUTIONS AND DYNAMICAL BEHAVIORS IN A CLASS OF NONLINEAR EQUATION*

Li Xuechen¹ Shen Jianwei^{1,2}

(1. *Department of Mathematics, Xuchang University, Xuchang 46100, China*)

(2. *School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*)

Abstract The dynamical behavior and traveling wave solutions of Degasperis-Procesi equation were studied by using bifurcation theory of dynamical system and qualitative theory. Based on the character of integral system and exploiting the energy of Hamiltonian system, the phase portraits were plotted by using the Maple. The relation between the parameter and the type of different traveling wave solutions was revealed, the bifurcation values of different traveling wave solution were given, and the reason for peakon was shown. Under different parameter conditions, exact traveling wave solutions were also given. The numerical simulation shows the correctness of the theoretical analysis.

Key words solitary wave, periodic wave, cusp wave, Degasperis-Procesi equation (DPE), bifurcation theory of dynamical systems