

滞后非线性模型的研究进展*

李韶华 杨绍普

(石家庄铁道学院机械分院, 石家庄 050043)

摘要 详细介绍了六种典型的滞后非线性模型,包括:干摩擦理想模型、双线性模型、Davidenkov 模型、Bouc-Wen 模型、迹法模型及 Bingham 模型. 首先说明了这些模型的由来、表达式及原理,然后分析了这些模型的优缺点和应用范围. 此外,还对各种典型模型的改进情况和最新的研究进展进行了较详细的综述. 最后总结了滞后非线性模型的研究现状及将来的发展趋势.

关键词 滞后非线性, 数学建模, 迹法模型, Bouc-Wen 模型, Bingham 模型

引言

滞后非线性是很常见的系统非线性特性,其主要特点是多值性和非光滑性,非常容易产生分岔、混沌等复杂动力学行为. 由于翻译的不同,有人也称为滞迟非线性或迟滞非线性. 但滞后非线性多用于描述材料的应力与应变之间或力与速度、位移之间的滞后关系,而迟滞多用于描述系统的时滞和控制领域中的滞后现象. 本文仅对材料的滞后非线性建模问题的进展进行研究.

在实际工程中,呈现滞后非线性的材料有很多种,包括 MRF、ERF、泡沫塑料、金属橡胶、钢丝绳、压电陶瓷、形状记忆合金等. 滞后非线性的研究涉及机械系统隔振、地震工程、土木工程等多个领域. 而各种材料滞后非线性模型的建立是研究的基础,因此引起了国内外学者们的广泛关注. 但是,据笔者所查,目前对各种滞后非线性模型研究进展的综述性文章非常少,这常使初入门者一头雾水. 本文试图对滞后非线性模型的研究进展进行系统地综述,详细介绍六种典型滞后非线性模型的特点、应用范围和改进情况,希望对滞后非线性领域的研究有所帮助.

当系统存在滞后非线性时,其力—位移曲线或应力—应变曲线就会形成滞后回线. 滞后回线一般可分解为两部分,一部分是滞后回线的基架线,表示弹性力,它一般不随频率变化,并且不消耗能量;

另一部分是纯滞后环,表示阻尼力,可以用不同种类的阻尼来描述,滞后环的面积等于消耗的能量. 正阻尼时与负阻尼时滞后回线的走向相反,前者为顺时针,后者为逆时针.

滞后非线性的数学模型有很多种,到目前为止,具有代表性的有干摩擦理想模型、双线性模型、Davidenkov 模型、Bouc-Wen 模型、迹法模型、Bingham 模型和用于压电陶瓷的 Preisach 模型等. 这些模型都有各自的特点和适用范围,也或多或少存在不足之处,或者型式过于复杂,或者参数与实际系统的物理特性没有直接地联系. 因此,近年来,有很多学者致力于对这些典型模型的改进,并且提出了各种新的参数辨识方法.

1 干摩擦理想模型

Den Hartog 按能量耗散相等原则将干摩擦力用等效粘性阻尼力替代,发展了等效线性化方法,提出了描述滞后非线性的最简单模型——干摩擦理想模型^[1,2],其表达式为

$$F = F_f \cdot \text{sgn}(\dot{v}) \quad (1)$$

干摩擦力与速度、位移的关系可用图 1 表示. 干摩擦力的大小为一常值,与运动速度总是反向的,右图中的矩形面积即是一个振动周期损耗的能量. 这种滞后非线性模型过于简单,与实际情况有较大出入,但在理论研究上仍具有一定的意义. C. W. Stammers 研究了半主动干摩擦系统的振动控制^[3].

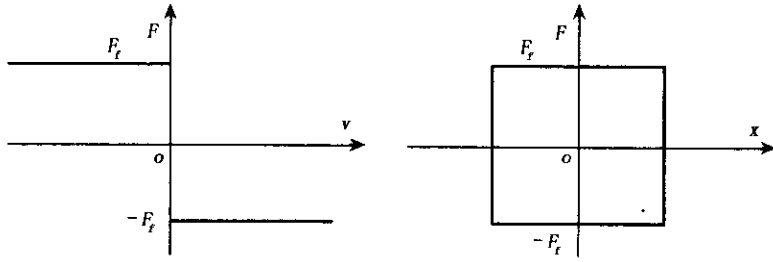


图 1 干摩擦理想模型

Fig.1 Dry friction model

2 双线性模型

继干摩擦理想模型之后, Iwan WD 于 1961 年提出了双线性模型^[4], 其数学表达式为

$$F_y = F_a + F_f = k_a x_y + k_b x_y \quad (2)$$

滞后曲线可分解为两部分: 弹性部分和迟滞部分,

如图 2 所示. 这种模型能较好地描述系统出现干摩擦时的情形, 并对迟滞回线有较好的近似. 而且形式简单, 需要辨识的物理参数少, 物理意义明确. 但它将系统处理为两个线性刚度系数, 不能描述非线性高阶刚度系数的影响, 将阻尼力看作为干摩擦阻尼, 不能全面描述复杂阻尼的情况.

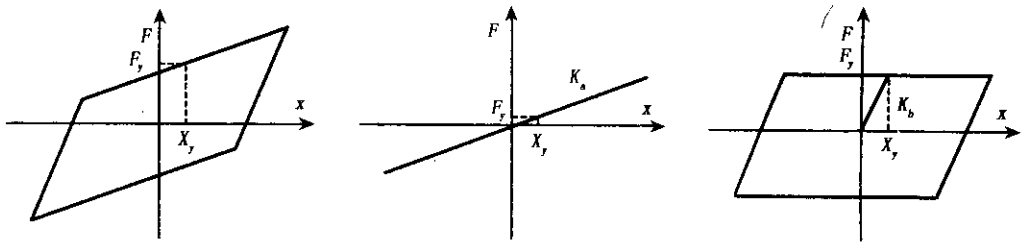


图 2 双线性模型

Fig.2 Bilinear model

该模型的应用范围比较广泛, 可近似描述金属橡胶、钢丝绳、MRF 等多种材料的滞后非线性, 常用于滞后非线性系统的复杂动力学行为分析等理论研究. 胡海岩在非线性减振器的研究过程中对双线性模型进行了改进, 提出了记忆力模型^[5]. 他把恢复力分解为两部分: 仅与当前变形状态有关的无记忆部分和与整个变形过程有关的记忆部分. 模型采用微分形式, 把刚度系数由常数变为变量, 考虑了变形过程对恢复力的影响, 弥补了双线性模型的不足, 但是存在微分形式模型难以避免的缺陷, 物理意义不清晰, 求解困难.

另外, R. Y. Tan 利用双线性模型研究了具有铅和橡胶支撑的桥梁的振动^[6]. 白鸿柏等对 3 次非线性粘性阻尼双线性滞迟振动系统进行了一系列深入的研究^[7,8].

3 Davidenkov 模型

Davidenkov 于 1939 年提出了两参数模型^[9], 其数学表达式为

$$F(x) = Kx + \frac{\eta}{n} [(x_0 + x)^n - 2^{n-1} x_0^n] \quad (3)$$

式中, K 为滞后环的线性刚度, x 为相对位移, n 和 η 为滞后环系数, 由实验确定. 滞后曲线如图 3 所示. 这种模型用来描述材料的弹性滞后特性, 具有广泛的代表性, 引起了许多学者的关注和研究. 例如, 杨绍普利用此模型研究了参激振动系统的分岔和奇异性, 并且提出了转迁极限点的概念^[10]; 金栋平等利用多尺度法和奇异性理论研究了具有 Davidenkov 滞后环的非线性系统的分岔和奇异性, 并研究了开折参数和系统参数的对应关系, 为系统动力学行为的控制提供了理论依据^[11]; 陈恩利等用此模型研究了两系非线性悬挂车辆的运行稳定

性与分岔^[12].

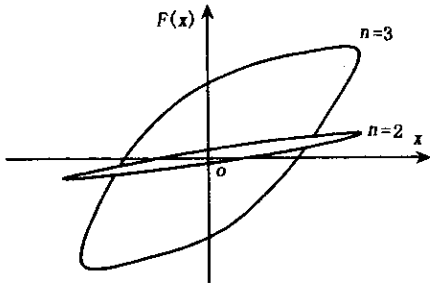


图3 Davidenkov 模型

Fig.3 Davidenkov model

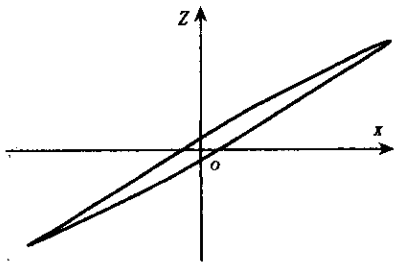


图4 Bouc-Wen 模型

Fig.4 Bouc-Wen model

4 Bouc-Wen 模型

由 Bouc 于 1967 年提出^[13],并经 Wen 等人进一步发展^[14]的 Bouc-Wen 模型又称作一阶非线性微分方程模型,其表达式为

$$\dot{Z} k \dot{x} - \beta |\dot{x}| Z^m - \gamma \dot{x} |Z|^n | \quad (4)$$

式中, Z 为滞后恢复力; x 为相对位移; \dot{x} 为相对速度; k, β, γ, m 为参数.

该模型的滞后回线由两条光滑曲线组成,如图 4 所示.它把滞后恢复力描述为一阶微分方程,通用性强,精度较高,通过调节模型中的四个参数可以描述大小不同、形状各异的滞后回线.其缺点是各参数之间的关系很不直观,物理意义不明确;表达式以导数或微分形式出现,增大了系统的维数,使分析的难度加大,而且恢复力中弹性力和阻尼力表现形式不显现,不利于各参数的辨识.

目前,该模型主要用于分析土木结构和机械系统的地震随机响应.严天宏等人利用 Bouc-Wen 模型研究了含弹塑性滞迟非线性结构系统的实时最优控制^[15].另外,也有很多人用 Bouc-Wen 模型描

述磁流变阻尼力,由于该模型不能模拟惯性效应引起的低速时阻尼力的衰减现象和极限速度时的两个顺时针滞回环,人们对其进行了许多改进. Spencer 提出了基于 Bouc-Wen 模型的现象模型^[16],该模型能很好地反映 ST 阻尼器的动态性能,与试验结果较吻合,其有效性已经在 Lord 公司的 RD-1000 型阻尼器上得到验证,目前许多控制方法和理论数据的采集都是基于此模型.关新春等用一种改进的简化 Bouc-Wen 模型描述了磁流变阻尼的滞后非线性,省略了弹性力项,所得的数值结果与试验结果比较吻合^[17].

5 迹法模型

Badrakhan 于 1987 年提出了迹法模型^[18,19],其滞后恢复力的表达式为

$$f(x, \dot{x}) = g(x) + h(x) \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (5)$$

迹法模型有许多具体表现形式,其中最常见的是将基架线当成非线性弹簧处理,纯滞后环当成阻尼处理,其数学表达式为

$$F = F_m + F_n \quad (6)$$

式中

$$\begin{cases} F_m = k_1(A)x + k_3(A)x^3 + k_5(A)x^5 \\ F_n = c_e(A, \omega)\dot{x} \end{cases}$$

其中, x 是相对位移; \dot{x} 是相对速度; A 是振幅; ω 是振动频率; $c_e(A, \omega)$ 是等效粘性阻尼系数.模型示意图如图 5 示.

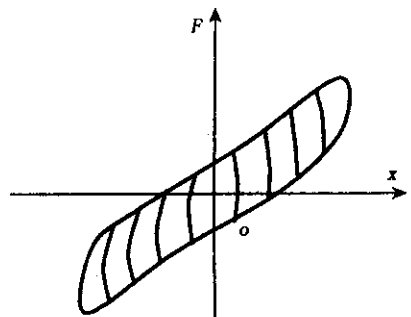


图5 迹法模型

Fig.5 Trace method model

迹法模型基于平均和等效原理,恢复力与振幅和频率有关,形式简单,易于根据实验数据进行拟合.根据阶次和参数的不同,可得到各种各样的形

状 适用范围广. 其缺点是只能描述滞后恢复力与位移和速度的关系, 而不能全面揭示滞后恢复力与各振动参数的关系, 当非线性弹簧刚度的阶次较高时, 由于参数辨识的复杂性, 其应用也受到限制.

但总体来说, 迹法模型的应用非常广泛, 主要用于描述金属橡胶、泡沫塑料、钢丝绳弹性元件等的滞后非线性. 人们根据实验结果提出了许多形式的迹法模型. Tinker L M 利用迹法模型研究了钢丝绳减振器的阻尼特性^[20]. J. M. KO 等在对钢丝绳减振器进行测试分析的基础上提出了一个半经验的模型, 该模型的参数是非线性系统振动幅值的函数, 用此模型可对钢丝绳稳定状态下的迟滞回线和周期激励下的稳态响应作出较准确的预估^[21]. 潘东等人提出了兼有干摩擦和线性粘性阻尼特性的混合型模型^[22]. 王轲等人提出了非线性非对称迟滞阻尼减振器的动力学模型^[23]. 龚宪生研究了以钢丝绳为基本元件的大挠度弹性联轴器、钢丝绳隔振器和增强泡沫塑料隔振器的建模和参数识别, 并对试验数据进行分析和处理, 提出了多种数学模型^[24-25]. 他们将钢丝绳隔振系统的恢复力分解为非线性弹性恢复力和滞后非线性阻尼力, 并考虑了高阶刚度和可能出现的多种阻尼成分. 赵荣国在此基础上对上述模型进行了改进, 他们把滞后阻尼力表示为位移的函数, 更加便于实验数据的测量和数值计算^[26].

另外, 杨绍普等人提出了用位移和速度的 3 次方对滞后非线性系统进行模拟, 这也属于迹法模型中的一种. 其表达式为

$$F = k_1 x + k_2 x^3 + c_1 \dot{x} + c_2 \dot{x}^3 \quad (7)$$

式中 x 为相对位移, \dot{x} 为相对速度, k_1, k_2, c_1, c_2 为参数, 由实验数据拟合.

其滞后回线如图 6 所示. 这种模型的优点是数学表达式简单, 待定参数也只有 4 个, 非常适于对滞后非线性的机理和特性进行理论研究. 杨绍普利用这一模型研究了滞后非线性系统的超谐共振、亚谐共振、亚组合共振, 得到了分岔解, 并利用奇异性理论对幅频曲线的拓扑结构分类, 进行了拟全局分岔的研究^[27]. 陈恩利用此模型研究了两个激励作用下的多自由度滞后非线性系统的亚谐共振以及滞后非线性受电弓在多频激励下的共振与分岔问题^[28]. 李韶华利用这种模型研究了滞后非线性汽车悬架中的分岔和混沌现象^[29-30].

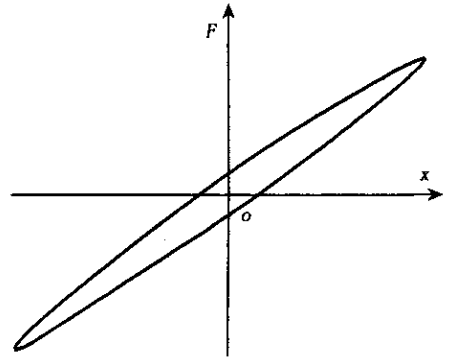


图 6 位移和速度 3 次方模型

Fig. 6 A model with the cube of displacement and the cube of velocity

6 Bingham 模型

近年来, 随着智能材料的高速发展, 对于电流变液 (ER) 和磁流变液 (MR) 的研究日益受到人们的关注. MR 和 ER 的阻尼力均呈现明显的滞后非线性, 描述它们的模型有很多, 其中应用最广的是 Bingham 模型. Stanway 于 1987 年提出了基于电流变液的 Bingham 模型^[31], 后来有很多人又把它用于磁流变液. 其表达式为

$$f(t) = F_y \operatorname{sign}(V) + C_1 V \quad (8)$$

模型示意图如图 7 所示. 该模型中的阻尼力由粘性阻尼力和库仑阻尼力两部分组成, 当外力小于屈服力 F_y 时, 相对速度 V 等于零, MR 不流动; 当外力超过 F_y 时, MR 屈服并开始流动, 相对速度不为零. 该模型形式简单, 利于理论研究, 但不包含滞后环节, 在小应变下把 MR 简单视为刚体而忽略了其类粘弹性本构关系, 对力 - 速度曲线中的滞后非线性不能很好拟合.

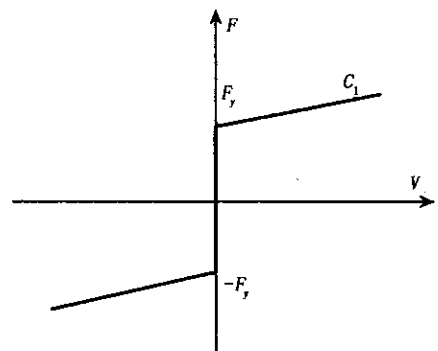


图 7 Bingham 模型

Fig. 7 Bingham model

针对上述缺点, 人们对 Bingham 模型进行了很

多合理地改进,下面仅介绍其中的3种.

(1) 双线性滞回模型

在大量实验工作基础上,杨绍普对 Bingham 模型进行了改进,提出了一种双线性滞回模型^[32],其表达式为

$$\begin{cases} F = C_1 y' + F_y \text{Sign}(y' - V_0) & y'' > 0 \\ F = C_1 y' + F_y \text{Sign}(y' + V_0) & y'' < 0 \end{cases} \quad (9)$$

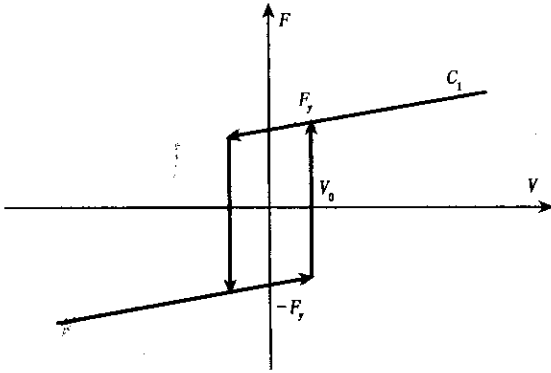


图8 双线性滞回模型

Fig.8 Bilinear hysteretic model

图8是此种双线性滞回模型的示意图,图中的横坐标是速度,纵坐标是MRF阻尼力.当 V_0 取0时,这种改进模型就变为Bingham模型.因此,Bingham模型可看作这种改进模型的一个特例.该模型包含滞回环,当外力小于屈服力 F_y 时,MR也可能发生流动,考虑了小应变情况下材料的粘弹性.3个参数分别是零力速度 V_0 ,阻尼系数 C_1 ,和MRF的屈服力 F_y ,它们与MRF的可压缩性有关,具有明确的物理意义.另外,这种模型的形式比较简单,不含积分项或微分项,易于理论推导.杨绍普等利用此种模型研究了天棚阻尼系统的动力学特性,得到了系统的1次近似解,并进行了数值验证.

研究表明,此模型对力-位移曲线和力-速度曲线都能很好地拟合.

(2) 改进的 Bingham 模型

郭树起等提出了另外一种改进的 Bingham 模型^[33],其表达式为

$$F_{md} = A_1 \text{sgn}\left(\dot{x} + \frac{V_0}{X_0} x\right) + A_2 \left(\dot{x} + \frac{V_0}{X_0} x\right) \quad (10)$$

其中 x 是相对位移; \dot{x} 是相对速度; A_1 为屈服力; A_2 与粘性阻尼系数有关, V_0 和 X_0 表示阻尼力为零时滞后的临界速度和临界位移的绝对值.模型

的示意图如图9示.该模型更加合理地反映了MRF的滞后非线性特性,不仅考虑了小应变下的粘弹性,而且可以模拟极限速度时的2个顺时针滞回环.他们还推导出了此模型在正弦激励下的等价形式,并在此基础上分析了单自由度隔振系统的动力响应特性,求得了最大速度、最小速度、两个临界速度和时滞.

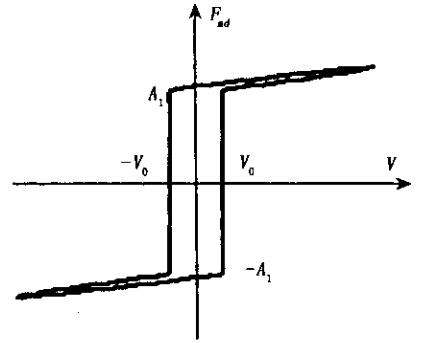


图9 改进 Bingham 模型

Fig.9 A revised bingham model

(3) 机电耦合模型

潘存治等提出了一种用于控制的机电耦合模型^[34],此模型的基本思想是将阻尼器与控制设备看作一个完整的系统,目的是既可描述阻尼器的非线性特性,又便于实现实时控制.模型的结构图如图10示.该模型由4个子模型组成,构成一个有机的整体,输入是控制电流和相对速度,输出是阻尼力.4个子模型的表达式分别为

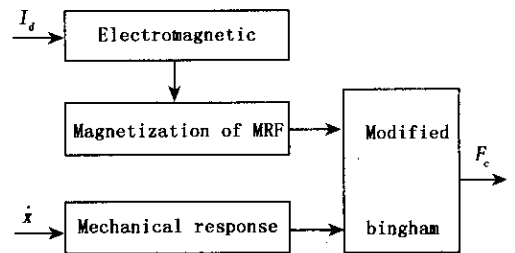


图10 机电耦合模型

Fig.10 An electro-mechanical coupling model

(a) 电磁响应模型

$$A(q)I_r = B(q)I_d + \epsilon_r \quad (11)$$

其中 I_d , I_r , ϵ_r 分别表示控制电流、实际的激励电流和误差, q 为微分算子.

(b) 磁饱和模型

$$A_c = f(I_r) \quad (12)$$

其中 A_c 为阻尼力的峰值.

(c) 力学响应模型

$$\dot{X}(q)z = D(q)\dot{x} + e \quad (13)$$

其中 \dot{x} , z , e , $\dot{X}(q)$, $D(q)$ 分别表示相对速度, 动力学等价速度, 误差和微分算子。

(d) Bingham 模型的光滑替代模型

$$F_c = \frac{2A_c}{1 + \exp(-\beta z)} - A_c \quad (14)$$

其中 F_c , β 分别表示阻尼力和阻尼器的结构参数。

他们通过实验对此模型进行了参数辨识, 并将数值仿真结果和实验结果进行了对比, 二者基本一致。

7 结论

目前, 滞后非线性模型的研究还远远不够, 还有很多工作值得我们去完成。首先, 对已有模型的改进还应采用更多的力学模型进行实验验证和理论研究, 进一步验证改进的有效性和合理性。对提出的新模型应与其它滞后非线性模型进行比较, 进一步研究其特点及应用场合, 使其发挥更大的作用, 为工程实际服务。另外, 对新模型的建立和新的参数辨识方法的研究也应持之以恒, 继续努力。

参 考 文 献

- Den Hartog JF. Forced Vibrations with Combined Coulomb and Viscous Friction. *Transactions of the ASME*, 1931 (9):107~115
- Den Hartog JF. *Mechanical Vibrations*. New York:Mcgraw Hill Nook Company, Inc., 4Th ed., 1956
- Stammers CW, Sireteanu T. Vibration Control of Machines By Use of Semi-Active Dry Friction Damping. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 209(4):671~684
- Iwan WD. The dynamics response of bilinear hysteretic System. California:California Institute of Technology, 1961
- 胡海岩, 李岳峰. 具有记忆特性的非线性减振器参数识别. *振动工程学报*, 1989, 2(2):17~27 (Hu Haiyan, Li yuefeng. Parameter Identification of a nonlinear shock absorber with Memory Function. *Journal of Vibration Engineering*, 1989, 2(2):17~27 (in Chinese))
- Tan RY, Huang MC. System identification of a bridge with lead-rubber bearings. *Computers and Structure* 2000, 74:267~280
- 白鸿柏, 黄协清. 三次非线性粘性阻尼双线性滞迟振动系统 IHB 分析方法. *西安交通大学学报*, 1998, 32(10):35~38 (Bai hongbai, Huang xieqing. Response of Forced Vibration of Bilinear Hysteretic Oscillator. *Journal of Xian Jiaotong University*, 1998, 32(10):35~38 (in Chinese))
- 白鸿柏, 郑坚, 张培林, 等. 粘性阻尼双线性滞迟振子简谐激励响应的 Krylov-Bogoliubov 计算方法. *机械工程学报* 2000, 36(10):27~29 (Bai hongbai, zheng jian, zhang peilin. Excitation using Krylov-Bogoliubov method. *Chinese Journal of Mechanical Engineering* 2000, 36(10):27~29 (in Chinese))
- Davidenkov NN. Hysteretic Property of the Ferrous Metal. *J. Tech. Phys.*, 1939, 8:483~489
- Shaopu Yang, Yushu Chen, The Bifurcations and Singularities of the Parameterical Vibration in a system with Davidenkov's hysteretic nonlinearity. *Mechanics Research Communication*, 1992, 19(4):267~271
- 金栋平, 陈予恕. 滞后非线性系统的分岔和奇异性. *天津大学学报*, 1997, 30(3):299~304 (Jin dongping, Chen yushu. The bifurcations and singularities in systems with hysteretic nonlinearity. *Journal of Tianjin University*, 1997, 30(3):299~304 (in Chinese))
- 陈恩利, 杨绍普. 两系非线性悬挂车辆的运行稳定性与分叉. *应用力学学报*, 1995, 12(3):92~95 (Chen enli, Yang shaopu. The stability and bifurcation in vehicle with secondary nonlinear suspension system. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1995, 12(3):92~95 (in Chinese))
- Bouc R. Forced vibration of mechanical system with hysteresis. *Proceedings of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillations*, Prague, Czechoslovakia, 1967
- Wen YK. Method for random vibration of hysteretic systems. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1976, 102(2):249~263
- 严天宏, 王学孝, 段登平等. 含弹塑性滞迟非线性结构系统的实时最优控制研究. *控制理论与应用*, 2000, 17(4):619~623 (Yan tianhong, Wang xuexiao, Duan dengping. Integrated Instantaneous Active Control of Structure with Elasto-Plastic Hysteretic Passive Isolaters. *Control Theory and Applications* 2000, 17(4):619~623 (in Chinese))
- Spencer BF, Dyke SJ, Sain MK. Phenomenological model magnetorheological dampers. *Journal of Engineering Mechanics*, 1997, 123(3):230~238
- 关新春, 欧进萍. 磁流变耗能器的阻尼力模型及其参数确定. *振动与冲击*, 2001, 20(1):5~8 (Guan xinchun, Ou jinping. Magnetorheological dampers damping force model and the definition of its parameter. *Journal of Vibration*

- and Shock* 2001 20(1):5~8(in Chinese))
- 18 Badrakhan F. Rational study of hysteretic systems under stationary random excitation. *Int. J. Nonlinear Mechanics*, 1987, 22(4):312~315
 - 19 Badrakhan F. Dynamic Analysis of Yielding and Hysteretic System by Polynomial Approximation. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, 125(1):23~42
 - 20 Tinker LM, Cutchins MA. Damping Phenomena in a wire Rope Vibration Isolation System. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 157(1):7~18
 - 21 Ko JM, Ni YQ, Tian QL. Hysteretic behavior and empirical modeling of a wire-cable vibration isolator. *The international Journal of analytical and experimental model analysis*, 1992, 7(2):111~117
 - 22 潘东, 赵玫, 静波. 钢丝绳弹性组合元件中滞后力的数学建模. 上海交通大学学报, 1996, 30(8):104~107 (Pang dong, Zhao mei, Jing bo. A Mathematical Model of Hysteretic Force in cable wire assembly. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 1996, 30(8):104~107(in Chinese))
 - 23 王轲, 李伟, 朱德懋. 非线性迟滞阻尼减振器动力学模型参数识别. 华东交通大学学报, 1999, 16(4):1~5 (Wang ke, Li wei, Zhu demao. The Parameter Identification of Dynamic Models of Nonlinear Hysteretic Damping Isolator. *Journal of East China Jiaotong University*, 1999, 16(4):1~5(in Chinese))
 - 24 龚宪生, 唐一科. 一类迟滞非线性振动系统建模新方法. 机械工程学报, 1999, 35(4):11~14 (Gong Xian-sheng, Tang Yike. New method for modeling of a nonlinear vibration system with hysteresis characteristics. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 1999, 35(4):11~14(in Chinese))
 - 25 龚宪生, 唐一科, 景军平. 增强泡沫塑料隔振器动态性能的实验研究. 复合材料学报, 2003, 20(5):135~141 (GONG Xiansheng, TANG Yike, JING Junping. Experimental investigations on dynamic performance of vibration isolator made of reinforced foam plastics. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2003, 20(5):135~141(in Chinese))
 - 26 赵荣国, 徐友钗, 陈忠富. 一个新的非线性迟滞隔振系统动力学模型. 机械工程学报, 2004, 40(2):185~188 (Zhao rongguo, Xu youju, chen zhongfu. New dynamic model for nonlinear hysteresis vibration isolation system. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2004, 40(2):185~188(in Chinese))
 - 27 杨绍普, 袁向荣, 陈恩利. 多频激励滞后非线性系统的组合共振分岔与奇异性. 非线性动力学学报, 1998, 5(3):223~229 (Yang shaopu, Yuan xiangrong. Combination resonance bifurcation and singularity in a hysteretic nonlinear system with multi-frequency excitations. *Journal of nonlinear dynamics in science and technology*, 1998, 5(3):223~229(in Chinese))
 - 28 Chen Enli, Yang Shaopu, Yuan Xiangrong. The Subharmonic Resonance in a Multi-Degree-of-Freedom Hysteretic Nonlinear System With Multi-Frequency Excitations. Proceedings of International Conference on Vibration Engineering, 1998, 8:270~273
 - 29 李韶华, 杨绍普. 具有滞后非线性的汽车悬架中的混沌. 振动、测试与诊断, 2003, 23(2):86~89 (Li shaohua, Yang shaopu. Chaos in Vehicle Suspension System with Hysteretic Nonlinearity. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis* 2003, 23(2):86~89(in Chinese))
 - 30 Shaohua Li, Shaopu Yang, Wenwu Guo. Investigation on chaotic motion in hysteretic nonlinear suspension system with multi-frequency excitations. *Mechanics Research Communications* 2004, 31:229~236
 - 31 Stanway R, Sproston JL, Stevens NG. Non-linear modeling of an electrorheological vibration damper. *J. Electrostatics*, 1987, 20:167~184
 - 32 Yang SP, Li SH, Wang X, Gordaninejad F, Hitchcock G. A Hysteresis Model for Magneto-rheological Damper. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation* 2005, 6(2):139~144
 - 33 Guo S, Yang S, Pan C, Guo J. Analysis of an Isolation System with Magnetorheological Damper. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2005, 6(2):75~80
 - 34 Pan C, Yang S, Shen Y. An Electro-Mechanical Coupling Model of Magnetorheological Damper. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2005, 6(2):69~74

RESEARCH STATUS OF HYSTERETIC NONLINEAR MODELS*

Li Shaohua Yang Shaopu

(*School of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang 050043, China*)

Abstract This paper presents the origin, expression and principle of six traditional hysteretic nonlinear models, which are dry friction model, bilinear model, Davidenkov model, Bouc-Wen model, trace method model and Bingham model, and analyzes their advantages, disadvantages and applications. In addition, some latest modified models are introduced and the corresponding investigations on these modified models are also presented. Finally, the status quo of hysteretic nonlinearity modeling is summarized and the research direction is predicted.

Key words hysteretic nonlinearity, mathematical modeling, trace method model, Bouc-Wen model, Bingham model